

# Statistique — Aide-Mémoire

# 1 MODÈLE STATISTIQUE & ESTIMATEURS

**DEFINITION 1.1 (MODÈLE STATISTIQUE)** –  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  avec  $\mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ .

- *Paramétrique* :  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ .
- *Identifiable* :  $\theta \mapsto P_\theta$  injective.

**DEFINITION 1.2 (ESTIMATEUR)** –  $\hat{\theta}_n = h(X_1, \dots, X_n)$  mesurable, indépendant de  $\theta$ .

**DEFINITION 1.3 (BIAS)** –  $B(\hat{\theta}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$ . Sans biais  $\Leftrightarrow B = 0$ .

**DEFINITION 1.4 (RISQUE QUADRATIQUE (MSE))** –  $R(\hat{\theta}, \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$

**THEOREME 1.5 (DÉCOMPOSITION BIAIS-VARIANCE)** –

$$R(\hat{\theta}, \theta) = B(\hat{\theta}, \theta)^2 + \text{Var}(\hat{\theta})$$

**DEFINITION 1.6 (CONSISTANCE)** –  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$  (convergence en probabilité). Fortement consistant si convergence p.s.

**REMARQUE 1.7** – Si  $R(\hat{\theta}_n, \theta) \rightarrow 0$  alors  $\hat{\theta}_n$  est consistant (convergence  $L^2 \Rightarrow$  convergence en probabilité, via Bienaymé-Tchebychev).  $\diamond$

**LEMME 1.8 (LEMME DES APPLICATIONS CONTINUES (LAC))** – Si  $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$  et  $h$  continue, alors  $h(Z_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(Z)$ . Idem en loi. **Attention** : la réciproque pour la convergence en loi est fautive en général.  $\diamond$

## 2 MÉTHODES DE CONSTRUCTION D'ESTIMATEURS

### 2.1 MÉTHODE DES MOMENTS

**DEFINITION 2.1** –

- *Moment théorique d'ordre  $k$*  :  $\mu_k = \mathbb{E}[X_i^k]$
- *Moment empirique d'ordre  $k$*  :  $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$

Par LGN :  $\hat{\mu}_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu_k$ .

Si  $\theta = \mathcal{L}(\mu_1, \dots, \mu_k)$ , l'estimateur des moments est  $\hat{\theta}_{\text{MM}} = \mathcal{L}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_k)$  (consistant par LAC).

Exemples courants :

- $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$  :  $\hat{\theta} = \bar{X}$
- $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$  ( $f = \theta e^{-\theta x}$ ) :  $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$
- $X_i$  de densité  $\theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{\{[0,1]\}}$  :  $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

Variance empirique :

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2 - \bar{X}^2$$

Consistant pour  $\text{Var}(X)$  (par LGN + LAC sur le couple).

### 2.2 MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE (EMV)

**DEFINITION 2.2** – *Vraisemblance* :  $L_{n(\theta)} = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i)$

*Log-vraisemblance* :  $\ell_{n(\theta)} = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(X_i)$

*EMV* :  $\hat{\theta}_{\text{MV}} = \text{argmax}_{\theta \in \Theta} L_{n(\theta)} = \text{argmax}_{\theta \in \Theta} \ell_{n(\theta)}$

**PROPOSITION 2.3** – Si  $\hat{\theta}$  est EMV de  $\theta$ , alors  $g(\hat{\theta})$  est EMV de  $g(\theta)$ .

Équation de vraisemblance : résoudre  $\ell_{n'}(\theta) = 0$ , vérifier que c'est un maximum (e.g.  $\ell_{n''} < 0$ ).

Exemple :  $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ ,  $\hat{\theta}_{\text{MV}} = \bar{X}$ .

## 3 INFORMATION DE FISHER & BORNE DE CRAMÉR-RAO

**DEFINITION 3.1 (MODÈLE RÉGULIER)** –  $(P_\theta)$  est régulier si :

1.  $\Theta$  ouvert,  $\theta \mapsto f_{\theta(x)}$  est  $C^1$
2.  $\text{Supp } f_\theta$  ne dépend pas de  $\theta$
3. L'intégrale  $I(\theta) = \int_{\mathcal{S}} \frac{(\partial_\theta f_{\theta(x)})^2}{f_{\theta(x)}} dx$  existe et est continue sur  $\Theta$

**DEFINITION 3.2 (SCORE)** –

$$S_{n(\theta)} = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L_{n(\theta)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_{\theta}(X_i)$$

Sous les hypothèses de régularité :  $\mathbb{E}_\theta[S_{n(\theta)}] = 0$  (score centré).

**DEFINITION 3.3 (INFORMATION DE FISHER)** –

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_{\theta}(X_1) \right)^2 \right] = \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_{\theta}(X_1) \right)$$

Pour  $n$  observations :  $I_{n(\theta)} = nI(\theta)$ .

Formule alternative (si  $C^2$ ) :

$$I_{n(\theta)} = -\mathbb{E}_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L_{n(\theta)} \right]$$

Exemples :

- $X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$  :  $I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$
- $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$  :  $I(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$
- $X_i \sim \mathcal{P}(\theta)$  :  $I(\theta) = \frac{1}{\theta}$

**PROPOSITION 3.4 (INÉGALITÉ DE CRAMÉR-RAO)** – Modèle régulier,  $I(\theta) > 0$ . Pour tout estimateur  $T$  sans biais de  $g(\theta)$  avec  $\mathbb{E}_\theta[T^2] < +\infty$  :

$$\text{Var}_{\theta(T)} \geq \frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_{n(x)} - F(x)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

**DEFINITION 3.5 (ESTIMATEUR EFFICACE)** –  $T$  est efficace s'il réalise l'égalité dans la borne de Cramér-Rao.

**DEFINITION 5.3 (INVERSE GÉNÉRALISÉ / QUANTILE)** –  
 $F^{\{-1\}}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq \alpha\}$   
 •  $F^{\{-1\}}(\frac{1}{4}) = 1er\ quartile, F^{\{-1\}}(\frac{1}{2}) = médiane, F^{\{-1\}}(\frac{3}{4}) = 3e\ quartile$

### 4 PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

**LEMME 4.1 (LEMME DE SLUTSKY)** – Si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$  (constante), alors :

**DEFINITION 5.4 (QUANTILE EMPIRIQUE)** –  
 $\hat{q}_{\{n,\alpha\}} = \hat{F}_n^{\{-1\}}(\alpha) = X_{\{\lfloor n\alpha \rfloor\}}$   
 où  $X_{\{1\}} \leq \dots \leq X_{\{n\}}$  est l'échantillon ordonné et  $[u]$  est le plus petit entier  $\geq u$ .

- $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$
- $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{c}$  (si  $c \neq 0$ )

**REMARQUE 4.2** –  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$  n'implique pas  $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  en général (sauf si indépendants ou si l'un converge en proba vers une constante).

### 6 INTERVALLES DE CONFIANCE

**DEFINITION 4.3 (NORMALITÉ ASYMPTOTIQUE)** –  $\hat{\theta}_n$  est asymptotiquement normal si

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^2(\theta))$$

Note : normalité asymptotique  $\Rightarrow$  consistance.

**DEFINITION 6.1** – Un IC de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\theta$  est un intervalle  $[B_{\text{inf}}, B_{\text{sup}}]$  dont les bornes sont des fonctions de  $(X_1, \dots, X_n)$ , ne dépendent pas des paramètres inconnus, et tel que  
 $P(\theta \in [B_{\text{inf}}, B_{\text{sup}}]) \geq 1 - \alpha$   
 (ou  $\rightarrow 1 - \alpha$  pour un IC asymptotique).

**LEMME 4.4 (\$\Delta\$-MÉTHODE)** – Si  $\sqrt{n}(Z_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^2)$  et  $g$  dérivable en  $\mu$  avec  $g'(\mu) \neq 0$ , alors

$$\sqrt{n}[g(Z_n) - g(\mu)] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2 \tau^2)$$

**6.1 MÉTHODE PIVOTALE**  
 Si  $\hat{\theta}_n$  est asymptotiquement normal avec écart-type  $\frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}}$  estimé par  $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$  :

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\hat{\sigma}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Application** : si  $\hat{\theta}_n$  est asymptotiquement normal de variance  $\frac{\tau^2}{n}$ ,  $\Rightarrow$  IC asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  : et si  $\hat{\tau}^2$  est un estimateur consistant de  $\tau^2$ , alors (par Slutsky) :

$$\hat{\theta} \pm q_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

où  $q_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}} = \Phi^{\{-1\}}(1 - \frac{\alpha}{2})$  ( $\approx 1.96$  à  $5\%$ ).

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\tau}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Efficacité asymptotique** :  $\hat{\theta}_n$  est asymptotiquement efficace si  $n \text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow \frac{1}{I(\theta)}$ .

**REMARQUE 6.2** –  $q_{\{\frac{\alpha}{2}\}} = -q_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}$  par symétrie de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  
 $P(q_{\{\frac{\alpha}{2}\}} \leq Z \leq q_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}) = 1 - \alpha$ .

### 5 F.R. EMPIRIQUE & QUANTILES

**DEFINITION 5.1 (F.R. EMPIRIQUE)** –  

$$\hat{F}_{n(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq x}$$
  
 •  $n\hat{F}_{n(x)} \sim \text{Binomiale}(n, F(x))$   
 •  $\hat{F}_{n(x)}$  est sans biais et consistant pour  $F(x)$   
 • **TLC** :  $\sqrt{n}(\hat{F}_{n(x)} - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x)))$

**6.2 IC DANS LE MODÈLE GAUSSIEN**  
 $(X_1, \dots, X_n)$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\hat{\mu} = \bar{X}$ ,  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ ,  $S_n^2 = (\frac{n}{n-1})\hat{\sigma}^2$ .  
 • **IC pour  $\mu$**  ( $\sigma^2$  inconnu, niveau exact) :  

$$\bar{X} \pm t_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}(n-1) \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$
  
 où  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim \text{Student}(n-1)$ .  
 • **IC pour  $\sigma^2$**  (niveau exact) :

**THEOREME 5.2 (GLIVENKO-CANTELLI)** –

$$\left[ \frac{n\hat{\sigma}^2}{q_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}\{\chi^2(n-1)\}}, \frac{n\hat{\sigma}^2}{q_{\{\frac{\alpha}{2}\}}\{\chi^2(n-1)\}} \right]$$

car  $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .

## 7 LOIS DÉRIVÉES DE LA LOI NORMALE

**DEFINITION 7.1 (LOI \$\chi^2(d)\$)** - Si \$X\_1, \dots, X\_d \sim \mathcal{N}(0, 1)\$ i.i.d., alors

$$Y = X_1^2 + \dots + X_d^2 \sim \chi^2(d)$$

- \$\mathbb{E}[Y] = d\$, \$\text{Var}(Y) = 2d\$
- Fct génératrice : \$M(t) = (1 - 2t)^{-\frac{d}{2}}\$ (\$t < \frac{1}{2}\$)

**DEFINITION 7.2 (LOI DE STUDENT \$t(d)\$)** - Si \$X \sim \mathcal{N}(0, 1)\$ et \$Y \sim \chi^2(d)\$ indépendantes :

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{d}}} \sim \text{Student}(d)$$

Quand \$d \to +\infty\$, \$\text{Student}(d) \to \mathcal{N}(0, 1)\$.

**THEOREME 7.3 (LOI DES ESTIMATEURS GAUSSIENS)** - \$(X\_1, \dots, X\_n)\$ i.i.d. \$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\$ :

- \$\bar{X}\$ et \$\sum (X\_i - \bar{X})^2\$ sont indépendantes
- \$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})\$
- \$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S\_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)\$
- \$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S\_n}{\sqrt{n}}} \sim \text{Student}(n-1)\$

## 8 TESTS D'HYPOTHÈSE

**DEFINITION 8.1 (TEST STATISTIQUE)** - Fonction \$\varphi : (X\_1, \dots, X\_n) \to \{0, 1\}\$.

- \$\varphi = 0\$ : on conserve \$H\_0\$
- \$\varphi = 1\$ : on rejette \$H\_0\$

Région de rejet : \$\mathcal{R} = \{\varphi = 1\}\$, souvent \$\mathcal{R} = \{T > c\}\$ (ou \$< c\$, ou \$|T| > c\$).

**DEFINITION 8.2 (TYPES D'ERREURS)** -

réalité/décision	\$H_0\$ vraie	\$H_1\$ vraie
\$H_0\$ acceptée		erreur 2e espèce
\$H_0\$ rejetée	erreur 1re espèce	

- Erreur 1re espèce : \$\alpha(\theta) = P\_{\theta((X\_1, \dots, X\_n) \in \mathcal{R})}\$ pour \$\theta \in \Theta\_0\$
- Niveau \$\alpha\$ : \$\sup\_{\theta \in \Theta\_0} P\_{\theta}(\mathcal{R}) \leq \alpha\$
- Erreur 2e espèce : \$\beta(\theta) = P\_{\theta}(\mathcal{R}^c)\$ pour \$\theta \in \Theta\_1\$
- Puissance : \$\Pi(\theta) = P\_{\theta}(\mathcal{R}) = 1 - \beta(\theta)\$ pour \$\theta \in \Theta\_1\$

### 8.1 CONSTRUCTION D'UN TEST (ÉTAPES)

1. Formuler \$H\_0\$ et \$H\_1\$ ; identifier \$\theta\$.
2. Choisir la forme de \$\mathcal{R}\$ selon \$H\_1\$ :
  - \$H\_1 : \theta > \theta\_0 \to \mathcal{R} = \{T > c\}\$
  - \$H\_1 : \theta < \theta\_0 \to \mathcal{R} = \{T < c\}\$
  - \$H\_1 : \theta \neq \theta\_0\$ (bilatère) \$\to \mathcal{R} = \{|T| > c\}\$
3. Statistique de test \$T = \frac{\hat{\theta} - \theta\_0}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}}\$ normalisée sous \$H\_0\$.
4. Trouver \$c\_\alpha\$ tel que \$\sup\_{\theta \in \Theta\_0} P(T \in \mathcal{R}) = \alpha\$ (ou \$\to \alpha\$).

**DEFINITION 8.3 (\$\mathcal{P}\$-VALEUR)** - Pour une réalisation \$T^{\text{obs}}\$ :

- Si \$\mathcal{R} = \{T > c\}\$ : p-valeur = \$P\_{\{H\_0\}}(T > T^{\text{obs}})\$
- Si \$\mathcal{R} = \{T < c\}\$ : p-valeur = \$P\_{\{H\_0\}}(T < T^{\text{obs}})\$
- Si \$\mathcal{R} = \{|T| > c\}\$ : p-valeur = \$P\_{\{H\_0\}}(|T| > |T^{\text{obs}}|)\$

Règle : on rejette \$H\_0\$ ssi p-valeur \$< \alpha\$.

**REMARQUE 8.4** - Pour un test bilatère avec \$T \sim \mathcal{N}(0, 1)\$ ou Student (loi symétrique) : p-valeur = \$2(1 - F(|T^{\text{obs}}|))\$ — double de la p-valeur unilatère. \$\diamond\$

## 9 TESTS USUELS

### 9.1 TEST SUR \$\mu\$ (MODÈLE GAUSSIEN)

\$H\_0 : \mu = \mu\_0\$ contre \$H\_1 : \mu \neq \mu\_0\$, \$\sigma^2\$ inconnu :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \underset{\{H_0\}}{\sim} \text{Student}(n-1)$$

$$\mathcal{R} = \{|T| > t_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}(n-1)\}$$

\$H\_0 : \mu \le \mu\_0\$ contre \$H\_1 : \mu > \mu\_0\$ :

$$\mathcal{R} = \{T > t_{\{1-\alpha\}}(n-1)\}$$

### 9.2 TEST SUR \$\sigma^2\$ (MODÈLE GAUSSIEN)

\$H\_0 : \sigma^2 = \sigma\_0^2\$ contre \$H\_1 : \sigma^2 \neq \sigma\_0^2\$ :

$$T = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \underset{\{H_0\}}{\sim} \chi^2(n-1)$$

$$\mathcal{R} = \left\{ T > q_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}^{\{\chi^2(n-1)\}} \text{ ou } T < q_{\{\frac{\alpha}{2}\}}^{\{\chi^2(n-1)\}} \right\}$$

### 9.3 TEST DE STUDENT À DEUX ÉCHANTILLONS

\$(X\_i)\$ i.i.d. \$\mathcal{N}(\mu\_1, \sigma^2)\$ et \$(Y\_j)\$ i.i.d. \$\mathcal{N}(\mu\_2, \sigma^2)\$, indépendants, variances égales.

\$H\_0 : \mu\_1 = \mu\_2\$ contre \$H\_1 : \mu\_1 \neq \mu\_2\$ :

Estimateur poolé de \$\sigma^2\$ :

$$S_n^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left( \sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (Y_j - \bar{Y})^2 \right)$$

Statistique :

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_n \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \underset{\{H_0\}}{\sim} \text{Student}(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\mathcal{R} = \{|T| > t_{\{1-\frac{\alpha}{2}\}}(n_1 + n_2 - 2)\}$$

p-valeur = \$2(1 - F\_{\{\text{Student}(n\_1+n\_2-2)\}}(|T^{\text{obs}}|))\$

### 9.4 TEST ASYMPTOTIQUE (PROPORTION)

\$(X\_i)\$ i.i.d. Bernoulli(\$p\$), \$H\_0 : p \le p\_0\$ contre \$H\_1 : p > p\_0\$ :

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{H_0}{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\mathcal{R} = \{T > q_{\{1-\alpha\}}\}, \text{ seuil } c_\alpha = \frac{q_{\{1-\alpha\}}}{\sqrt{n}}$$

p-valeur = \$1 - \Phi(T^{\text{obs}})\$

## 10 FORMULAIRE RAPIDE

**Quantiles usuels de  $\mathcal{N}(0, 1)$  :**

- $q_{\{0.90\}} \approx 1.282$
- $q_{\{0.95\}} \approx 1.645$
- $q_{\{0.975\}} \approx 1.960$
- $q_{\{0.99\}} \approx 2.326$

**Lois utiles :**

- $\bar{X}$  de loi  $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  si  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  exacte (pas seulement asymptotique)
- TLC général :  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

**Propriétés de  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :**

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}$
- $M(t) = e^{\left\{t\mu + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\}}$
- Moments centrés impairs nuls ;  $\mathbb{E}[(X - \mu)^4] = 3\sigma^4$
- CL de gaussiennes indépendantes = gaussienne

**IC Bernoulli asymptotique ( $\alpha = 5\%$ ) :**

$$\hat{p} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

**Biais de  $\hat{\sigma}^2$  :**

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 \Rightarrow B = -\frac{\sigma^2}{n}$$

$\Rightarrow S_n^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}_n^2$  est sans biais.

**EMV dans  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :**  $\hat{\mu} = \bar{X}$ ,  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$  (biaisé).

**$\delta$ -méthode — rappel :** si  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  et  $g$  dérivable,

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\theta))^2 \sigma^2)$$