



Exercice 1

$$F^{-1}(u) = \inf \{ x \in \mathbb{R}, F(x) \geq u \}$$

$= A(u)$

1. m.g. $\forall u \in]0,1[$

$$F(x) \geq u \Leftrightarrow F^{-1}(u) \leq x$$

$\Rightarrow$ On suppose que $F(x) \geq u$

$$\text{alors } x \in A(u) \text{ et } \inf A(u) \leq x$$

$= F^{-1}(u)$

$\Leftarrow$ On suppose que $F^{-1}(u) \leq x$

On prend $\varepsilon > 0$

$$F^{-1}(u) < x + \varepsilon$$

$\exists t$ tq $F^{-1}(u) \leq t < x + \varepsilon$, en particulier, on a que
 $u \leq F(t) \quad (t \in A(u))$

Comme F est croissante (car c'est une F.R.)

$$F(t) \leq F(x + \varepsilon)$$

$$\text{et } u \leq F(t) \leq F(x + \varepsilon)$$

$$\text{et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) = F(x) \geq u$$

2. $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$$X = F^{-1}(U) \quad \text{alors } X \text{ a pour F.d.R. } F.$$

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$$

$$= P(U \leq F(x))$$

$$= F(x)$$

$$\text{car } U \sim \mathcal{U}([0,1])$$

3. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$u = F(x) \quad \forall u \neq 1$$

$$u = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$\Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1 - u)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) \quad \text{mais } P(U=1)=0$$

$$\text{On a donc } F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) \text{ pour } u \neq 1$$

en appliquant la Q2, on a que

$F^{-1}(u) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et on peut générer une observation d'une variable aléatoire exponentielle.

Exercice 2

$$X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{UL}([0, \theta]) \quad \hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases} \quad \tilde{\theta} = \max_{i=1, \dots, n} X_i$$

$$\hat{\theta}_3 = 2\hat{m}, \quad \hat{m} = F_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

1. mq $\hat{\theta} = 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ $F(m) = \frac{1}{2}$ et $F(m) = \frac{m}{\theta}$ pour $m \in [0, \theta]$
donc $\frac{m}{\theta} = \frac{1}{2}$ et $\theta = 2m$

donc $\theta = 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\hat{\theta}_3$ est un estimateur empirique de θ .

2. $\hat{\theta}_1$ on peut appliquer le TCL.

Où $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de moyenne et var. finies.
le TCL donne $\sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$

$\hat{\theta}_2 \rightarrow$ On ne peut pas utiliser le TCL.

On rappelle que $P(\hat{\theta}_2 \leq t) = P(\max_{i=1, \dots, n} X_i \leq t) = F(t)^n$

$$P(\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta) \geq t) = P(\hat{\theta}_2 \geq \theta + \frac{t}{\sqrt{n}})$$

$$= 1 - F\left(\theta + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$= 1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}\theta}\right)^n$, pas de cv. avec $\sqrt{n}$, mais en remplaçant par n , on a $P(n(\hat{\theta}_2 - \theta) \geq t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}\theta}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$
et donc asymptotiquement $\hat{\theta}_2$ suit la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$\hat{\theta}_3$ on admet que pour un quantile empirique α , on a
 $\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{q_\alpha(1-q_\alpha)}{f(q_\alpha)^2}\right)$

On a que $f(q_\alpha) = \frac{1}{\theta}$ (de loi uniforme) donc sa densité vaut $\frac{1}{\theta}$.
si $q_\alpha \in [0, 1]$

donc $\sqrt{n}(\hat{m} - \frac{\theta}{2}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\theta^2\right)$ et $\sqrt{n}(2\hat{m} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$

3. $\hat{\theta}_2$ a la meilleure convergence ($\frac{1}{n}$), donc on le préfère aux autres
et $\hat{\theta}_1$ a une variance asymptotique plus faible que $\hat{\theta}_2$, donc on le préfère.

Exercice 3

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}$$

$$\text{mq } \text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n} (F(\min(x, y)) - F(x)F(y))$$

$$\text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = -E[\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)] + E[\hat{F}_n(x)] E[\hat{F}_n(y)]$$

$$E[\hat{F}_n(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}]$$

$$= E[\mathbb{1}_{\{x_1 \leq x\}}]$$

$$= P(x_1 \leq x)$$

$$= F(x)$$

$$E[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} E[\mathbb{1}_{\{x_i \leq x, x_j \leq y\}}]$$

$$\text{on regarde } E[\mathbb{1}_{\{x_i \leq x, x_j \leq y\}}] \quad \text{si } i=j$$

$$E[\mathbb{1}_{\{x_i \leq \min(x, y)\}}] = F(\min(x, y)) \quad \text{si } i \neq j, \text{ on a}$$

$$\text{par l'indépendance } E[\mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}} \mathbb{1}_{\{x_j \leq y\}}] = E[\mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}] E[\mathbb{1}_{\{x_j \leq y\}}] \\ = F(x)F(y)$$

$$E[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] = \frac{1}{n^2} (n F(\min(x, y)) + n(n-1) F(x)F(y))$$

$$= \frac{1}{n} F(\min(x, y)) + \frac{n-1}{n} F(x)F(y)$$

$$\text{et } \text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n} F(\min(x, y)) + \frac{n-1}{n} F(x)F(y) - F(x)F(y)$$

$$= \frac{1}{n} F(\min(x, y)) - \frac{1}{n} F(x)F(y)$$