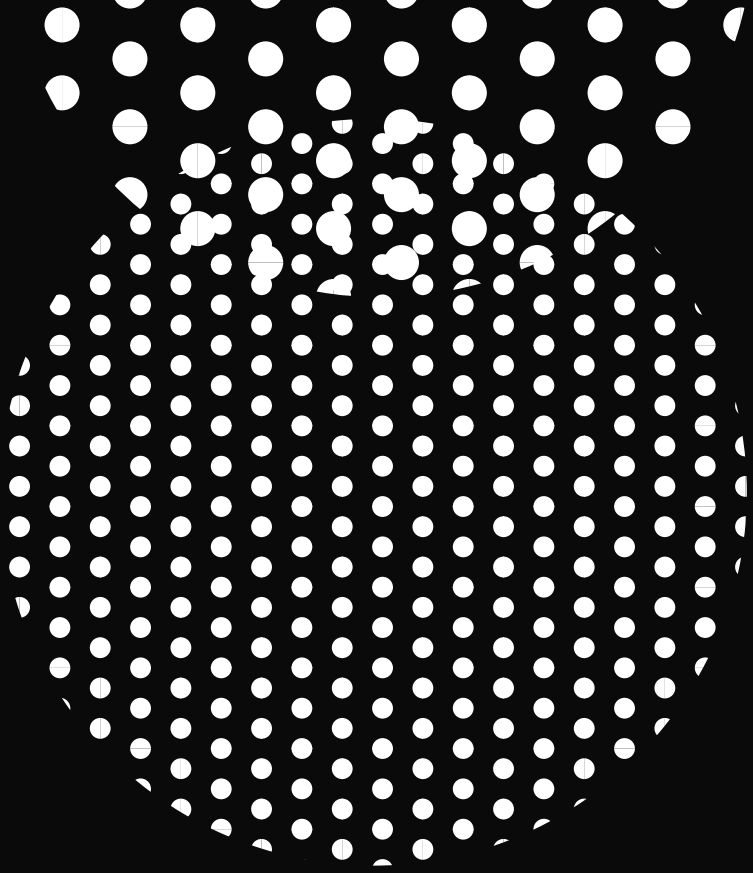


Exercice 2.1

1. $a - a - a^2x^2 = -9x^2$

$\Leftrightarrow \quad -a^2x^2 = -9x^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = 9$

$\Leftrightarrow \quad a = -3,\ a = 3 \quad$ donc $\quad a = 3$

2. $$y'(x) = y_0'(x) + \frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

$$= 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 - \frac{1}{x z(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = -9x^2$$

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} - \frac{1}{x z(x)} + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 0$$

$$\frac{z'(x) - 1}{z^2(x)} + \frac{6x^2 - 1}{x z(x)} = 0$$

$$\frac{z'(x) - 1}{z(x)} + \frac{6x^2 - 1}{x} = 0$$

3. $$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1$$

$$z' = 1 - \left(6x + \frac{1}{x}\right) z \quad = f(x, y)$$

$$f(x,y) - f(x,0) = 1 - \left(6x + \frac{1}{x}\right) z - 1$$

$$= -\left(6x + \frac{1}{x}\right) z$$

$$\left\{ z' = -\left(6x + \frac{1}{x}\right) z \right.$$

$$\frac{z'}{z} = -\left(6x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\ln|z| = -3x^2 - \ln x$$

$$|z| = e^{-3x^2 - \ln x}$$

$$= \frac{e^{-3x^2}}{x} = z$$

Soit $z \in \mathcal{C}^1$ et $w(x) = e^{-A(x)} z(x) = x e^{3x^2} z(x)$

On a $w'(x) = -a(x) e^{-A(x)} z(x) + e^{-A(x)} z'(x)$

$$= e^{-A(x)} (z'(x) - a(x) z(x))$$

Donc (J, z) est solution de (2) ssi $w'(x) = e^{-A(x)}$

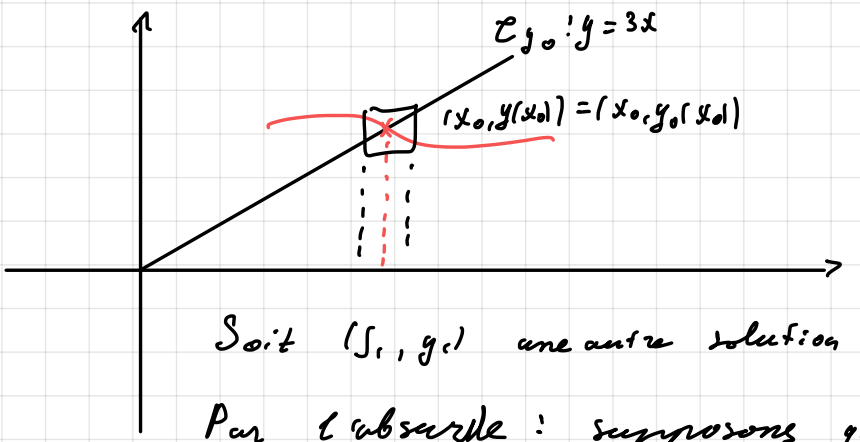
$$\Rightarrow w(x) = \int^x e^{-A(s)} ds = \int^x e^{\ln s} e^{3s^2} ds$$

$$= \int^x s e^{3s^2} ds = \frac{e^{3x^2}}{6} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z(x) = e^{A(x)} \left(\frac{e^{3x^2}}{6} + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} e^{-3x^2} \left(\frac{e^{3x^2}}{6} + C \right) = \frac{1}{6x} + \frac{C e^{-3x^2}}{x}$$

4)



Soit (J_1, y_1) une autre solution de l'équation (1)

Par l'absurde : supposons qu'il existe $x_0 \in J_1 \cap]0, +\infty[$

tq $y_1(x_0) = y_0(x_0)$

Dans ce cas y_1 et y_0 sont deux solutions du problème de Cauchy.

$$\begin{cases} (1) \\ y(x_0) = 3x_0 \end{cases}$$

D'après le thm de CL (unicité) cela entraîne que $y_0 = y_1$ ce qui est absurde. Par continuité de y_1, on a

ou bien $y_1(x) > 3x$ pour tout $x \in J_1$,

$\boxed{\text{Exo 2.2}}$ ou bien $y_1(x) < 3x$ pour tout $x \in J_1$

But $x \in]0,+\infty[$

$$z(x) = \frac{C}{x} e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

4) b) D'après 2), (J,y) est solution de (1) ssi (J,y) est solutions (2) avec pour $x \in J$, $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$

D'après 3), $J = I =]0,+\infty[$ et pour $x \in I$,

Donc pour $x>0$:

$$y(x) = 3x - \frac{1}{\frac{C}{x}e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}} = 3x - \frac{6x}{6Ce^{-3x^2}+1}$$
$$= 3x\left(1 - \frac{2}{6Ce^{-3x^2}+1}\right)$$

On a $e^{-3x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc il existe $x_0 > 0$ tel que $6Ce^{-3x_0^2}+1>0$
donc $1 - \frac{2}{6Ce^{-3x_0^2}+1} < 1$ donc $y(x_0) < 3x_0$

Ainsi, d'après a), pour tout $x>0$, $y(x) < 3x \iff \forall x>0, z(x)>0$

4) d'après b), les solutions (1) sont de la forme (I,y)

avec $\forall x \in I$, $y(x) = 3x - \underbrace{\frac{6x}{6Ce^{-3x^2}+1}}_{\frac{1}{z(x)}}$, $C \in \mathbb{R}$

avec $\forall x \in I$, $y(x) < 3x \iff \forall x \in I, z(x) > 0$

Si $C<0$, $6Ce^{-3x^2}+1>0 \overset{\forall x \in I}{\iff} e^{-3x^2} > \frac{-1}{6C} \ (>0)$

$\iff -3x^2 > \ln\left(\frac{-1}{6C}\right)$

$\iff x^2 < -\frac{1}{3}\ln\left(-\frac{1}{6C}\right)$

si $\ln\left(-\frac{1}{6C}\right) < 0 \iff -\frac{1}{6C} < 1 \iff \frac{-1}{6} > C$, alors il existe $x_0 > 0$ tel que $x_0^2 > -\frac{1}{3}\ln\left(-\frac{1}{6C}\right)$ donc $C \geq -\frac{1}{6}$

Ainsi, les solutions sont de la forme (I,y) et $C \geq -\frac{1}{6}$ ou (I, y_0)

$C \geq -\frac{1}{6}$

$6Ce^{-3x^2} \geq -e^{-3x^2}$
> -1

$6Ce^{-3x^2}+1>0$
$z(x)>0$