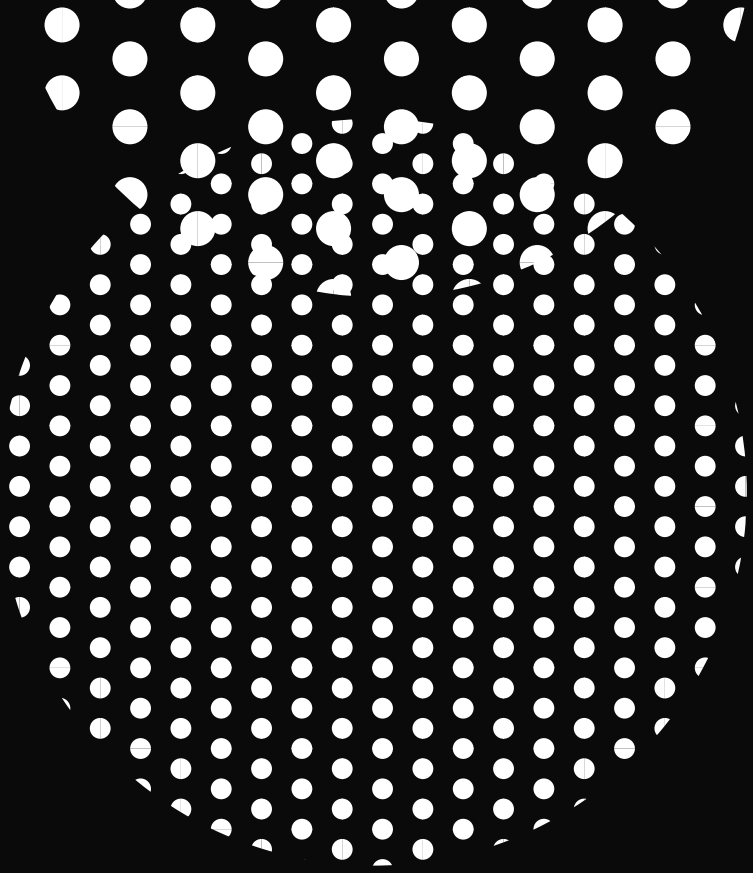

Exercice 1.3

$$y' - \frac{2}{1-x^2} y = 1$$

On s'intéresse à l'ED

$$y' = f(t,y)$$

où $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(t,x) = \frac{1}{1-t^2} x + 1$
qui est bien continue sur $J \times \mathbb{R}$

Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$

On multiple par $(1-t)$

$$\frac{1}{1+t} = a + (1-t)\frac{b}{1+t}\Big|_{t=1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a$$

idem pour $(1+t)$ d'où $b = \frac{1}{2}$

CCL : $f(t) = \frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$

$$F(t) = -\ln(1-t) + \ln(1+t) + C$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{2}{1-s^2} ds = -\ln(1-t) + \ln(1+t) + \ln(1-t_0) - \ln(1+t_0)$$

$$= \ln \frac{1+t}{1-t} + C \qquad \text{pour un } C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{1-t^2} + \frac{1}{y} \qquad y'(t) = a(t)y + b(t)$$

JVDM

Equation homogène associée : $y(t) = C e^{A(t)}$

Equation complète : $w(t) = e^{-A(t)} y(t)$ (inv.)

$$w'(t) = y'(t) e^{-A(t)} - A'(t) e^{-A(t)} y(t)$$

$$= e^{-A(t)} \left(y'(t) - a(t) y(t) \right)$$

$$= e^{-A(t)}$$

$$\int_{t_0}^{t} w'(s) ds = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{1-s}{1+s} ds = \int_{t_0}^{t} \frac{2}{1+s} - 1 \, ds$$

$$= 2\ln(1+t) - t + C$$

$$y(t) = e^{A(t)} w(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(2\ln(1+t) - t + C\right)$$

2. Solutions continues pour l'équation $(E) : y' = \frac{2}{1-t^2} y + 1$

-> On connaît les solutions de (E) sur $J =]1, +\infty[$
-> Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors $y|_J$ est une solution de (E)

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tq

$$y|_J(t) = 2\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\ln(1+t) + (C-t)\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

En particulier

$$\lim_{t\to 1^+} y|_J(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{1-t}\left(2(1+t)\ln(1+t) + (C-t)(1+t)\right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{1-t}\left(\quad\right) \sim \frac{1}{1-t}(4\ln 2 + C - 1)$$

Si $4\ln 2 + C - 1 \neq 0$ alors $|y|_J(t)| \longrightarrow +\infty$ qd $t \to 1^+$

Dans ce cas $\lim_{t\to 1^+} |y(t)| = \lim_{t\to 1^+} |y(t)|_J| = +\infty$

ce qui est absurde car $y \in C^0(\mathbb{R})$

<u>Exercice 1.5</u>

$$ty' - 2y = 0$$

Ce n'est pas une equation différentielle sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle s'écrit $y' = f(t,y)$ avec $f(t,x) = \frac{2x}{t}$ qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Mais, si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $ty'(t) - 2y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
alors $\begin{cases} y_+ = y|_{]0,+\infty[} & \text{vérifie } y_+' = \frac{2}{t} y \\ y_- = y|_{]-\infty,0[} & \text{vérifie } y_-' = \frac{2}{t} y \end{cases}$

① Calcul de y_+

On sait $y_+(t) = C_+ e^{A(t)}$ avec $C_+ \in \mathbb{R}$

et $A(t) = \int_1^t \frac{2}{s} ds = 2\ln t$ donc $y_+(t) = C_+ t^2$, $C_+ \in \mathbb{R}$

② De même, $y_-(t) = C_- t^2$, $C_- \in \mathbb{R}$

donc $y|_{\mathbb{R}^*}(t) = C_+ t^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) + C_- t^2 \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)$

③ De plus y est continue sur $\mathbb{R}$ donc en $t=0$

$$y(0) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{t\to 0^-} y(t) = 0$$

<u>Finalement:</u> $y(t) = t^2 (C_+ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) + C_- \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t))$ avec $C_+, C_- \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est $\mathcal{S} = \{ t \mapsto t^2 (C_+ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) + C_- \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)),$
$C_+, C_- \in \mathbb{R} \}$

* contient la fonction nulle
* est stable par CL.

Donc $\mathcal{S}$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

Par ailleurs $\varphi_+ : t \mapsto t^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$

$\varphi_- : t \mapsto t^2 \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}$.

C'est aussi une famille libre:
si
$$\lambda_+ \varphi_+ + \lambda_- \varphi_- = 0$$

alors: $\forall t \in \mathbb{R}$
$$\lambda_+ \varphi_+(t) + \lambda_- \varphi_-(t) = 0$$

Pour $t = 1$ $\quad \lambda_+ = 0$
$t = -1$ $\quad \lambda_- = 0$

<u>Exercice I.11</u>

1. <u>Indication: calculer h'</u>

On obtient $h'(t) \leq g(t) h(t)$

Soit $G(t)$ une primitive de g.

On a $(e^{-G(t)} h(t))' =$

$$-g(t) e^{-G(t)} h(t) + e^{-G(t)} h'(t) = e^{-G(t)} (h'(t) - g(t) h(t)) \leq 0$$

Conclusion: $\forall t \geq 0$ $\quad e^{-G(t)} h(t) \leq e^{-G(t)} h(0)$
donc $h(t) \leq a e^{\int_0^t g(s) ds}$

Or $\varphi(t) \leq h(t)$ donc $\varphi(t) \leq a e^{\int_0^t g(s) ds}$
$\varphi(t) \leq a + \int_0^t g(s) \varphi(s) ds$