



Exercice 3.4

sur $J \subset \mathbb{R}$

$$y'' + ay' + by = 0. \quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ deux solutions. } W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

1. Supposons que (φ_1, φ_2) soit un système libre.

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0 \\ \lambda_1 \varphi_1' + \lambda_2 \varphi_2' = 0 \end{cases} \quad \text{donc le système admet une unique solution}$$

ce qui n'est possible que $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$

Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tq $W(t_0) \neq 0$

$$\text{Alors, } \begin{cases} \lambda_1 \varphi_1(t_0) + \lambda_2 \varphi_2(t_0) = 0 \\ \lambda_1 \varphi_1'(t_0) + \lambda_2 \varphi_2'(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{admet pour unique solution } (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$$

$$\text{Supposons que } \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0 \quad \forall t \in J, \quad \begin{aligned} \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) &= 0 \\ \lambda_1 \varphi_1'(t) + \lambda_2 \varphi_2'(t) &= 0 \end{aligned}$$

En particulier $t = t_0$ on doit avoir

$$\begin{cases} \lambda_1 \varphi_1(t_0) + \lambda_2 \varphi_2(t_0) = 0 \\ \lambda_1 \varphi_1'(t_0) + \lambda_2 \varphi_2'(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{donc } (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0) \text{ et } (\varphi_1, \varphi_2) \text{ est libre.}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1'' &= -a \varphi_1' - b \varphi_1 \\ \varphi_2'' &= -a \varphi_2' - b \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } W'(t) &= \varphi_1(-a \varphi_2' - b \varphi_2) - (-a \varphi_1' - b \varphi_1) \varphi_2 \\ &= -a \varphi_1 \varphi_2' - b \varphi_1 \varphi_2 + a \varphi_1' \varphi_2 + b \varphi_1 \varphi_2 = -a W(t) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } W(t) = C e^{-A(t)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \text{ où } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$\text{comme } A(t_0) = 0 \quad W(t_0) = C \cdot 1 = C$$

$$\text{et finalement } W(t) = W(t_0) e^{-A(t)} \quad \text{donc } \forall t \in J \quad W(t) \neq 0$$

2.

$$(E) \quad t^2 y'' - (t^2 + 3t) y' + (t+3) y = 0$$

$$\Leftrightarrow y'' - \frac{(t^2 + 3t)}{t^2} y' + \frac{(t+3)}{t^2} y = 0$$

$$a(t) = -t - \frac{3}{t} \quad b(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}$$

Donc (E) $y'' + a y' + b y = 0$

a)

$$t'' = 0 \quad t' = 1 \quad \text{donc}$$

$$t^2 \varphi_1''(t) - (t^2 + 3t) \varphi_1'(t) + (t+3) \varphi_1(t) = 0$$

$$= 0 - t^2 - 3t + t^2 + 3t = 0$$

donc φ_1 est bien une solution de (E) sur J

(b) Soit φ_2 une autre solution indépendante (de φ_1)

Alors $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t -a(s) ds\right)$.

$$\text{Or } \int_{t_0}^t -a(s) ds = \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{3}{s}\right) ds = \left[s + 3 \ln s\right]_{t_0}^t = t + 3 \ln(t) - t_0 - 3 \ln(t_0) = t - t_0 + 3 \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$\text{D'autre part, } W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t) \varphi_2'(t) - \varphi_2(t) \varphi_1'(t)$$

$$\text{donc } W(t) = t \varphi_2' - \varphi_2$$

$$\text{On doit donc avoir } t \varphi_2'(t) - \varphi_2(t) = W(t_0) e^{t-t_0} \left(1 + 3 \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right). \text{ On pose } \alpha(t_0) = W(t_0) \cdot e^{t_0-t_0} = W(t_0)$$

On obtient l'équation différentielle (pour φ_2)

$$t \varphi_2' - \varphi_2 = \alpha t^3 e^t$$

$$\Leftrightarrow \varphi_2' - \frac{1}{t} \varphi_2 = \alpha t^2 e^t$$

$$A(t) = \ln(t)$$

$$\text{Une sol } e^{A(t)} = t$$

$$W(t) = \frac{y}{t}$$

$$W'(t) = \frac{y't - y}{t^2} = \frac{\alpha t^3 e^t}{t^2} = \alpha t e^t$$

$$\text{donc } W(t) = \alpha \int_{t_0}^t s e^s ds = \alpha \left(\int_{t_0}^t s e^s ds - \int_{t_0}^{t_0} s e^s ds \right)$$

$$= \alpha \left((t-1)e^t - (t_0-1)e^{t_0} \right)$$

$$= \alpha \left((t-1)e^t - (t_0-1)e^{t_0} \right)$$

