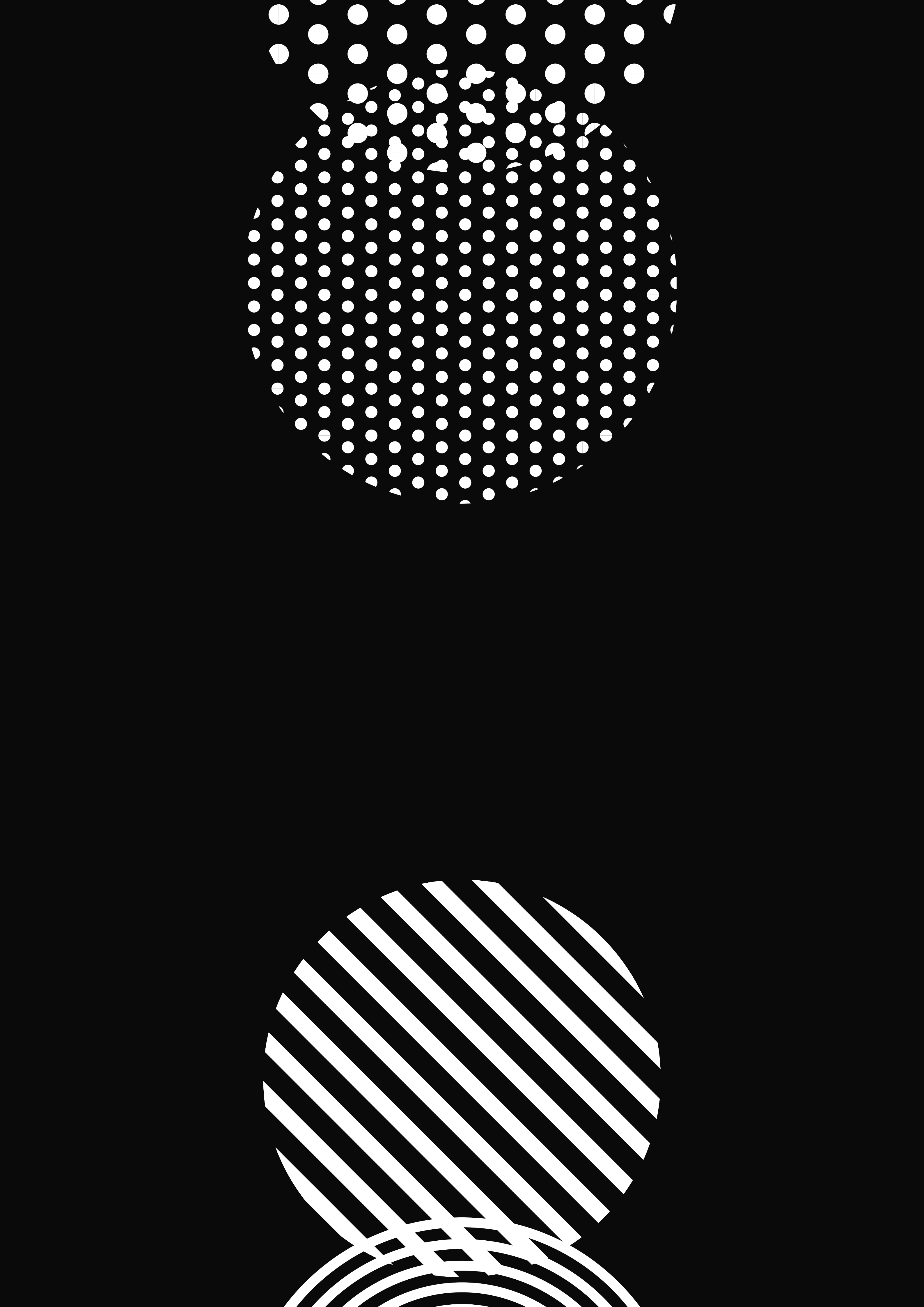


2, 3, 4, 5, 8

Exercice 2

Si A est symmetrique réelle, elle est diagonalisable

$\longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda I_2$ où $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$\leadsto A = \lambda I_2$

- $A(t)$

On peut parametriser les v.p. de $A(t)$ avec leur fonctions continues $\lambda_1(t)$ $\lambda_2(t)$

Il peut arriver que $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$

Exercice 3

$x \mapsto \langle x, y \rangle_M$ anti linéaire

et $y \mapsto \langle x, y \rangle$ linéaire

$x^* M y = \overline{y^* M x}$ car M hérmitienne

$y^* M x = M^* y x = M y x$

$x^* M y = M^* x y = M x y$

$\left.\begin{array}{l} x^* M x \geq 0 \\ \text{et } x^* M x = 0 \Leftarrow x = \vec{0} \end{array}\right\}$ car M défini positive

$B = A$

$\langle x, x \rangle_M \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

Sol prof: $\overline{\langle x, y \rangle_M} = \overline{{}^t x M y} = {}^t \bar{x} \bar{M} \bar{y} = {}^t({}^t \bar{x} \bar{M} \bar{y}) = {}^t \bar{y} \underset{M}{\bar{M}} \bar{x} = \langle y, x \rangle_M$

$$x^* \mathcal{M} A y = (Bx)^* \mathcal{M} y$$

$$= x^* B^* \mathcal{M} y \qquad = x^* \mathcal{M} A y$$

$$\Leftrightarrow \quad B^* \mathcal{M} = \mathcal{M} A$$

$$\mathcal{M}^{-1} B^* \mathcal{M} = A \qquad \Leftrightarrow \quad \underline{B^* = \mathcal{M} A \mathcal{M}^{-1}}$$

$$B^* \mathcal{M}^* = \mathcal{M} A$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{M} B)^* = \mathcal{M} A$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{M} A)^* = \mathcal{M} B$$

<u>Exercice 4</u>

$$\langle x, y \rangle_{A^{-1}} = x^* A^{-1} y \qquad = x^* P \mathcal{D} P^{-1} y$$

$$\langle x, By \rangle_{A^{-1}} = x^* A^{-1} B y \qquad\qquad x^* A y$$

$=$

$$\langle B^* x, y \rangle = x^* B A^{-1} y \qquad\qquad AB = BA$$

AB

$$(AB)^* x \qquad x^* A B A^{-1} y \quad = x^* A^{-1} A B y$$

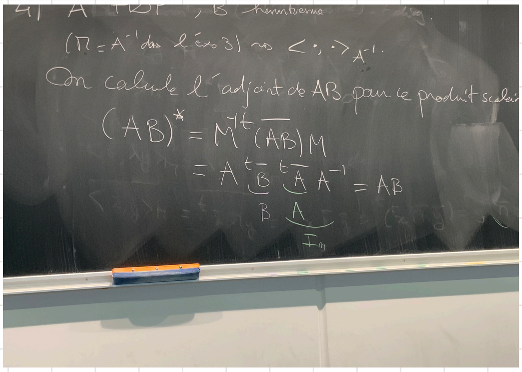
$\mathcal{M} = A^{-1}$ dans l'exo 3 $\rightsquigarrow \langle \cdot , \cdot \rangle_{A^{-1}}$

$$\langle x, ABy \rangle = x^* A^{-1} A B y \quad = x^* B y$$

$$\langle Cx, y \rangle = x^* C^* A^{-1} y$$

D'après 3) $\quad A A B A^{-1} \quad = C^*$

$$C^* = (A^*)^{-1} B^* A^* A^*$$



5) $(AB)^* x$ $\quad x^* ABA^{-1} y = x^* A^{-1} AB y$

$\cancel{\langle x, ABy\rangle_{A^{-1}} = \langle (AB)^* x, y\rangle_{A^{-1}}}$

$\cancel{x^* A^{-1} (AB) y = x^* (AB) A^{-1} y}$

$\cancel{CC^* = C^* C}$

A diagonalisable

Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres tq

$A_i e_i = \lambda_i e_i \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$

Tout $x \in \mathbb{C}^n$ se décompose $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i$ (dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ pas canonique)

$Ax = \sum \lambda_i x_i y$

$\langle Ax, y\rangle = \sum \bar{\lambda}_i \bar{x}_i y_i$

La matrice adjointe doit satisfaire

$\forall x, y \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \Rightarrow A^*(\sum y_i e_i) = \sum \bar{\lambda}_i y_i e_i$

on calcule:

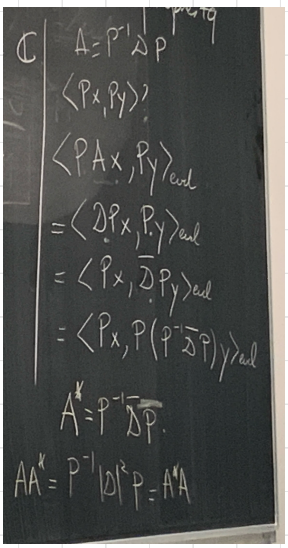
$A^* A(\sum x_i e_i) = A^*(\sum \lambda_i x_i e_i)$

$= \sum \bar{\lambda}_i (\lambda_i x_i) e_i$

$= \sum |\lambda_i|^2 x_i e_i$

$AA^*(\sum x_i e_i) = A(\sum \bar{\lambda}_i x_i e_i)$

$= \sum |\lambda_i|^2 x_i e_i$



Exercice 8

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ HDP $\qquad P \in \mathbb{C}^{N \times n}$ de rang n.

$|P^* A P| \neq 0$

$\ker P^* A P = \{0\}$

$P^* A P x = 0$

$\Leftrightarrow$

$\langle P^* A P x, x\rangle = \langle APx, Px\rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$ car P de rang n.

TD 4
fin ex 8

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ HDP $\qquad P \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$ de rang 1

$P^* A P \neq 0$

Si $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \langle P, AP\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = 0$

Spectre $A = \{-1, 1\}$

Exos : 6, 7, 9

Exercice 6

$A = (c_1 \; c_2)$ où $c_1 = f(e_1) \qquad c_2 = f(e_2)$

$= (f(e_1) \; f(e_2))$

dans $(e_2, e_1) \qquad A = (f(e_2), f(e_1)) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$(f(e_1), f(e_2))_{(e_1, e_2)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$(f(e_1), f(e_2))_{(e_2, e_1)} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$(f(e_2), f(e_1))_{(e_2, e_1)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

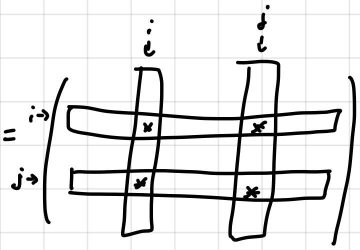
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$$

révisez : A commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc laisse invariants ses sous-espaces propres $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

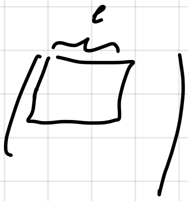
Exercice 7

$$\lambda_1(A) = \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{C}^n}} \langle x, Ax \rangle$$

$A =$ 

$$B = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\ 0 \cdots 0\ 1\ 0}}^{\ell} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & 0 \cdots & & \\ & & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array} \Big\} n \end{array}$$

si B sous matrice 

donc $P = \begin{pmatrix} I_\ell \\ 0 \end{pmatrix}$

$P^* = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{|J|} \oplus \mathbb{R}^{n-|J|}$$
$$\mathbb{R}^{|J|} \cong \mathbb{R}^\ell \qquad \mathbb{R}^{n-|J|} \cong \mathbb{R}^{n-\ell}$$

$P : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\cong \mathbb{R}^{|J|} \xrightarrow{\text{"inclusion"}} \mathbb{R}^n$

$$\lambda_1(B) = \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^\ell \\ \|y\|=1}} \langle y, P^*APy \rangle = \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^\ell \\ \|y\|=1}} \langle Py, APy \rangle$$

Remarque : $\|Py\| = \|y\|$

$\{Py : y \in \mathbb{C}^\ell \ \|y\|=1\} \subset \{x : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1\}$

$\hookrightarrow \geq \lambda_1(A)$

S'il existe un s.e.v $F \subset \mathbb{C}^\ell$ de dimension k telle que $\forall y \in F, \langle By, y \rangle \leq C\|y\|$ alors on peut faire pareil que A.

$k=1$: s'il existe $y \in \mathbb{C}^l \setminus \{0\}$

(1) $\langle By, y\rangle \leq C\|y\|^2$

$\rightsquigarrow \exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ $\langle Ax, x\rangle^2 \leq C\|x\|^2$

$x := Py$ est non nul et $\langle APy, Py\rangle = \langle By, y\rangle$
et $\|Py\| = \|x\|$

cas général : $F' = P(F)$ s.e.v de dimension k

$$\forall x \in F', \quad \langle Ax, x\rangle \underset{\substack{\exists y \in F \\ x = Py}}{=} \langle APy, y\rangle = \langle By, y\rangle \leq C\|y\|^2 = C\|x\|^2$$

(2) Si B admet k v.p $\leq C$, on peut trouver des vecteurs propres base orthonormée de B : $f_1, \dots, f_k$ tq $\langle Bf_i, f_i\rangle \leq C\|f_i\|^2$ $\forall i = 1, \dots, k$

$F := \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ $\forall x \in F$, $\langle Bx, x\rangle \leq C\|x\|^2$ (vérifier)

- $F' = P(F) \xrightarrow[(1)]{} \forall x \in F', \langle Ax, x\rangle \leq C\|x\|^2$ $\dim(F') = k$

Si A n'admet pas k v.p. $\leq C$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de v.p. de A

$x = \sum x_i e_i \longrightarrow \langle Ax, x\rangle = \sum_{i<k} \lambda_i(A) x_i^2 + \sum_{i \geq k} \lambda_i(A) x_i^2$

je pose $V = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$: $\dim(V) = n-k+1$

$\forall x \in V$, $\langle Ax, x\rangle \geq \lambda_k \|x\|^2 > C\|x\|^2$

$\dim V + \dim F' > \dim \mathbb{C}^n \Rightarrow V \cap F' \neq \{0\}$

Pour conclure : $C = \lambda_i(B)$, B admet i v.p. $\leq C \underset{(2)}{\Rightarrow} A$ admet i v.p. $\leq C$

$\Rightarrow \lambda_i(A) \leq C (= \lambda_i(B))$

Exercice 12

$$F(x)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{-2i\pi kj}{n}} x_j$$

$$\|F(x)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |F(x)_k|^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} \underbrace{e^{\frac{-2i\pi kj}{n}} x_j \overbrace{e^{\frac{+2i\pi kj'}{n}} \overline{x_{j'}}}^{\text{on conjugue}}}_{e^{\frac{2i\pi(j'-j)k}{n}} x_j \overline{x_{j'}}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} x_j \overline{x_{j'}} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi(j'-j)}{n} k} \right)}_{n\,\delta_{j=j'}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{x_j}\, n = \|x\|^2$$

Exercice 10

$$F(x)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{-2i\pi k j}{n}} x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{-2ik\pi j}{n}} \left(\frac{e^{\frac{2i\pi j}{n}} + e^{\frac{-2i\pi j}{n}}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{\pm} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{-2\pi(k\pm 1)j}{n}}}_{\substack{=n \text{ si } k\pm 1 = 0 \pmod n \\ =0 \text{ sinon}}}$$

$$= \frac{n}{2\sqrt{n}} \left(\delta_{k+1=n} + \delta_{k-1=0} \right) = \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\delta_{k-1=0} + \delta_{k=n-1} \right)$$

Exercice 9

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

supposons que A commute avec T i.e.

$AT = TA$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \\ a_{N,1} & & a_{N,N} \end{pmatrix}$ $\quad AT = \begin{pmatrix} a_{1,N} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{2,N} & \cdots & a_{2,1} \end{pmatrix}$

Sol prof :

A commute avec T

$\iff$

A est une matrice cumulante

$\left(A = \sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k \quad (A \in \mathbb{C}[T])\right) \quad T^N = I_N$

$\Uparrow$: $TA = \sum a_k T T^k = \sum a_k T^k T = AT$

$\Downarrow$: Quelle est la dimension (de s.e.v) de : $\{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : AT = TA\} := C_A$

Quelle est la dimension de $\mathbb{C}[T] = \{\sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k : (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N\}$

$\dim \mathbb{C}[T] = N$ (On a une base donnée par $(T^0, \dots, T^{N-1})$)

$\chi_T = X^N - 1$ (racines simples donc c'est un polynome minimal (de degré N)) $\quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

• $\sum_k a_k T^k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{pmatrix}$ $\quad \langle e_i, \sum a_k T^k e_j \rangle = a_{j-i}$

Si A commute avec T, alors A laisse invariants les sous-espaces propres de T (sont de dimension 1)

donc $A = P^{-1} D P$ P envoie les vecteurs propres de T sur les vecteurs de la base canonique.

$\mathbb{C}[T] \subset C_A$

Exercice 11:

Rq : $Av = a * v$

$$AT = TA \Rightarrow AT^n = T^n A$$

donc $Ae_n = AT^n e_0 = T^n A e_0$
$= (Ae_0) * e_n$

ici $(e_0, \dots, e_{N-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$

$$(Ax)_j = \frac{x_{j-1} + 2x_j + x_{j+1}}{4}$$

$Ax = a * x$ avec

$$a = \frac{1}{4} e_{-1} + \frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{4} e_1$$

$$\mathcal{F}(a)_k = \sum e^{\frac{-2i\pi j k}{N}} a_j$$

$$= \left(\frac{1}{4} e^{\frac{-2i\pi k}{N}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)$$

$$\mathcal{F}(x)_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi j k}{N}} x_j$$

$$\mathcal{F}(a * x)_k = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)}_{\approx 1} \mathcal{F}(x)_k \approx \mathcal{F}(x)_k$$

Si x oscille peu alors $\mathcal{F}(x)$ est concentrées aux basses fréquences ($k \ll N$)

$(Ax)_j$

$y''(x) = f(x)$ sur $[0, 2\pi]$

$x_j = \frac{2\pi j}{N}$ $\quad y_j = f(x_j)$ inconnue

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)$$
$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)$$
$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y''(x)$$
$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2}$$

- $Ax = a * x$

$$a = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2}\left(e_{-1} - 2e_0 + e_1\right)$$

$$\mathcal{F}(a)_k = \frac{1}{(2\pi/N)^2}\left(e^{-\frac{2\pi i k}{N}} - 2 + e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right) = \frac{2}{(2\pi/N)^2}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1\right) = \frac{2}{(2\pi/N)^2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi k}{N}\right)^2\right) = -k^2$$

<u>la fréquence ⟷ dérivée seconde ?</u>