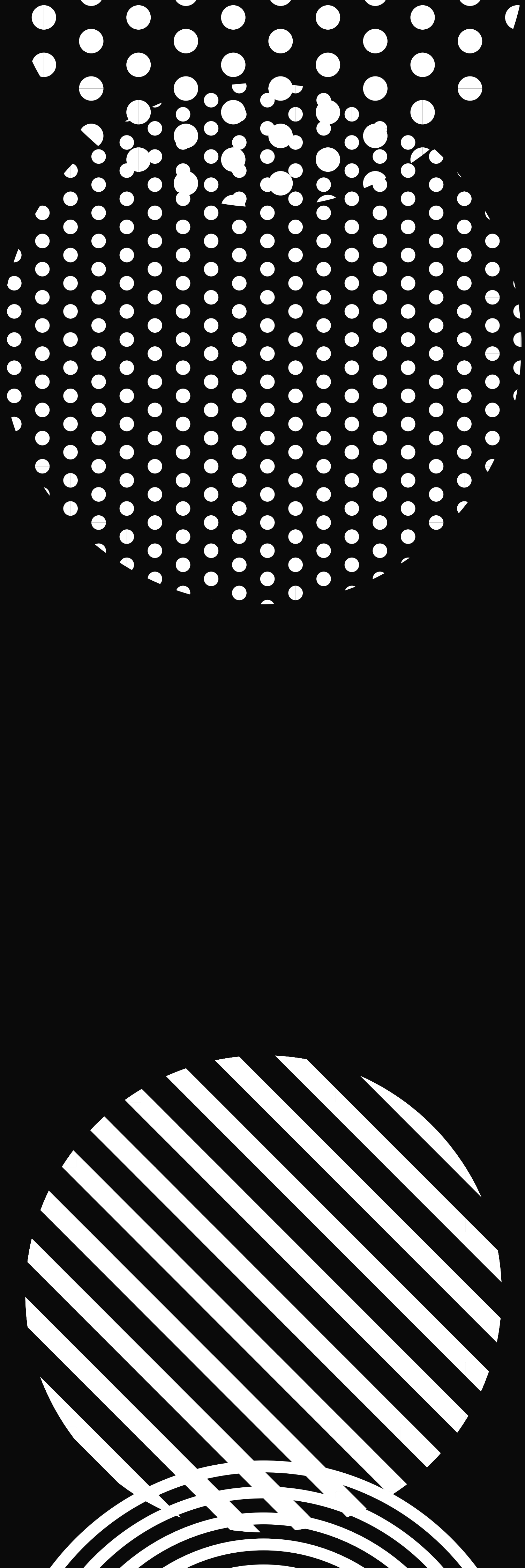

Exercice 3

$$y'' - 4y' + 3y = (2t+1)e^{-t}$$

(E_H) $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$y(t) = e^{zt}$$
$$y'(t) = ze^{zt}$$
$$y''(t) = z^2e^{zt}$$

y solution de E_H

$\Leftrightarrow$ $z^2 - 3z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $z = 3$ ou $z = 1$

2) Pour $t \in \mathbb{R}$ $\quad z(t) = e^{-3t}y(t)$

$$y(t) = z(t)e^{3t}$$
$$y'(t) = z'(t)e^{3t} + 3z(t)e^{3t}$$
$$y''(t) = z''(t)e^{3t} + 6z'(t)e^{3t} + 9z(t)e^{3t}$$

y est solution de (E_H) ssi
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad e^{3t}(z''(t) + 6z'(t) + 9z(t) - 4z'(t) - (12z(t) + 3z(t))) = 0$

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $z''(t) + 2z'(t) = 0$

On pose $u = z'$. u est solution de $u' + 2u = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = Ce^{-2t}$, $\quad C \in \mathbb{R}$

donc pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \alpha e^{-2t} + \beta$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{3t}$

3) Pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}$

car on suppose $\alpha'(t)e^{3t} + \beta'(t)e^{t} = 0$

$$y'(t) = \cancel{\alpha'(t)e^{3t}} + 3\alpha(t)e^{3t} + \cancel{\beta'(t)e^{t}} + \beta(t)e^{t}$$

$$y''(t) = 3\alpha'(t)e^{3t} + 9\alpha(t)e^{3t} + \beta'(t)e^{t} + \beta(t)e^{t}$$

y est solution de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R}$

$$(6\alpha'(t) + 9\alpha(t))e^{3t} + (\beta'(t) + \beta(t))e^{t} - 4(3\alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}) + 3(\alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}) = (2t+1)e^{-t}$$

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{3t}3\alpha'(t) + e^{t}\beta'(t) = (2t+1)e^{-t}$

Donc α et β sont solutions du système pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3e^{3t}\alpha'(t) + e^{t}\beta'(t) = (2t+1)e^{-t} \\ e^{3t}\alpha'(t) + e^{t}\beta'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{3t}\alpha'(t) = (2t+1)e^{-t} \\ \beta'(t) = -e^{2t}\alpha'(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'(t) = \frac{1}{2}(2t+1)e^{-4t} \\ \beta'(t) = \frac{1}{2}(2t+1)e^{-2t} \end{cases}$$

donc $\alpha(t) = \frac{1}{2}\int^{t} (2s+1)e^{-4s}\,ds \quad + (C=0)$

$$= \frac{1}{2}(2t+1)\frac{e^{-4t}}{-4} - \frac{1}{2}\int^{t} 2\,\frac{e^{-4s}}{-4}\,ds$$

$$= -\frac{1}{8}(2t+1)e^{-4t} - \frac{1}{4}\,\frac{e^{-4t}}{-4}$$

$$= -\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{16}\right)e^{-4t}$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\int^{t}(2s+1)e^{-2s}\,ds$$

$$= -\frac{1}{2}(2t+1)\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\int^{t} 2\,\frac{e^{-2s}}{-2}\,ds$$

$$= \frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{-2t}}{-2} = \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-2t}$$

Donc une solution particulière de (E) est :

$$y_p(t) = -\left(\frac{t}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{-t} + \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-t}$$

$$= \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-t}$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme $(\mathbb{R}, y)$ avec pour $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \left(\frac{t}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-t} + \alpha e^{t} + \beta e^{3t} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

3) $y''(x) + 4y(x) = \tan(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\star (E_H) : y'' + 4y = 0$

On résout l'équation caractéristique :

$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$

On pose pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z(x) = e^{-2ix}y(x)$

$\Leftrightarrow y(x) = e^{2ix}z(x)$

donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y'(x) = 2iz(x)e^{2ix} + z'(x)e^{2ix}$

$y''(x) = -4z(x)e^{2ix} + 4iz'(x)e^{2ix} + z''(x)e^{2ix}$

Donc y est solution de (E_H) ssi pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$e^{i2x}(z''(x) + 4iz'(x)) = 0$ ssi $z'' + 4iz = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z'(x) = Ce^{-4ix}$, $C \in \mathbb{C}$

$z(x) = \alpha e^{-4ix} + \beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Donc les solutions de (Eh) sont de la forme $y(x) = C_- e^{-2ix} + C_+ e^{2ix}$
pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $C_+, C_- \in \mathbb{C}$

+ On cherche une solution particulière de (E) :
On pose pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$y(t) = C_-(x)\, e^{-2ix} + C_+(x)\, e^{2ix}$$

$$y'(t) = C_-'(x)\, e^{-2ix} - 2i C_-(x) e^{-2ix} + C_+'(x) e^{2ix} + 2i\, C_+(x) e^{2ix}$$

On suppose $C_-'(x)\, e^{-2ix} + C_+(x)\, e^{2ix} = 0$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

donc $y'(x) = -2i C_-(x)\, e^{-2ix} + 2i C_+(x) e^{2ix}$

$y''(x) = -2i\, C_-'(x)\, e^{-2ix} - 4 C_-(x)\, e^{-2ix} + 2i\, C_+'(x)\, e^{2ix} - 4 C_+(x)\, e^{2ix}$

donc y est solution de (E) ssi pour $x \in]-\frac{\pi}{2}$