



Soit $v, u \in E$, par définition du produit scalaire

$$\begin{aligned} \forall z, \alpha \quad & \langle u + ze^{-i\alpha}v, u + ze^{-i\alpha}v \rangle \\ &= \|u\|^2 + ze^{-i\alpha}\langle v, u \rangle + ze^{-i\alpha}\overline{\langle v, u \rangle} + z^2 \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2z \operatorname{Re}(e^{-i\alpha}\langle u, v \rangle) + z^2 \|v\|^2 \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

On peut choisir α de telle sorte que $e^{-i\alpha}\langle u, v \rangle = |\langle u, v \rangle|$

donc en choisissant tel α , on a

$$(*) = \|u\|^2 + 2z |\langle u, v \rangle| + z^2 \|v\|^2 \geq 0$$

Ce qui n'est possible qu'à condition que

$$2^2 |\langle u, v \rangle|^2 - 4 \|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$$

$$= \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}_R^2(\mathbb{N})$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}_R^2(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |\lambda f + \mu g|^2 &\leq \sum_{i=0}^n |\lambda|^2 |f|^2 + 2|\lambda||\mu| |f||g| + |\mu|^2 |g|^2 \\ &= |\lambda|^2 \sum_{i=0}^n |f_i|^2 + |\lambda||\mu| \sum_{i=0}^n 2|f_i||g_i| + |\mu|^2 \sum_{i=0}^n |g_i|^2 \\ &\leq |\lambda|^2 \sum_{i=0}^n |f_i|^2 + |\lambda||\mu| \sum_{i=0}^n |f_i|^2 + |g_i|^2 + |\mu|^2 \sum_{i=0}^n |g_i|^2 \\ &= |\lambda|^2 \sum_{i=0}^n |f_i|^2 + |\lambda||\mu| \left(\sum_{i=0}^n |f_i|^2 + \sum_{i=0}^n |g_i|^2 \right) + |\mu|^2 \sum_{i=0}^n |g_i|^2 \end{aligned}$$

(Chaque des composante converge car $f_n, g_n \in \mathcal{C}_R^2(\mathbb{N})$)

