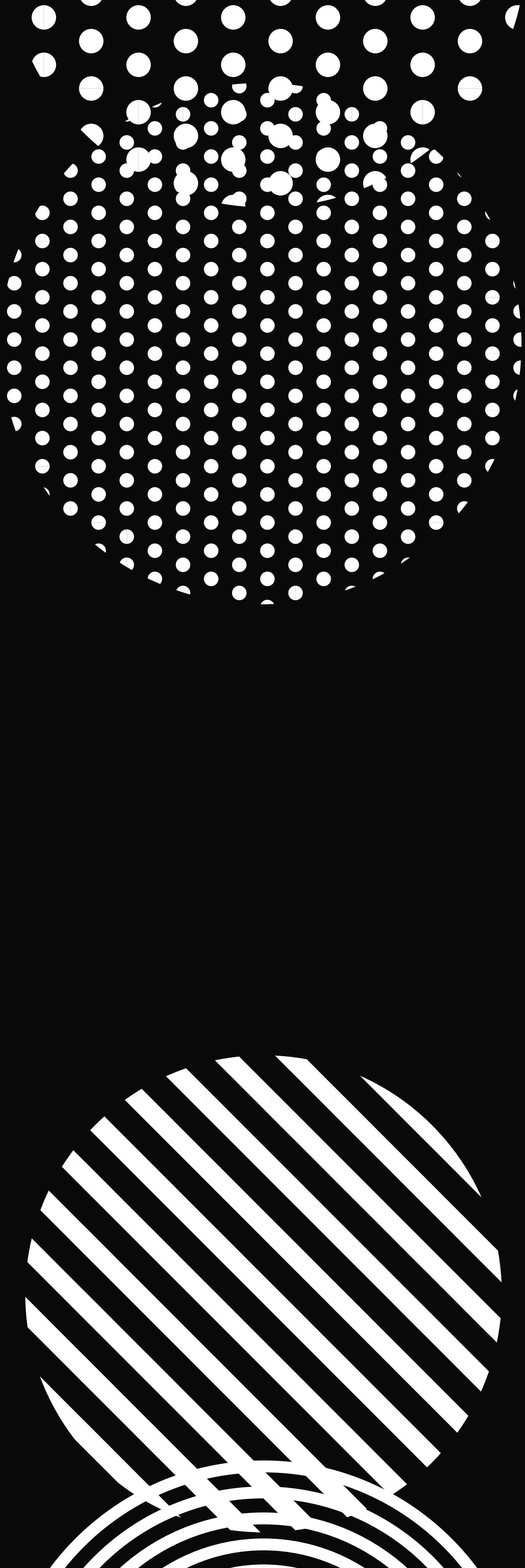

Exercice I.1

a) $y' + 2y = e^t$

$y' = e^t - 2y(t) = f(t, \underbrace{y(t)}_{\in \mathbb{R}})$

avec $f : (\underset{\in \mathbb{R}}{t}, \underset{\in \mathbb{R}}{x}) \longmapsto e^t - 2x$

On cherche (J, y) tq $\forall t \in J$, $\underbrace{y'(t) = e^t - 2y(t)}_{= f(t, y(t)) \in \mathbb{R}}$ (1)

$g(x) = f(t, x) - f(t, 0) = -2x$

$y'(t) = g(y(t)) = -2y(t)$ (2)

On dit que (2) est l'équation homogène associée à (1)

② On veut résoudre (2) $y' = -2y$

L'ensemble des solutions maximales de cette équation est

$S_H = \{ t \mapsto c e^{-2t}, \ c \in \mathbb{R} \}$

③ Utiliser l'information sur S_H pour résoudre (1)

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1

Soit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction donnée par $w(t) = e^{2t} y(t)$

On a $w'(t) = e^{2t} y'(t) + 2e^{2t} y(t)$

$= e^{2t} (y' + 2y(t))$

Donc $(\mathbb{R}, y)$ est une solution de (1) ssi $w'(t) = e^{2t} e^t = e^{3t}$

Or les solutions de $w'(t) = e^{3t}$ sont les fonctions

$w(t) = \int_0^t e^{3s} ds + C$ $C \in \mathbb{R}$ quelconque

$\left[\frac{e^{3s}}{3} \right]_0^t = \frac{e^{3t}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

D'où il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $w(t) = \frac{e^{3t}}{3} + C$

Donc $(\mathbb{R}, y)$ est une solution de (1) ssi

$$y(t) = e^{-2t} v(t) \quad \text{avec} \quad w(t) = \frac{e^{3t}}{3} + c$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{ (\mathbb{R}, t \mapsto c e^{-2t} + \tfrac{1}{3} e^{t}), \ c \in \mathbb{R} \}$$

6. ① $y' = t + 5y(t)$

② $y' = t + 5x - t = 5x$

$y' = 5x$

$y'(t) = 5y(t)$

$\mathcal{S} = \{ t \mapsto c e^{5t}, \ c \in \mathbb{R} \}$

③ $w(t) = e^{-5t} y(t)$

$w'(t) = e^{-5t} y'(t) - 5 e^{-5t} y(t)$

$$= e^{-5t} \underbrace{(y'(t) - 5y(t))} = e^{-5t} t$$

$y(t) = v(t) e^{s(t)}$

$$\int e^{-5t} t = uv - \int -\tfrac{1}{5} e^{-5t} = -\tfrac{t}{5} e^{-5t} - \tfrac{1}{25} e^{-5t} + \tfrac{1}{25} + C$$

$\underline{u} = t \qquad v = -\tfrac{1}{5} e^{-5t}$

$u' = 1 \qquad \underline{v'} = e^{-5t}$

$w(t) = -\tfrac{t}{5} e^{-5t} - \tfrac{1}{25} e^{-5t} + \tfrac{1}{25} + C$

$y(t) = -\tfrac{t}{5} - \tfrac{1}{25} + \dfrac{e^{5t}}{25} + C e^{5t}$

$= C_1 e^{5t} - \tfrac{t}{5} - \tfrac{1}{25} \qquad \text{pour} \quad C_1 \in \mathbb{R}$

Exercice 1.2

1.

a. ① $y' - ty = t^3$

$y' = ty + t^3$

$f(t,y)$

② $y' = ty + t^3 - t^3 = ty$

$y' = ty$

$\frac{y'}{y} = t$

$\ln|y| = \frac{t^2}{2} + c_1$

$|y| = e^{\frac{t^2}{2}} + c_2$

③ $v(t) = y(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$

$= e^{-\frac{t^2}{2}} y'(t) - y(t)\ t\ e^{-\frac{t^2}{2}}$

$= e^{-\frac{t^2}{2}}(y' - ty(t)) = e^{-\frac{t^2}{2}} t^3$

$v\ -e^{-\frac{t^2}{2}}$

u t^2 v' $te^{-\frac{t^2}{2}}$

u' $2t$

$[-t^2e^{-\frac{t^2}{2}}] - 2\int -t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$

$= -t^2e^{-\frac{t^2}{2}} - 2[e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^t$

$= -t^2e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} + 2 + C = v(t)$

$y(t) = -t^2 - 2 + C_1 e^{\frac{t^2}{2}}$

2.

a. ① $y' + \frac{1}{t}y = 3\cos(2t)$

$y' = 3\cos(2t) - \frac{1}{t}y$

② $y' = 3\cos(2t) - \frac{1}{t}y - 3\cos(2t) = -\frac{1}{t}y$

$y' = -\frac{1}{t}y$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{t}$

$\ln|y| = -\ln t + C_1$

$$|y| = \frac{k}{t}$$

$$S = \{ t \mapsto \frac{k}{t} \}$$

$$w(t) = t\,y(t)$$

$$w'(t) = t\,y'(t) + y(t)$$

$$= t\,(y'(t) + \frac{1}{t} y) = 3t \cos(2t)$$

$$\frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$\int_0^t 3t \cos(2t)\,dt = \left[\frac{3}{2}\sin(2t)\right]_0^t - \int_0^t \frac{3}{2}\sin(2t)$$

$$3$$

$$= \frac{3}{2}\sin(2t) + \left[\frac{3}{4}\cos(2t)\right]_0^t$$

$$= \frac{3}{2}\sin(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4} + c$$

$$y(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\sin(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4} + c\right)$$