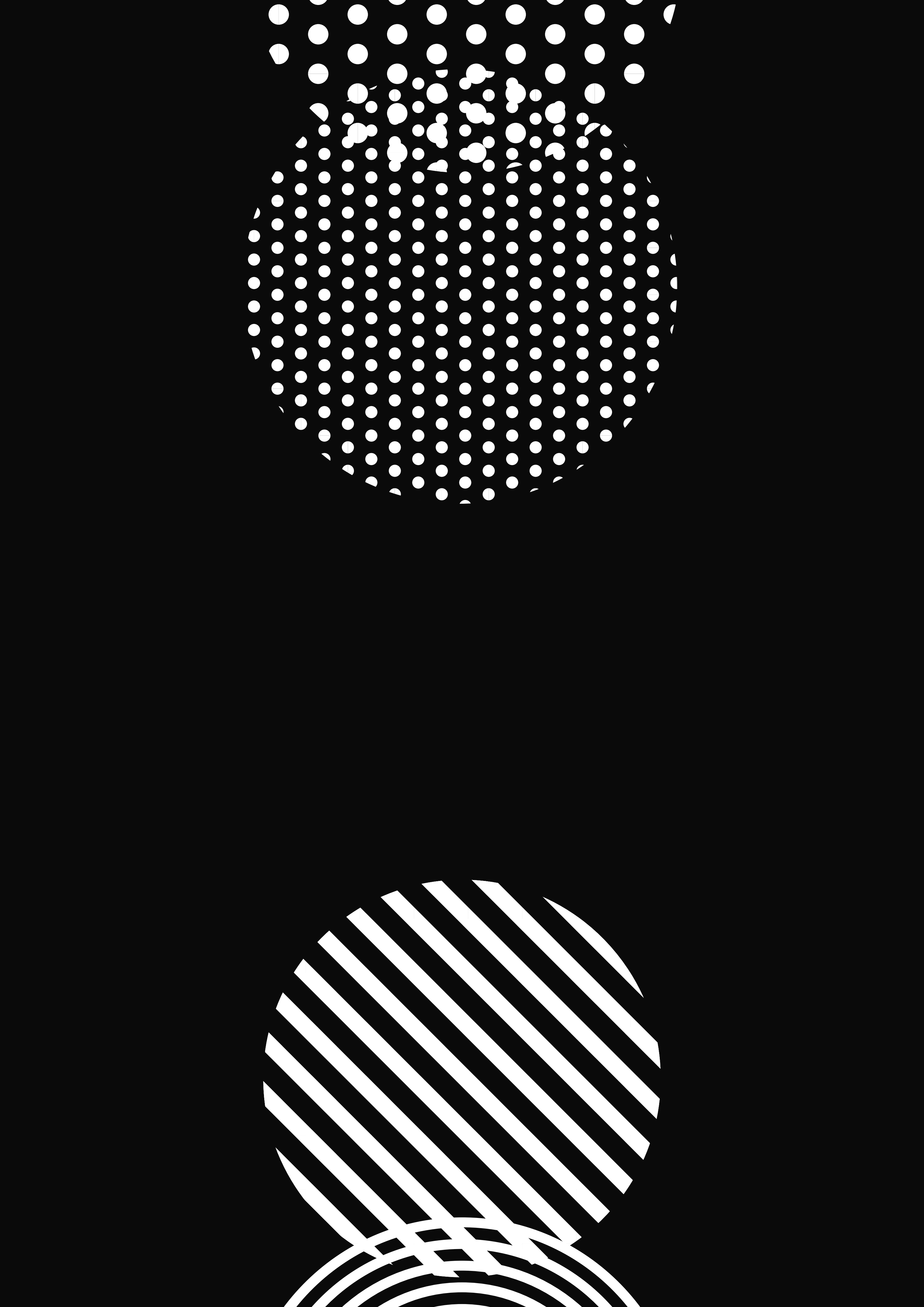
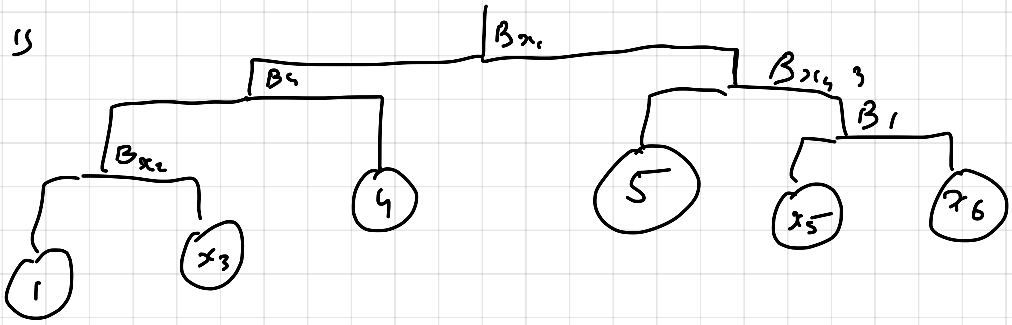


Exercice 1

1)



$$4 + x_2 + 1 + x_3 + 4 = 5 + x_5 + x_6 + 1 + x_4$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ x_5 + x_6 = 4 \end{cases}$$

9 6

$$x_3 + x_2 + 3 = x_4 + x_5 + x_6$$

$$4 + 3 = x_4 + 4$$

$x_4 = 3 \quad x_5 = x_6 = 2$
$x_2 = 2 \quad x_3 = 1$

2) $o(O_1) = 1$

$b(O_1) = 0$

$o(B(B_1, B_2)) = B_1 + B_2$

$b(B(B_1, B_2)) = 1 + B_1 + B_2$

d'où la conclusion.

3. $\text{masse}(O_x) = x$
$\text{masse}(B_x(B_1, B_2)) = \text{masse}(B_1) + \text{masse}(B_2) + x$

4. $\text{masse}(\text{alourdir}(O_x, y)) = \text{masse}(O_{x+y}) = x + y = \text{masse}(O_x) + y$

Soient m_1, m_2 et supposons
que $\text{masse}(\text{alourdir}(m_1, x)) = \text{masse}(m_1) + x$
$\text{masse}(\text{alourdir}(m_2, x)) = \text{masse}(m_2) + x$

$\text{masse}(\text{alourdir}(B_x(m_1, m_2)), y)$

$= \text{masse}(B_{x+\frac{y}{3}}(\text{alourdir}(m_1, y/3), \text{alourdir}(m_2, y/3)))$

$= x + \frac{y}{3} + \text{masse}(\text{alourdir}(m_1, \frac{y}{3})) + \text{masse}(\text{alourdir}(m_2, y/3))$

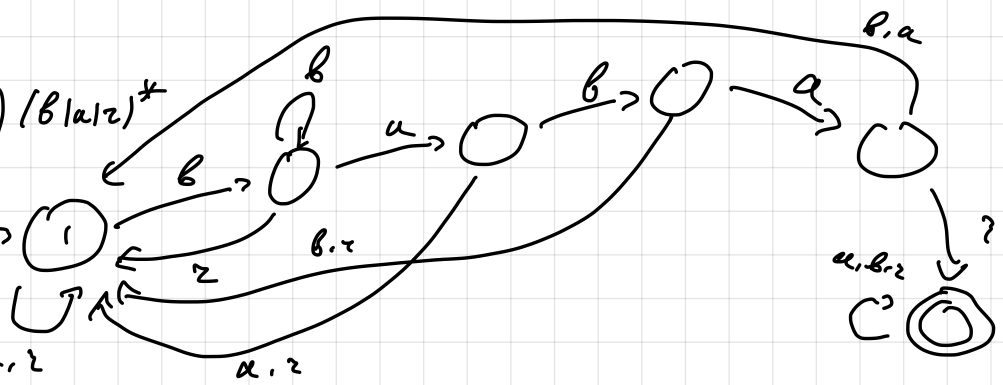
$= x + \frac{y}{3} + \text{masse}(m_1) + \frac{y}{3} + \text{masse}(m_2) + \frac{y}{3}$

$= x + \text{masse}(m_1) + \text{masse}(m_2) + y = \text{masse}(B_x(m_1, m_2)) + y$

Exercice 2

1) $(b|a|z)^*(b\,abar)(b|a|z)^*$

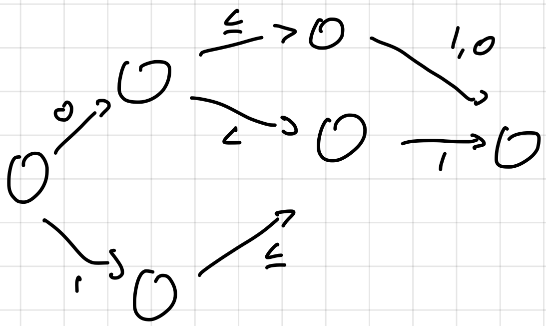
2) start



Exercice 3

1. $(0\le 0)|(0(\le|<)1)|1\le 1$

2.



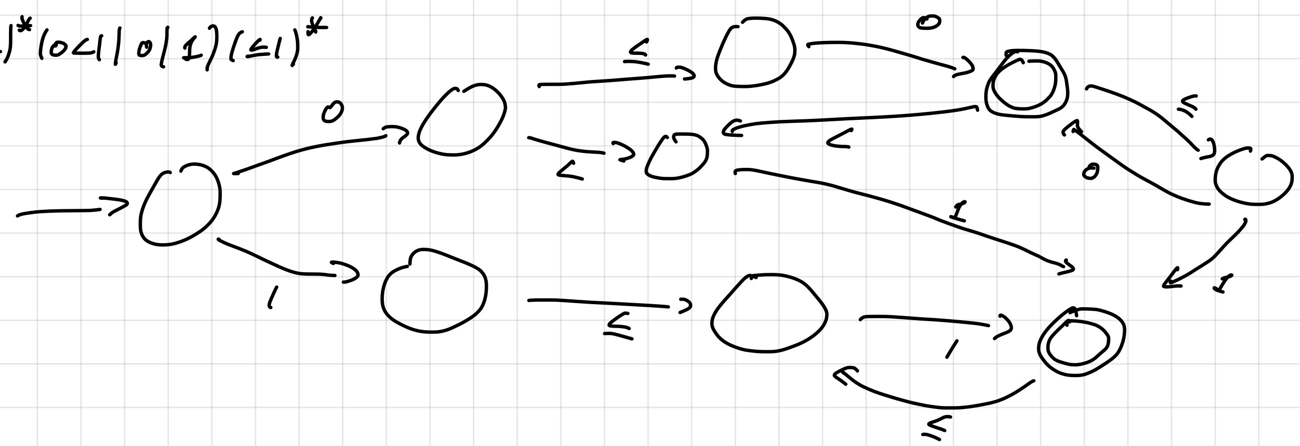
3.

$0<1$ peut apparaître dans un mot seulement une fois

$0\le 0$ peut apparaître infiniment de fois seulement au début

$(0\le)^*(0<1|0|1)(\le 1)^*$

start



4. Supposons par l'absurde que L_3 est reconnaissable par l'automaton A fini à n états.

Soit donc $m = 101<10^{n+1}$

0^n contient n chiffres $n \ge n$ chiffres
donc d'après le lemme de l'étoile
$\exists m_1, m_2, m_3$ avec $m_2 \ne \varepsilon$ tq $m = m_1 m_2 m_3 \in L_3$
alors $m_1 = 101<1$ $m_2 = 0^{n+1}$ $m_3 = \varepsilon$

D'où $\forall q \in \mathbb{N} \quad 101 \angle 1 \; 0^{q(n+1)} \in \mathcal{L}_3$

alors $101 \angle 1 \in \mathcal{L}_3$
mais cette comparaison n'est pas valide,
contradiction. Donc $\mathcal{L}_3$ n'est pas reconnaissable.