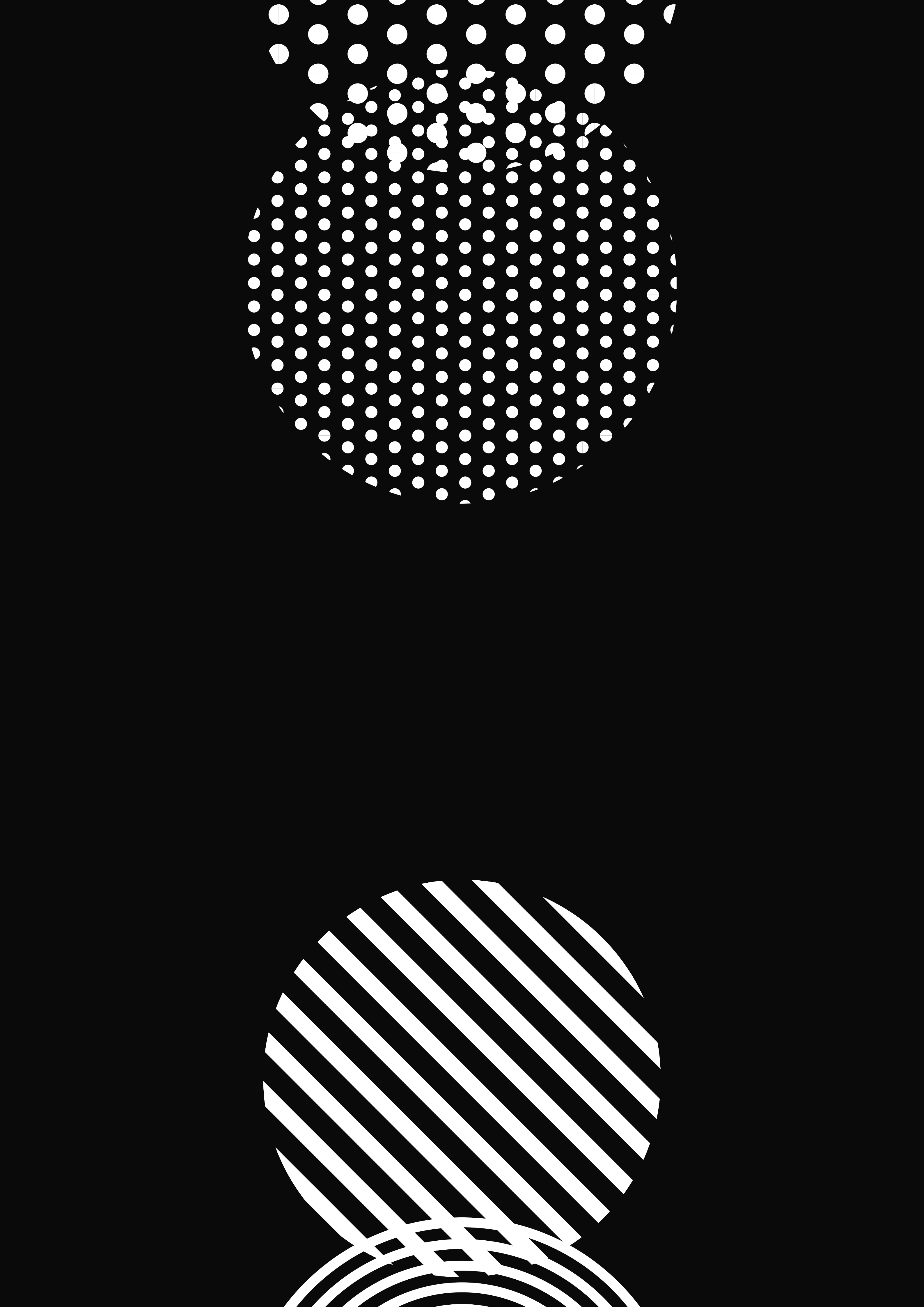

Exercice 1

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right] - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[t\sin(nt) + \frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(0 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

b) On a trouvé $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$ $(*)$

De plus, on a par Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n^2+b_n^2)$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^2}{3}$$

Par ce calcul et $(*)$, on remplace :

$$\frac{\pi^2}{3} = 0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(0^2 + \left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{4}{n^2} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

Par conséquent $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2 Théorème de Fejer

$$I = [-\pi,\pi], \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)$$

a) Soit $f \in L^1_{2\pi}$ $\quad S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ donc $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_I D_n(y)f(x-y)\,dy$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\, e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,dt \qquad \text{On pose } x-y=t \Leftrightarrow x-t=y$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-y)e^{iky}(-dy)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-y)\overbrace{\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}}^{=D_n(y)}dy \qquad \text{puis par } 2\pi \text{ périodicité}$$

On pose $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_I K_n(y)f(x-y)\,dy$

$$= \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_I D_k(y)f(x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x)$$

D'où $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$

Puisque tous les S_k sont des ... trigonométriques, σ_n est aussi un .... trigonométriques.

b) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \sum_{k\in[\![1-n,n]\!]\setminus\{0\}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = 2\pi + \underbrace{\sum_{k\in[\![1-n,n]\!]\setminus\{0\}} \left[\frac{e^{ik\pi}}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = 2\pi$$

$e^{ik\pi} = e^{-ik\pi}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi = 2\pi$$

c) $D_n(x) = e^{inx}e^{-inx}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx}$

$$= e^{-inx}\,\frac{1-(e^{ix})^{(n+\frac{1}{2})2}}{1-e^{ix}} \quad (*)$$

$\frac{\cancel{e^{-inx}}\,\cancel{e^{inx}}\,\cancel{e^{i\frac{x}{2}}}}{\cancel{e^{i\frac{x}{2}}}} = 1$

$$= e^{-inx}\,\frac{(e^{ix})^{(n+\frac{1}{2})}}{e^{i\frac{x}{2}}}\left[\frac{(e^{-ix(n+\frac{1}{2})} - e^{ix(n+\frac{1}{2})})/2i}{(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})/2i}\right]$$

$$= \frac{\sin(-x(n+\frac{1}{2}))}{\sin(-\frac{x}{2})} = \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{x}{2})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x(n+\frac{1}{2})}{\frac{x}{2}}$$

$D_n(0) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i0} = 2n+1$ Donc la formule tient aussi en 0 $[2\pi]$ en prolongeant par continuité.

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}}{e^{ix}-1} \quad \text{par } (*)$$

$$= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\left[e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx}\right]$$

$$= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\left[e^{ix}\left(\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right) - \frac{e^{inx}-1}{e^{i(n-1)x}(e^{ix}-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{n(e^{ix}-1)^2}\left[e^{ix}(e^{inx}-1) - \underbrace{(e^{inx}-1)[e^{-i(n-1)x}]}_{e^{ix}-e^{-i(n-1)x}}\right]$$

$$= \frac{e^{ix}}{n(e^{ix}-1)^2}\left[e^{inx}-1-1+e^{-inx}\right]$$

$$= \frac{1}{n\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\right)}\left[\frac{e^{inx}-2+e^{-inx}}{-4}\right] = \frac{1}{n\sin(\frac{x}{2})^2}\sin(nx/2)^2$$

d) Soit $\delta \in]0,\pi[$ fixé.

$$\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 dx$$

Si $x \in J\setminus[-\delta,\delta]$, $|x| \in]\delta,\pi] \Rightarrow \frac{|x|}{2} \in]\frac{\delta}{2},\frac{\pi}{2}]$

Or sin croiss. sur $]\frac{\delta}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})^2} < \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})^2}$

et $\sin(\frac{nx}{2})^2 < 1$, donc

$$\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x)\,dx \le \frac{1}{n}\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})^2}\,dx$$

$$\le \frac{\lambda(J\setminus[-\delta,\delta])}{n\sin(\frac{\delta}{2})^2}$$

$$0 \le \int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x)\,dx \le \frac{2(\pi-\delta)}{n\sin(\frac{\delta}{2})^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \checkmark$$

e) Soit $\delta \in]0,\pi[$

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_J K_n(y)(f(x-y))\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_J K_n(y)f(x)\,dy$$

d'où $\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_J K_n(y)[f(x-y)-f(x)]\,dy \qquad J = J\setminus[-\delta,\delta] \sqcup [-\delta,\delta]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]} K_n(y)[f(x-y)-f(x)]\,dy$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(y)[f(x-y)-f(x)]\,dy$$

f) Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Soit $\varepsilon > 0$, f continue sur le compact $[-\pi,\pi]$, donc par thm de Heine, elle est uniformément continue sur $[-\pi,\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Soit $\delta \in]0,\pi[$ tel que, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $|u-v| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$

En choisissant $v := x$ et $u := x-y$, on obtient :

$$|y| < \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

De plus, f est continue sur le compact $[-\pi,\pi]$, donc bornée par une constante M. D'où :
$|f(x-y) - f(x)| \le |f(x-y)| + |f(x)| \le 2M$ (2)

par (d) : on peut trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \ge N$, (3)
$0 \le \int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(y)\,dy \le \frac{\pi}{M}\frac{\varepsilon}{2}$

D'où $\forall n \ge N$ $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \le \left|\frac{1}{2\pi}\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(y)(f(x-y)-f(x))\,dy\right.$ par e)
$$\left.+ \frac{1}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]} K_n(y)(f(x-y)-f(x))\,dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,dy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,dy$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{J\setminus[-\delta,\delta]} K_n(y)\,2M\,dy \quad \text{par } (2)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]} K_n(y)\,\frac{\varepsilon}{2}\,dy \quad \text{par } (I)$$
$$\leq \frac{M}{\pi}\left(\frac{\pi}{M}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\underbrace{\|K_n\|_{L_1}}_{=2\pi}$$
par $\vec{(3)}$.

$$=\varepsilon$$

Donc $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

g] $g\in L^2_{2\pi}$

Soit $(f_n)_n\in(C^0_{2\pi})^{\mathbb{N}}$ tq $\|f_n-g\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\|\sigma_n(g)-g\|_2\leq\|\sigma_n(g)-\sigma_n(f_k)\|_2+\|\sigma_n(f_k)-f_k\|+\|f_k-g\|_2$ où $k\in\mathbb{N}$ à choisir.

- $f_k-g \xrightarrow[L^2_{2\pi}]{} 0$
- $\sigma(f_k)-f_k \xrightarrow[L^2_{2\pi}]{n\to+\infty} 0$ par (f)

et $(\sigma_n(g)-\sigma_n(f_k))(x)=\frac{1}{2\pi}\int_J K_n(y)[g(x-y)-f_k(x-y)]\,dy$

$\|\sigma_n(g)-\sigma_n(f)\|_2\leq\frac{1}{2\pi}\left\|\int_J K_n(y)(g(x-y)-f_k(x-y))\,dy\right\|_2$

$$\|S_n(f)\|_2^2=\left\|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_J e^{iky}f(x-y)\,dy\right\|_2$$
$$=\left\|\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}c_k(f)\right\|_2 \text{, par pythagore}$$
$$=\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2\underbrace{\|e^{ikx}\|_2}_{=1}$$
$$\leq\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2\leq\|f\|_2^2 \quad \text{par l'inégalité de Bessel.}$$

D'où
$$\|\sigma_n(f)-\sigma_n(g)\|_2\leq\frac{1}{2\pi}\left\|\int_J(g-f_k)(x-y)K_n(y)\,dy\right\|_2$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\int_J(g-f_k)(x-y)D_j(y)\,dy\right\|_2$$
$\to S_j\cdot(g-f_k)$ $\leq\|f_k-g\|_2$

h] On vient de montrer que pour tout $g\in L^2_{2\pi}$, il existe un polynôme trigonométrique $\sigma_n(g)$ approchant d'aussi près g.

D'où $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale dans $L^2_{2\pi}$

□