



Exercice 1

1. $Ax_1 \leq b$
 $x_1 \geq 0$

$$Ax_2 \leq b$$
$$x_2 \geq 0$$

2. $Ax = \alpha Ax_1 + (1-\alpha)Ax_2$

$$\leq \alpha b + (1-\alpha)b = b(\alpha + 1-\alpha) = b$$

3. $\alpha, 1-\alpha$ positives

4. Par définition

Exercice 2

1. $x_0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in]0,1[$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1$

2. $f(x_0) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_p f(x_p) \leq \alpha_1 f(x_m) + \dots + \alpha_p f(x_m)$

$$= f(x_m)(\alpha_1 + \dots + \alpha_p)$$
$$= f(x_m)$$

3. Or x_0 est optimal i.e. $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in P$

et $f(x_m) \geq f(x_0)$

donc x_m est optimal. Par déf. de $f(x_m)$
 x_m est un des sommets.

4. Supposons que

$x^{(1)}, \dots, x^{(q)}$ sont des points optimaux
avec $x^{(1)}, \dots, x^{(q)} \in \{x_1, \dots, x_p\}$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_q = 1$

$$f\left(\sum \lambda_i x^{(i)}\right) = f(x^{(i)}) \sum \lambda_i = f(x^{(i)})$$

donc la comb. convexe est bien
un optimum

Exercise 3

$$2. x = \alpha y + (1-\alpha)z$$

$$y \neq z$$

$$3. b = Ax = \alpha \underbrace{Ay}_b + (1-\alpha) \underbrace{Az}_{b'}$$

$$y \in P$$

$$\text{et } z \in P$$

$$Ay \in b \quad \text{et } Az \in b$$

$$\begin{array}{l} b = Ay \\ b = \sum y_j A^j \\ = \sum y_{v_k} A^{v_k} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} b = Az \\ b = \sum z_j A^j = \sum z_{v_k} A^{v_k} \end{array} \right.$$