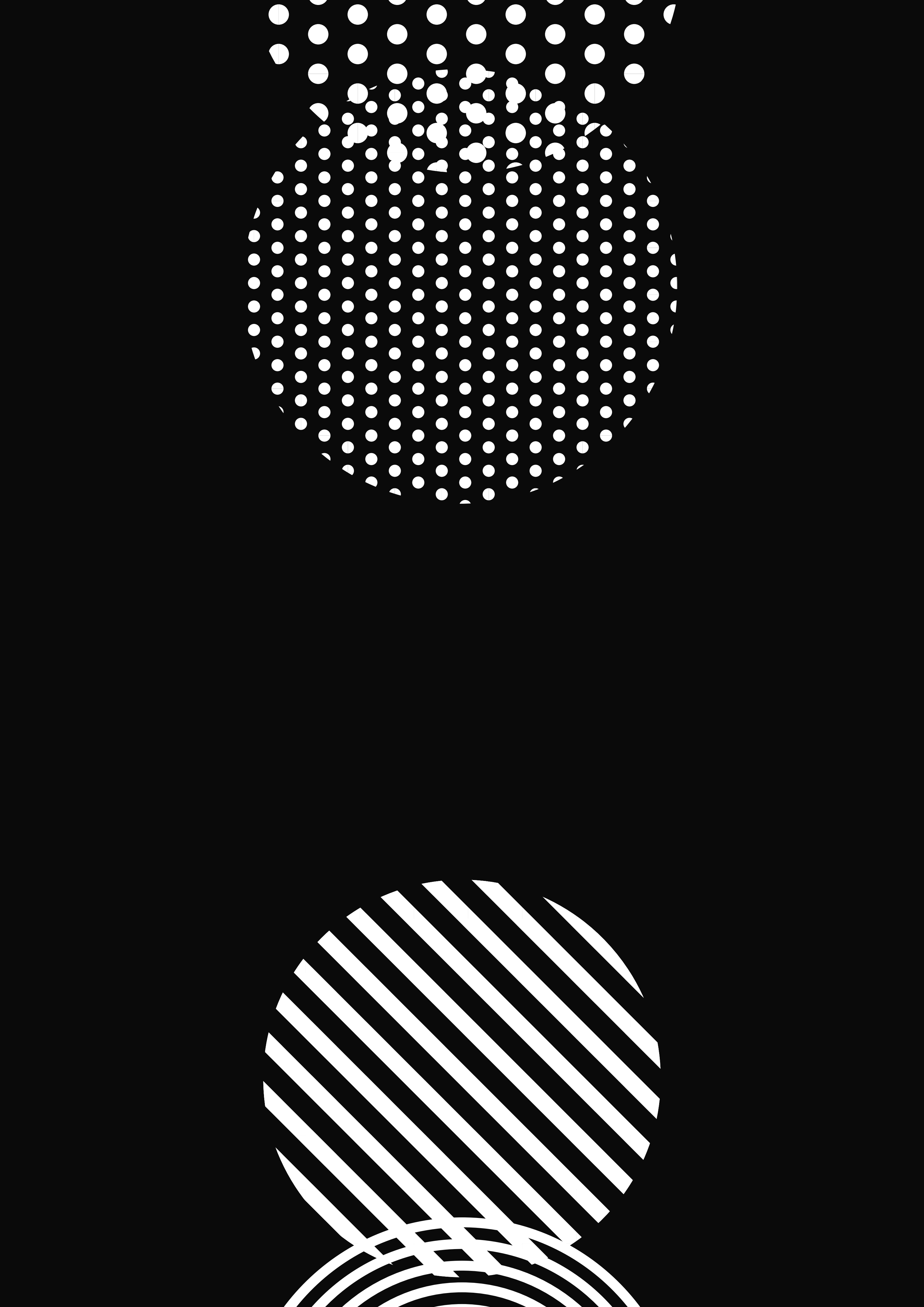

Exercice I

1. $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| - \theta\right)$

$$= \frac{\sum |X_i| - n\theta}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

$2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$ par TCL.

2. On pose $Z_i = X_i^2$, les Z_i sont i.i.d

$- E[Z_i] = 2\theta^2$

$- Var(Z_i) = E[Z_i^2] - E[Z_i]^2 = 24\theta^4 - 4\theta^4 = 20\theta^4$

$\hat{m}_2$ est bien la moyenne empirique des Z_i d'espérance $2\theta^2$ et de variance $20\theta^4 < +\infty$

TCL:

$\sqrt{n}(\hat{m}_2 - 2\theta^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 20\theta^4) \Rightarrow \hat{m}_2$ est asymptotiquement normal.

b) On cherche φ tq $\hat{\theta}_n = \varphi(\hat{m}_2) = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$

On doit vérifier:

- φ est définie et dérivable
- $\varphi'(E[\hat{m}_2]) \neq 0$:
- $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ et $\varphi'(E[\hat{m}_2]) = \varphi'(2\theta^2) = \frac{2}{2\sqrt{4\theta^2}} = \frac{1}{4|\theta|} = \frac{1}{4\theta} > 0$

On peut appliquer la méthode delta:

$\sqrt{n}\left(\varphi(\hat{m}_2) - \varphi(2\theta^2)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \varphi'(2\theta^2)^2\, 20\theta^2)$

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{5\theta^2}{4})$

$\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal.

Exercice 2

1) $\mu = E[X] = \frac{q}{1-q}$

$\mu(1-q) = q \Leftrightarrow \mu = q(1+\mu) \Leftrightarrow q = h(\mu)$, $h = x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{x}{1+x}$

Ainsi $\hat{q}_n = h(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X}_n}{1+\bar{X}_n}$

2) Les variables X_i sont i.i.d., intégrables ($E[X_n] = \mu < +\infty$)

$LGN \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mu$

(la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$

LAC: $h(\bar{X}_n) = \hat{q}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} h(\mu) = q$

Donc $\hat{q}_n$ est consistant.

3) Les variables $(X_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. d'espérance $\mu = \frac{q}{1-q}$ et de variance $\frac{q}{(1-q)^2} < +\infty$. On applique le TCL

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{q}{1-q}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{q}{(1-q)^2}\right)$$

Vérifions la hypothèse de la méthode delta pour h:

- h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
- $h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \Rightarrow h'(\mu) \neq 0$

On peut appliquer la méthode

$$\sqrt{n}\left(h(\bar{X}) - h(\mu)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, h'(\mu)^2 \frac{q}{(1-q)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}(\hat{q}_n - q) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, q(1-q)^2)$$

$\hookrightarrow h'(\mu)^2 \frac{q}{(1-q)^2} = (1-q)^4 \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = q(1-q)^2$

La variance de la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{q}_n - q)$ est $q(1-q)^2$

4) Soit $L_1(q)$ la vraisemblance de X_1.

$L_1(q) = (1-q)q^{X_1}$

$\ell_1(q) = \ln(1-q) + X_1 \ln(q)$

$\ell_1'(q) = -\frac{1}{1-q} + \frac{X_1}{q} = \frac{X_1}{q} - \frac{1}{1-q}$

Soit $I_1(q)$ info de Fischer d'une seule observation (X_i):

$$I_1(q) = V(\ell_i'(q)) = V\left(\frac{X_i}{q} - \frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{q^2} V(X_i) = \frac{1}{q(1-q)^2}$$

$$\mathcal{I}_n(q) = \sum_{i=1}^{n} I_i(q) = n\,\mathcal{I}_1(q) = \frac{n}{q(1-q)^2}$$

la borne de Cramer-Rao est de $BCR = \frac{1}{I_n(q)} = \frac{q(1-q)^2}{n}$

Or, d'après la question précédente, la loi asymptotique de $\hat{q}_n$ est $\mathcal{N}\left(q, \frac{q(1-q)^2}{n}\right)$ la variance de cette loi atteint la borne de Cramer-Rao: $\hat{q}_n$ est asymptotiquement efficace.