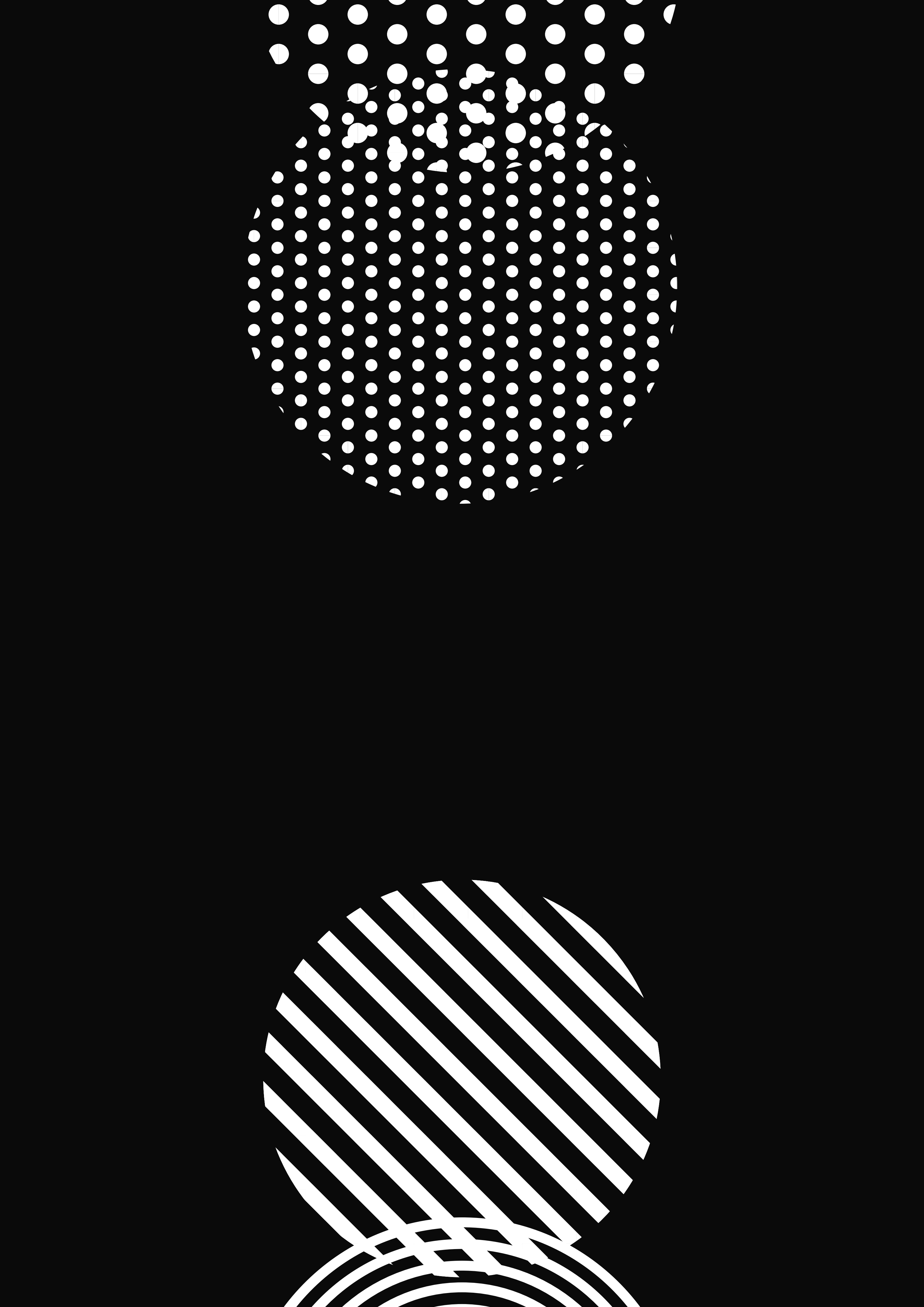

Exercice 1.

1. La loi de S_n sous H_0 : S_n est une somme de v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{B}(p_0)$
$\Rightarrow S_n \sim \mathcal{B}(n, p_0)$

"Sous H_1 : $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, $p > p_0$"

L'esperance de X est p qui $\nearrow$ sous H_1 (par rapport à H_0), on cherche donc le plus grand c tq

$P(S_n > c) \leq \alpha$

$\Leftrightarrow P_{H_0}(S_n \leq c) \geq 1-\alpha$

$\Leftrightarrow F(c) \geq 1-\alpha$

donc $c = 5$

3) $n=10$, $\alpha = 0.05$, $p = 0.3$

On cherche le plus grand c tq : $F_{\mathcal{B}(10, 0.3)}(c) \geq 0.95$

$1 - F(5) = P_{H_0}(S_n > 5) \simeq 0,0473 < 0.05$

$\hookrightarrow$ Le niveau de test

4. Sous H_0, TCL : $\dfrac{\overline{X_n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ où $\overline{X_n}$ est une moyenne empirique de v.a. iid d'esperance p_0 variance $\frac{p_0(1-p_0)}{n} < +\infty$

S_n est une somme de v.a. i.i.d l'esperance np_0 et de variance $n(p_0(1-p_0)) < +\infty$

On peut appliquer le TCL :

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np_0, np_0(1-p_0))$$

$$\Leftrightarrow \overline{X_n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$

$$\frac{\overline{X_n} - p}{\left[\frac{p_0(1-p_0)}{n}\right]^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

On cherche c : $P_{H_0}(S_n > c) = \alpha$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > \frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{\overline{X_n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > \frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{\overline{X_n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \leq \frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = 1-\alpha$$

$$\frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = qnorm_{1-\alpha} \Leftrightarrow c = (qnorm_{1-\alpha})\sqrt{np_0(1-p_0)} + np_0$$

Exercice 2

1. On prend l'estimateur des moments $\hat{\theta} = \bar{X}_n$

Les X_i sont i.i.d., $E[X_n] = \theta$ $V(X_i) = \theta^2 < +\infty$

Par le TCL : $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

2. Sous H_1, $\hat{\theta}$ sera en moyenne plus petit que sous H_0.

Ainsi, on rejette H_0 quand $\hat{\theta}$ est petit, on a une région de rejet de la forme $\{\hat{\theta} < C_\alpha\}$

3. Sous H_0 : $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\theta_0, \frac{\theta_0^2}{n})$

$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\theta_0/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Ne dépend que des données de θ_0

$P_{H_0}(T < c) = \alpha$

Asymptotiquement, $t_\alpha = q_\alpha$

Ainsi, on rejette H_0 ssi $T < q_\alpha$
$\Leftrightarrow \hat{\theta} < \theta_0$ tq $\frac{\theta_0}{\sqrt{n}} =: C_\alpha$

4. La région de rejet et de la forme

$\{\hat{\theta} < C_1\} \cup \{\hat{\theta} > C_2\}$

Pour déterminer C_1 et C_2

$$P_{H_0}(\hat{\theta} < C_1 \cup \hat{\theta} > C_2) = P_{H_0}(\hat{\theta} < C_1) + P_{H_0}(\hat{\theta} > C_2) = \alpha$$
$\Leftrightarrow P_{H_0}(\hat{\theta} < C_1) = \frac{\alpha}{2}$ et $P(\hat{\theta} > C_2) = \frac{\alpha}{2}$
$\Leftrightarrow C_1 = \theta_0 + q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta_0}{\sqrt{n}}$ et $C_2 = \theta_0 + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta_0}{\sqrt{n}}$

On rejette H_0 ssi $\hat{\theta} < C_1$ ou $\hat{\theta} > C_2$
$\Leftrightarrow T < q_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $T > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\Leftrightarrow T < -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $T > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\Leftrightarrow |T| > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Ex si $\alpha = 0.05$, $q_{0,975} \simeq 1.96$

On rejette H_0 ssi $|T| > 1.96$