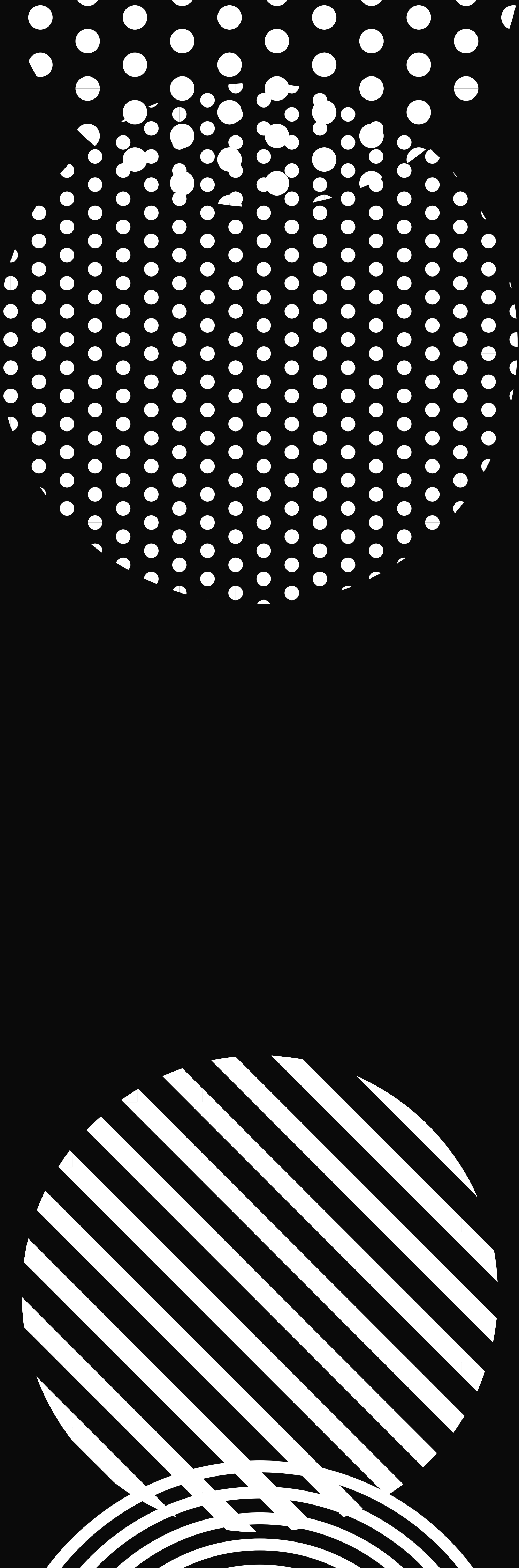

Un peu de théorie

H_0: "$\mu=0$" , H_1: "$\mu=1.5$"

R une région. Si T (une v.a.) $\in R$, on rejette H_0

- $\alpha := P_{H_0}(T\in R)$ erreur de première espèce
- $\beta := P_{H_1}(T\notin R)$ erreur le seconde espèce.

La puissance de test $1-\beta = P_{H_1}(T\in R)$

Exercice 1

On pose $\mu_0=0$ et $\mu_1=1.5$

Pose $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ (sous H_0, $\bar{X}\sim\mathcal{N}(0,\frac{v}{n})$, donc $T\sim\mathcal{N}(0,1)$)

La statistique de test T prend des plus grands valeurs sous H_1 que sous H_0.

On choisit une région de rejet de la forme $R=\{T>c\}$

Déterminer c tq $P_{H_0}(T>c)=\alpha=0.1$

$1-P(T\leq c)=\alpha \iff P(T\leq c)=1-\alpha$

Donc $c=\mu_{1-\alpha}$, où $\mu_{1-\alpha}$ est quantile d'ordre $1-\alpha$.

Conclusion: on rejette H_0 si $T>\mu_{1-\alpha}$

b. $\bar{x}=1$, $T=\dfrac{1-0}{\sqrt{\frac{100}{25}}} = \underset{\overset{\shortparallel}{0.5}}{\dfrac{5}{10}} \leq \mu_{0.9}\simeq 1,28$

On conserve H_0

c. On cherche $P_{H_1}(T\leq\mu_{1-\alpha})$ (H_1 = "$\bar{X}\sim\mathcal{N}(\mu_1,\frac{V}{n})$")

$$\iff P_{H_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}}\leq\mu_{1-\alpha}\right)$$

$$\iff P_{H_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sqrt{\frac{V}{n}}}\leq\mu_{1-\alpha}-\frac{\mu_1-\mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}}\right)$$

Application numérique

$$F\left(1.28-\frac{1.5-0}{\sqrt{\frac{100}{25}}}\right)=F\left(1.28-\frac{1.5}{2}\right)=F(1.28-0.75)=F(0.53)\simeq 0.7$$

2. $v = 9$

Exercice 2

1. Y prend des plus grandes valeurs sous $\mathcal{H}_1$

On cherche c tq $P_{H_0}(T > c) = \alpha$ $\qquad 0 < \alpha < 1 \Rightarrow c \in [0, \theta]$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - \underbrace{F(c)}_{P(Y \leq c)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - \left(\frac{c}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow c = 2(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$$

2. Si $\alpha = 0.1$ et $n = 5$,

$$c = 2(0.9)^{\frac{1}{5}} = 1{,}96$$

$Y = 1.98 > c = 1.96$ donc on rejette H_0.

erreur $= \alpha = 0.10$

3. On accepte. Erreur non-calculable $P_{H_1}(Y \leq c)$ dépend de θ non-conn.

4. On considère $\theta > 2$ H_1

$$\beta :]2, +\infty[\longrightarrow [0, 1]$$
$$\theta \longmapsto \beta(\theta) = P_{H_1}(Y \leq c) = F(c)$$

Or, $c = 2(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ et $\alpha \in]0, 1[$. Donc $0 < c < 2 < \theta$

On en conclut $\beta(\theta) = F(c) = \left(\frac{c}{\theta}\right)^n$