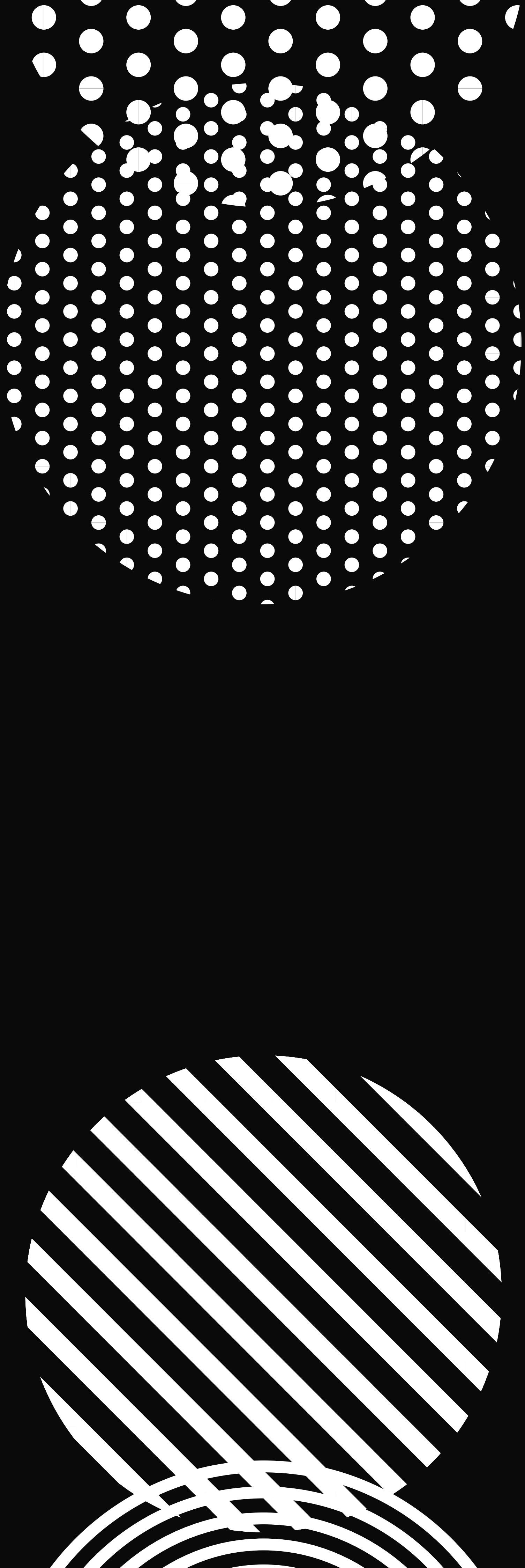

Exercice 1

A, $P = \sum a_k X^k$, $P(A) = \sum_{k\geq 0} a_k A^k$

1. $\mathrm{Spec}(P(A)) = \{ P(\lambda_j) : \lambda_j \in \mathrm{Spec}(A)\}$

$\supseteq$ $\lambda \in \mathrm{Spec}\, A$, $X \in$ v.p. associé $\begin{pmatrix} Ax = \lambda x \\ A^2 x = \lambda^2 x \\ \vdots \\ A^k = \lambda^k x \end{pmatrix}$

donc $P(A)x = \left(\sum_{k\geq 0} a_k \lambda^k\right)x = P(\lambda)x$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

On écrit $A = Q^{-1} A Q$ avec Q inversible et D diagonale.

$P(A) = \sum_{k\geq 0} a_k (Q^{-1} D Q)^k = Q^{-1}\left(\sum_{k\geq 0} a_k D^k\right) Q = Q^{-1} P(D) Q$

$\mathrm{Spec}(P(A)) = \mathrm{Spec}(P(D)) = \{ P(\lambda_i) : \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A)\}$

2. $P(\lambda_i) = Q(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A)$

<u>Mq $P(A) = Q(A)$</u> → intuition ?

$A = U^{-1} D U$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Alors $P(A) = U^{-1} P(D) U = U^{-1} Q(D) U = Q(A)$

$= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) = Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) = Q(\lambda_n) \end{pmatrix}$

• Trouver un contre-exemple si A n'est pas diagonalisable.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $P(0) = Q(0)$ $\quad P = 3X \quad Q = X$

$P(A) = 3A \neq A = Q(A)$

3. Si $A = P^{-1} D P$ et f une fonction, on définit $f(A) = P^{-1} \mathrm{diag}(f(\lambda_i))_i P$

Si $A = P'^{-1} D' P' = P^{-1} D P$

$D' = \mathrm{diag}(\lambda_i') = P' P^{-1} D P P'^{-1}$ donc $f(D') =$

$(fg)(A) = P^{-1} \underbrace{\mathrm{diag}((fg)(\lambda_i))}_{\mathrm{diag}(f(\lambda_i)) \cdot \underbrace{\ }_{I = PP^{-1}} \mathrm{diag}(g(\lambda_i))} P$

$= f(A) g(A)$

· $\mathrm{Spec}(f(A)) = \{ f(\lambda_i) : \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A) \}$

Exercice 2

1. A HDP, $f(A)$ HDP? (ssi $f(\lambda_i) > 0 \ \forall \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A)$)

$A = U^* D U$ alors $f(A) = U^* \underbrace{f(D)}_{\mathrm{diag}(f(\lambda_i))} U$

2. $\|f(A)\| = \max_{\mu \in \mathrm{Spec}(f(A))} |f(\mu)| = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |f(\lambda)|$

$f(A)$ hermitienne car $\mathrm{Spec}(f(A)) = f(\mathrm{Spec}(A))$

3. $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$, f continue $\Rightarrow f(A_n) \to f(A)$

a) Supposons f polynomiale ($f(x) = x^k$)

$A_n^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} A^k$. Les coefficients de A^k sont des expressions polynomiales en les coefficients de A donc il dépend continûment des coeffs de A ($\begin{array}{c} M_N(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C}) \\ A \mapsto A^k \end{array}$) est continue

donc $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A \Rightarrow A_n^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} A^k$.

On utilise le théorème d'approximation de Weistass

Soit $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergente vers f. Alors, $\forall j$, $p_j(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} p_j(A)$

$f(A_n) = p_j(A_n) + (f - p_j)(A_n)$

On a $\|(f - p_j)(A_n)\| = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A_n)} |(f - p_j)(\lambda)| \leq \sup_{[-\|A_n\|, \|A_n\|]} |(f - p_j)(\lambda)|$

$\forall \varepsilon > 0$

$\underset{n \text{ assez grand}}{\leq} \sup_{[-\|A\|-1, \|A\|+1]} |(f - p_j)(\lambda)|$

$\underset{j \geq j_0(\varepsilon)}{\leq} \varepsilon$

On fixe $\varepsilon > 0$, $j > 0$, Alors pour $n \geq n(j, \varepsilon)$, on a $\|p_j(A_n) - p_j(A)\| \leq \varepsilon$ (1)

si j est assez grand (en fonction de ε)

$\|p_j(A_n) - f(A_n)\| \leq \varepsilon$ (2)

$\|p_j(A) - f(A)\| \leq \varepsilon$ (3)

donc $\|f(A_n) - f(A)\| \underset{(1)+(2)+(3)}{\leq} 3\varepsilon$

Exercice 3

$f(x) = x^k$

1. $\frac{d}{dt} Tr(A(t)^k)$ $\qquad \frac{d}{dt} A(t)^2 = \frac{d}{d(t)} A(t)A(t) = A'(t)A(t) + A(t)A'(t)$

$$Tr\left(\frac{d}{dt} A(t)^k\right) = \frac{d}{dt} \underbrace{A(t)A(t)\dots A(t)}_{k \text{ fois}}$$

$$= A'(t)A(t)^{k-1} + A(t)A'(t)A(t)^{k-2} + \dots + A(t)^{k-1}A'(t) =$$

$$= Tr\left(\sum_{j=0}^{k-1} A(t)^j A'(t) A(t)^{k-1-j}\right) \overset{?}{=} k\, Tr(A(t)^{k-1}A'(t))$$

⚠ $\frac{d}{dt} f(A(t)) \neq f'(A(t)) A'(t)$

si $f(x) = x^2$

(a) $\frac{d}{dt}(A(t)^2) = A(t)A'(t) + A'(t)A(t)$

(b) $f'(A(t))A'(t) = 2A(t)A'(t)$

(a) = (b) $\Leftrightarrow A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$

$(A(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$

$A'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A'(0)A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A(0)A'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$