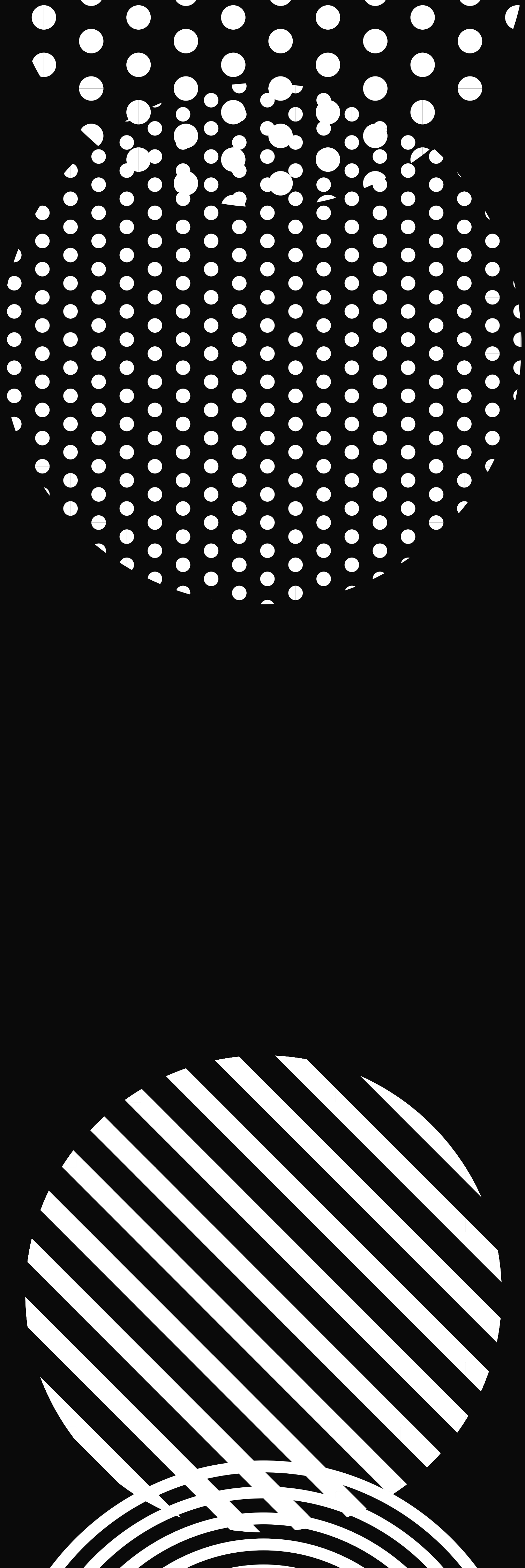

Exercice 1

1. Soit n le nombre de piles et X la durée de vie en heure de la pile i, les X_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S_n} \sim Student(n-1)$$

Notons $t_\alpha(n-1)$ le quantile d'ordre α de la loi Student$(n-1)$

Par définition des quantiles $\mathbb{P}(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le T \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\alpha$

On a les équivalences suivantes

$$t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S_n} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Notons $\mathcal{J}_\alpha = [\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}]$ $\quad t_{\alpha/2}(n-1) = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (car Student symmétrique)

On a obtenu $P(\mu \in \mathcal{J}_\alpha) = 1-\alpha$

2. $n = 100$, $\bar{X} = 158$ $\quad S_n = 30$

Soit $\alpha = 0{,}01$. On relève $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 2{,}62$ $\quad I_{OBS} \approx [150{,}1, 165.9]$

Exercice 2

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)\right]$$

Posons $Z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

Soit $q_\alpha(n)$ quantile d'ordre α de $\chi^2(n)$

$$P(q_{\frac{\alpha}{2}}(n) \le Z_n \le q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) = 1-\alpha$$

$$q_{\frac{\alpha}{2}}(n) \le \frac{\sum(X_i-m)^2}{\sigma^2} \le q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum(X_i-m)^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$$

Posons $I = \left[\frac{\sum_i(X_i-m)^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} ; \frac{\sum_i(X_i-m)^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$

$n = 15$; $\quad m = 12$ $\qquad q_{\frac{\alpha}{2}}(n) = q_{0.025}(15) \approx 6{,}26$

$\qquad q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) = q_{0.975}(15) \approx 27{,}48$

donc $I \approx [9.82 ; 43.13]$

2. $Z_2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$I_2 = \left[\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \; ; \; \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$

$I_2 \approx [10,34 \; ; \; 47.36]$

Exercice 3

$X_i \sim \mathcal{N}(m, \theta^2)$

1. $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sqrt{\theta^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sqrt{\theta^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$ où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de $\mathcal{N}(0,1)$

$\Leftrightarrow P(\bar{X} - \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\theta^2}}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\theta^2}}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$

App numérique $n = 30$; $\bar{x} = 2000$, $\sqrt{\theta^2} = \theta = 300$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,959$ $\quad I_{obs} \approx [1893, 2107]$

2) On pose $S^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$

$T_2 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sqrt{S^2}} \sim$ Student $(n-1)$

<u>App. numérique</u>

$n = 30$, $\bar{X} = 2000$ $\quad S^2 = 300^2$, $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,04$ $\quad I_{2obs} \approx [1888, 2112]$

méthode IC

- Par moyenne :
  - $T = \frac{\sqrt{n}(X - m)}{\sqrt{\theta^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

    ↳ si θ^2 pas connu :

    $T = \frac{\sqrt{n}(X - m)}{\sqrt{S^2}} \sim$ Student $(n-1)$