



Exercice 2

1. i) tout élément de L_w appartient à L
ii) e.v.

i) Soit $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Or } \forall t \in J \quad w(t) \geq 1 \quad \text{donc} \quad \forall t \in J \quad |f(t)|^2 w(t) \geq |f(t)|^2$$

$$\text{d'où} \quad \int_J |f(t)|^2 d\lambda(t) \leq \int_J |f(t)|^2 w(t) d\lambda(t) < +\infty$$

$$\text{d'où} \quad f \in L^2_{\mathbb{R}}(J) \quad \text{donc} \quad L^2_{\mathbb{R}}(J, w) \subset L^2_{\mathbb{R}}(J)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \|f + \lambda g\|_w^2 &= \int_J |f(t) + \lambda g(t)|^2 w(t) d\lambda(t) \\ &\leq \int_J (|f(t)|^2 + \lambda^2 |g(t)|^2) w(t) d\lambda(t) \\ &\leq \underbrace{\int_J |f(t)|^2 w(t) d\lambda(t)}_{< +\infty} + \lambda^2 \underbrace{\int_J |g(t)|^2 w(t) d\lambda(t)}_{< +\infty} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f + \lambda g \in L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$$

donc $L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ est bien un sous-espace vectoriel de $L^2_{\mathbb{R}}(J)$

$$\|f\|_w = \left(\int_J |f|^2 w d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\int_J |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Soient $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_w &= \int_J f(x) g(x) w(x) d\lambda(x) \\ &\leq \int_J |f(x)| |g(x)| w(x) d\lambda(x) \\ &\leq \int_J \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} w(x) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_J |f(x)|^2 w(x) d\lambda(x) + \frac{1}{2} \int_J |g(x)|^2 w(x) d\lambda(x) < +\infty \end{aligned}$$

Or les deux intégrales sont finies car
 f et g appartiennent à $L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$
donc cette application est bien définie.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_w &= \int_J f(x) g(x) w(x) d\lambda(x) \\ &= \int_J g(x) f(x) w(x) d\lambda(x) \\ &= \langle g, f \rangle_w \quad \text{donc} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_w \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$

$$\begin{aligned} \langle f + \lambda g, h \rangle_w &= \int_J (f(x) + \lambda g(x)) h(x) w(x) dx \\ &= \int_J f(x) h(x) w(x) dx + \lambda \int_J g(x) h(x) w(x) dx \\ &= \int_J f(x) h(x) w(x) dx + \lambda \int_J g(x) h(x) w(x) dx \\ &= \int_J f(x) h(x) w(x) dx + \lambda \int_J g(x) h(x) w(x) dx \\ &= \langle f, h \rangle_w + \lambda \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

$$\langle f, f \rangle_w = \int_J f(x)^2 w(x) dx \geq 0 \quad \text{car} \quad \forall x \in J \quad f(x)^2 \geq 0 \text{ et } w(x) \geq 0$$

De plus $\int_J f(x)^2 w(x) dx = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x)^2 w(x) &= 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{car} \quad f(x)^2 w(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x)^2 &= 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{car} \quad w(x) \geq 1 \quad \forall x \in J \\ \Leftrightarrow f(x) &= 0 \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

D'où $\langle f, f \rangle_w = 0 \Leftrightarrow f = 0$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ est bien un produit scalaire euclidien bien définie.

3. $(L^2_{\mathbb{R}}(J, w), \|\cdot\|_w)$ est un espace pré-hilbertien car sa norme est issue d'un produit scalaire. Donc il nous reste à montrer que cet espace est complet.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k, l \geq N \quad \|f_k - f_l\|_w < \varepsilon$$

Or $L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ est un s.e.v de $L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ qui est un espace de Hilbert, donc $\exists g \in L^2_{\mathbb{R}}(J)$ tq $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g$

$$\text{i.e.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|f_n - g\|_2 < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, donc on trouve $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ associé, soit $n \geq N_\varepsilon$

$$\|f_n - g\|_2^2 = \int_J |f_n(x) - g(x)|^2 dx < \varepsilon$$

$$\int \limsup f_n w dx \leq \limsup \underbrace{\int f_n w dx}_{< +\infty}$$

donc $u_n = \int f_n w dx$ est une suite dans $\mathbb{R}$ qui est complet

donc $\int g w d\lambda < +\infty$ donc $g \in L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ donc $L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$ est Hilbert.

4) On suppose que $J =]-1, 1[$, $\forall x \in J$ $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int |t|^k w(t) d\lambda(t) < +\infty$

$$\begin{aligned} \int |t|^k w(t) d\lambda(t) &= \int |t|^k \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} d\lambda(t) \\ &\leq \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} d\lambda(t) \quad \text{car } \forall t \in J \quad |t|^k \in [0, 1] \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= [\arcsin(|t|)]_{-1}^1 \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} - \arcsin(1) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow -1} \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \end{aligned}$$

Donc c'est bien un exemple.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$

i.e $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad t_q$

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

$$\begin{aligned} \int |P(X)|^2 w(t) d\lambda(t) \\ &= \int |a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0|^2 w(t) d\lambda(t) \\ &\leq \int (|a_n t^n| + \dots + |a_1 t| + |a_0|)^2 w(t) d\lambda(t) \\ &\leq \int (|a_n t^n| + \dots + |a_1 t|)^2 w(t) d\lambda(t) + \\ &2 \int (|a_n t^n| + \dots + |a_1 t|) |a_0| w(t) d\lambda(t) + \\ &\underbrace{\int |a_0|^2 w(t) d\lambda(t)}_{< +\infty} \end{aligned}$$

Vérifions

$$\begin{aligned} \int (|a_n t^n| + \dots + |a_1 t|)^2 w(t) d\lambda(t) + \\ 2 \int (|a_n t^n| + \dots + |a_1 t|) |a_0| w(t) d\lambda(t) + \end{aligned}$$

Par récurrence, supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ $\forall a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$a_n X^n + \dots + a_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(J, w)$$

Montrons que cela reste vrai pour $n+1$

$$\int_{\mathbb{J}} (|a_{n+1} z^{n+1}| + |a_n z^n| + \dots + |a_0|)^2 w(t) d\lambda(t)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{J}} |a_{n+1} z^{n+1}|^2 w(t) d\lambda(t) \\ &+ 2 \int_{\mathbb{J}} |a_{n+1} z^{n+1}| (|a_n z^n| + \dots + |a_0|) w(t) d\lambda(t) \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{J}} (|a_n z^n| + \dots + |a_0|)^2 w(t) d\lambda(t)}_{< +\infty \text{ par HR}} \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{J}} |a_{n+1} z^{n+1}|^2 w(t) d\lambda(t) + \int_{\mathbb{J}} |a_{n+1} z^{n+1}| w(t) d\lambda(t) < +\infty \text{ par hyp}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{J}} |a_{n+1} z^{n+1}| (|a_n z^n| + \dots + |a_0|) w(t) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{J}} (|a_{n+1} a_n z^{2n+1}| + \dots + |a_{n+1} a_0 z^{n+1}|) w(t) d\lambda(t) \\ &= \underbrace{|a_{n+1} a_n| \int_{\mathbb{J}} |z^{2n+1}| w(t) d\lambda(t)}_{< +\infty} + \dots + \underbrace{|a_{n+1} a_0| \int_{\mathbb{J}} |z^{n+1}| w(t) d\lambda(t)}_{< +\infty} \end{aligned}$$

Donc $a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{J}, w)$ donc par récurrence on a montré que $\mathcal{R}[X] \subset L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{J}, w)$

5) M_n est une matrice de Gram des vecteurs $1, \dots, z^n$

$$\text{Soit } \underbrace{(a_0, \dots, a_n)}_{=: \vec{a}} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$p(t) = a_0 1 + \dots + a_n z^n$$

$$\begin{aligned} \vec{a}^T M_n \vec{a} &= \vec{a}^T \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle_{\mathbb{J}} a_0 + \langle 1, z \rangle_{\mathbb{J}} a_1 + \dots + \langle 1, z^n \rangle_{\mathbb{J}} a_n \\ \vdots \\ \langle z^n, 1 \rangle_{\mathbb{J}} a_0 + \langle z^n, z \rangle_{\mathbb{J}} a_1 + \dots + \langle z^n, z^n \rangle_{\mathbb{J}} a_n \end{pmatrix} = \vec{a}^T \begin{pmatrix} \int 1 \cdot 1 w(t) d\lambda(t) a_0 \\ \vdots \\ \int 1 \cdot z^n w(t) d\lambda(t) a_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\int 1 a_0^2 w(t) d\lambda(t) + \int 1 z a_0 a_1 w(t) d\lambda(t) + \dots + \int 1 z^n a_0 a_n w(t) d\lambda(t) \right) \\ &+ \dots + \left(\int z^n a_0 a_n w(t) d\lambda(t) + \dots + \int z^n z^n a_n a_n w(t) d\lambda(t) \right) \\ &= \langle p(t), p(t) \rangle_w = \int |p(t)|^2 w(t) d\lambda(t) \\ &= \int (a_0^2 1 + a_1 z a_0 + \dots + a_n a_n z^n + (a_0 z a_1 + a_1 z^2 + a_2 z^2 a_1 + \dots + a_n z^n a_1) \\ &+ \dots + (a_0 z a_n + \dots + a_n z^n a_n)) w(t) d\lambda(t) > 0 \quad \forall p \neq 0 \end{aligned}$$

Donc M_n est définie positive, donc toutes ses valeurs propres sont non nulles (positives). Or le déterminant et le produit des valeurs propres donc $\Delta_n \neq 0$.

$$\text{6) } p_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}} \quad p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}} \left(1 \cdot \begin{vmatrix} m_1 & \dots & m_n \\ \vdots & & \vdots \\ m_n & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} m_0 & m_2 & \dots & m_n \\ \vdots & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} + \dots \right)$$

Soit $P_n(t) = \sum_{j=0}^n a_j^n t^j$ donc $a_0^n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}} \begin{vmatrix} m_1 & \dots & m_n \\ \vdots & & \vdots \\ m_n & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix}$ etc.

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle P_n, X^k \rangle_w &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^n a_j^n t^j \right) t^k w(t) \lambda(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=0}^n a_j^n t^{j+k} w(t) \lambda(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^n a_j^n \int_0^1 t^{j+k} w(t) \lambda(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^n a_j^n m_{j+k} \end{aligned}$$

c) Supposons que $k < n$

$$\langle P_n, X^k \rangle_w = \sum_{j=0}^n a_j^n m_{j+k} \quad \text{si } k=n \quad \sum_{j=0}^n a_j^n m_{j+n} = \Delta_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}} = \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}}$$

Si $m < n$ alors

$$\sum_{j=0}^n a_j^n m_{j+k} = \begin{vmatrix} m_0 & \dots & m_n \\ \vdots & & \vdots \\ m_k & \dots & m_{k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & \dots & m_{2n-1} \\ m_k & \dots & m_{k+n} \end{vmatrix} = 0$$

d) Soit $k < n$

$$\langle P_n, P_k \rangle = \sum_{j=0}^k a_j^n \langle P_n, t^j \rangle = 0$$

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{j=0}^n a_j^n \langle P_n, t^j \rangle$$

$$= a_n^n \langle P_n, t^n \rangle$$

$$= a_n^n \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} = \frac{\Delta_{n-1}}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}} = \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}}}{\sqrt{\Delta_n}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}} = 1.$$

Donc P_n est bien une famille orthonormée sur $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}, w)$

Exercice 3

1. $a \in \mathbb{R} \quad g \in L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$

$$f(x) = a + \int_{[0,x]} g(t) d\lambda(t)$$

O₁ $g \in L^2_{\mathbb{R}}([0,1]) \quad \int_{[0,1]} g(t)^2 d\lambda(t) < +\infty$

$$\text{donc } \int_{[0,1]} g(t) d\lambda(t) < +\infty$$

Si on pose $C = \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |g(t)|$

$$\begin{aligned} \text{alors } & \left| \int_{[0,x+h]} g(t) d\lambda(t) - \int_{[0,x]} g(t) d\lambda(t) \right| \\ &= \left| \int_{[x,x+h]} g(t) d\lambda(t) \right| \leq C |x+h-x| = Ch \end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \int_{[0,x]} g(t) d\lambda(t)$ est lipschitzienne donc continue.

Alors f est continue sur $[0,1]$. De plus

$$f(0) = a + \int_{[0,0]} g(t) d\lambda(t) = a \quad \text{car } [0,0] \text{ est la mesure nulle.}$$

2) Soit $h \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ Donc $\forall x \in [0,1]$

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t) d\lambda(t)$$

O₂ h continue sur $[0,1]$ donc h admet une valeur pour $h(1)$ donc h' est intégrable sur $[0,1]$, de plus $h' \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ car $[0,1]$ est bornée et h' continue. Donc $h \in H'$ donc

$$C^1([0,1], \mathbb{R}) \subset H'$$

D'après 1) $H' \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ donc il nous reste à montrer que H' est un espace vectoriel.

Soient $f_1, f_2 \in H'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ qui sont définies comme suit:

$$f_1(x) = a_1 + \int_{[0,x]} g_1(t) d\lambda(t)$$

$$f_2(x) = a_2 + \int_{[0,x]} g_2(t) d\lambda(t)$$

$$f_1 + \lambda f_2(x) = a_1 + a_2 + \int_{[0,x]} g_1(t) + \lambda g_2(t) d\lambda(t)$$

O₂ $L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ est un espace vectoriel, $g_1 + \lambda g_2 \in L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$

donc $f_1 + \lambda f_2 \in H'$ donc c'est bien un s.e.v. de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

3] Soient $h, f, g \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_{[0,1]} \mathcal{D}(f)(t) \mathcal{D}(g)(t) d\lambda(t)$$

$$\int_{[0,1]} \mathcal{D}(f)(t) \mathcal{D}(g)(t) d\lambda(t) \leq \int_{[0,1]} \frac{\mathcal{D}(f)^2 + \mathcal{D}(g)^2}{2} d\lambda(t) < +\infty$$

Donc cette application est bien définie.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f(0)g(0) + \int_{[0,1]} \mathcal{D}(f)(t) \mathcal{D}(g)(t) d\lambda(t) \\ &= g(0)f(0) + \int_{[0,1]} \mathcal{D}(g)(t) \mathcal{D}(f)(t) d\lambda(t) \\ &= \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

Donc cette application est symétrique

$$\begin{aligned} \langle f + \lambda g, h \rangle &= (f(0) + \lambda g(0))h(0) + \int_{[0,1]} \mathcal{D}(f + \lambda g)(t) \mathcal{D}(h)(t) d\lambda(t) \\ &= f(0)h(0) + \lambda g(0)h(0) + \int_{[0,1]} \mathcal{D}(f)(t) \mathcal{D}(h)(t) d\lambda(t) + \lambda \int_{[0,1]} \mathcal{D}(g)(t) \mathcal{D}(h)(t) d\lambda(t) \\ &= f(0)h(0) + \lambda g(0)h(0) + \int_{[0,1]} \mathcal{D}(f)(t) \mathcal{D}(h)(t) d\lambda(t) + \lambda \int_{[0,1]} \mathcal{D}(g)(t) \mathcal{D}(h)(t) d\lambda(t) \\ &= \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

Donc cette application est bilinéaire.

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + \int_{[0,1]} f(t)^2 d\lambda(t) \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 = f(0)^2 + \int_{[0,1]} f(t)^2 d\lambda(t)$$

$$\Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

Donc c'est bien un produit scalaire.

6] $\mathcal{H}^1$ muni ce produit scalaire qui nous donne la norme suivante:

$$\forall f \in \mathcal{H}^1, \quad \|f\| = \sqrt{f(0)^2 + \int_{[0,1]} f(t)^2 d\lambda(t)}$$

Donc c'est un espace pré-Hilbertien.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{H}^1$

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, \ell \geq N \quad \|f_k - f_\ell\| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, donc on trouve N associée, soit $k, \ell \geq N$

$$\|f_k - f_\ell\|^2 = |a_k - a_\ell|^2 + \int_{[0,1]} (g_k(t) - g_\ell(t))^2 d\lambda(t) < \varepsilon$$

$$(*) \quad \text{Donc } |a_k - a_\ell|^2 < \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} |g_k(t) - g_\ell(t)|^2 d\lambda(t) < \varepsilon$$

Donc on introduit deux suites: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$
 $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$

de la façon que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], f_n(x) = a_n + \int_{[0,x]} g_n(t) dt$

D'après (*) ces deux suites sont des suites de Cauchy.
Or $\mathbb{R}$ et $L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ sont des espaces complets, donc
 $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R} \quad g_n \rightarrow g \in L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$

donc $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \in \mathcal{H}^1$ tq $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = a + \int_{[0,x]} g(t) dt$

Donc toute suite de Cauchy admet une limite dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$
donc c'est bien un espace de Hilbert.

Exercice 4