Exercice 5

$I = [0,1]$ $\quad H = L^2_{\mathbb{R}}(I)$; PS usuel

$F = \{ f \in H ; \int_I f \, d\lambda(t) = \int_{[0,\frac{1}{2}]} f \, dt = 0 \}$

a) $\phi_{h_1} : H \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad f \longmapsto \langle f, h_1 \rangle$ $\quad$ où $h_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$

$h_2 := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$

$\phi_{h_2} : f \longmapsto \langle f, h_2 \rangle$

ϕ_{h_1} et ϕ_{h_2} sont deux applications linéaires continues, de plus

$$F = \underbrace{\underbrace{\phi_{h_1}^{-1}(\{0\})}_{\text{s.e.v fermé}} \cap \underbrace{\phi_{h_2}^{-1}(\{0\})}_{\text{s.e.v fermé}}}_{\text{s.e.v fermé}}$$

2) $F = \{ f \in H : \langle f, h_1 \rangle = 0 \} \cap \{ f \in H : \langle f, h_2 \rangle = 0 \}$

On pose $G = \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$, on a $F = G^\perp$ Ainsi,

$F^\perp = (G^\perp)^\perp = G$ car $\dim G = 2 < +\infty$ et G s.e.v

Donc h_1, h_2 forme une base de $F^\perp$

3) On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

h_1 : $\|h_1\|^2 = \int_I \mathbb{1}_{[0,1]}^2(t) dt = 1$ donc on pose

$f_1 = h_1$

$\langle f_1, h_2 \rangle = \int_I \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t) \, dt$
$= \int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}$

$\tilde{f}_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$

$\|\tilde{f}_2\|^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t) - 2 \underbrace{\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t) \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)}_{=0} + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t) \, dt$

$= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1 \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 \, dt \right) = \frac{1}{4}$ donc $\|\tilde{f}\| = \frac{1}{2}$

D'où $f_2 = \frac{\tilde{f_2}}{\|\tilde{f_2}\|} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$

Calcule du projeté orthogonale $u(t)=t$

$\langle u, f_1\rangle f_1 + \langle u, f_2\rangle f_2$:

$\langle u, f_1\rangle = \int_0^1 t\, \mathbb{1}_{[0,1]}\, dt = \frac{1}{2}$

$\langle u, f_2\rangle = \int_0^1 t\,(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]})\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{4}$

On obtient :

$\pi_{F^\perp}(u) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \frac{1}{4}(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]})$

$= \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$

$d(u,F)^2 = \|u - \pi_F(u)\|^2 = \|\pi_{F^\perp}(u)\|^2$

$= \int_I \left(\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}\right)^2 dt + \int_I \left(\frac{3}{4}\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}\right)^2 dt$

$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{16}$

et finalement $d(u,F) = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Exercice 3

$\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$

$\Phi_p : \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto u_p$

1. Forme : ✓

Linéaire : Si $u, v \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\Phi_p(u+\lambda v) = (u+\lambda v)_p = u_p + \lambda v_p$

$= \Phi_p(u) + \lambda\, \Phi_p(v)$

Continuité : $c = 1$?

Soit $u \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$, $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 > |u_p|^2 = u_p^2$

$|\Phi_p(u)| \leq \|u\|$ donc Φ_p est continue, de norme ≤ 1 ;

Soit $v = (0, \dots, 0, \underset{p^{\text{ème}}}{1}, \underset{\text{terme}}{0} \dots)$

$\|v\|^2 = 1 \Rightarrow \|v\| = 1$ $\quad \phi_p(v) = 1$ donc $|\phi_p(v)| = \|v\|$,

d'où $|||\phi_p||| = 1$

2. $C = \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \cap \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ $\quad$ Convexe, fermé, non-vide ?

$0_{\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})} \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$

* Fermé : $C = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \underset{\text{lin. continue}}{\phi_p}^{-1}(\underbrace{[0, +\infty[}_{\text{fermé}})$

* Convexe :

$u, v \in C$, $\lambda \in [0,1]$

$\lambda u + (1-\lambda) v \in C$

$\Rightarrow$ e.v $\Rightarrow \lambda u + (1-\lambda) v \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ donc $\lambda \underbrace{u_n}_{\geq 0} + (1-\lambda) \underbrace{v_n}_{\geq 0} \geq 0$

$\lambda, (1-\lambda) \geq 0$

Donc convexe.

<u>Exercice 3</u>

$\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ $\qquad C = \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \cap \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

3) Soit $u = (u_n) \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$

Candidat : $w_n := \max(0, u_n)$

On a $\sum_{i=0}^{+\infty} w_n^2 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_n^2$ qui est finie $(w_n) \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$

On va vérifier que pour tout $v \in C$, on $\langle u - w, v - w \rangle \leq 0$,

$\langle u - w, v - w \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} (u_i - w_i)(v_i - w_i) = 0$. si $u_i < 0$, $(u_i - w_i)(v_i - w_i) \underset{\leq 0}{= u_i \cdot v_i}$

puisque $u_i = 0$, puisque $v_i \geq 0$. Donc en sommant, on a $\langle u - w, v - w \rangle \leq 0$.

Exercice 4

Boud' zdarove