

CHAPITRE 1

PROP. 1.1. Les solutions de $y' = ay$ sur \mathbb{R} sont $y(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{R}$.

PROP. 1.2. Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, A primitive de a . Les solutions de $y' = a(t)y$ sur I sont $y(t) = Ce^{A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$.

PROP. 1.3. Soit $a, b \in \mathcal{C}^0(I)$, A primitive de a , $t_0 \in I$. y est solution de $y' = a(t)y + b(t)$ ssi $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que

$$y(t) = Ce^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)}b(s) ds.$$

DEF. 1.4. Une **EDO d'ordre 1** sur $I : y' = f(t, y)$, $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. **Autonome** si f ne dépend pas de t , **linéaire** si $f = a(t)x + b(t)$, **homogène** si $b = 0$.

DEF. 1.5. (J, y) est **solution** de $y' = f(t, y)$ si $y \in \mathcal{C}^1(J)$, $y(t) \in U$, $y'(t) = f(t, y(t))$. **Globale** si $J = I$, **locale** sinon.

DEF. 1.6. (J_2, y_2) **prolonge** (J_1, y_1) si $J_1 \subset J_2$ et $y_2|_{J_1} = y_1$. (J_1, y_1) est **maximale** si non prolongeable.

PROP. 1.7 (CAUCHY-LIPSCHITZ). Si $f \in \mathcal{C}^1(I \times U)$, le problème $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ admet une **unique solution maximale**.

DEF. 1.8. EDO d'ordre n : $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$; solution (J, y) avec $y \in \mathcal{C}^n(J)$.

PROP. 1.9. L'EDO d'ordre n est équivalente à $Y' = G(t, Y)$ via $Y = (y, \dots, y^{(n-1)})^\top$, où $G = (x_2, \dots, x_n, F)^\top$.

PROP. 1.10 (RÉGULARITÉ). Si $F \in \mathcal{C}^k$ et (J, Y) est solution, alors $Y \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$.

CHAPITRE 2

DEF. 2.1. Système **linéaire** : $Y' = A(t)Y + B(t)$, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n$, $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues. **Homogène** si $B = 0$.

PROP. 2.2. Y est solution du problème de Cauchy $Y' = A(t)Y + B(t)$, $Y(t_0) = X_0$ ssi

$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(s)Y(s) + B(s)] ds.$$

Picard : $Y_0 = X_0$, $Y_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [AY_n + B] ds$; converge, $\|W_n\| \leq A^{n-1}Mt^n/n!$

PROP. 2.3 (CL LINÉAIRE). Si A, B continues, le problème de Cauchy a une **unique solution maximale globale**.

PROP. 2.4. Les solutions de $Y' = A(t)Y$ forment un **s.e.v.** de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

PROP. 2.5. Si Y_1, Y_2 sont solutions de $Y' = AY + B$, alors $Y_1 - Y_2$ est solution de l'homogène.

PROP. 2.6 (SUPERPOSITION). Toute solution de $Y' = AY + B$ s'écrit $Y = Y_0 + Z$, Y_0 particulière, Z homogène.

PROP. 2.7. L'espace \mathcal{S}_H a **dimension n** . Isomorphisme : $X_0 \mapsto Y_{X_0}$.

DEF. 2.8. $\exp(A) = \sum_{k \geq 0} A^k/k!$ converge normalement.

Cas : $e^0 = I$; A diag. $\Rightarrow e^A = \text{diag}(e^{\lambda_i})$; $A^p = 0 \Rightarrow e^A = \sum_0^{p-1} A^k/k!$; $A = PBP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^BP^{-1}$.

PROP. 2.9. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^Ae^B$.

PROP. 2.10 (JORDAN-CHEVALLEY). $\forall f$ linéaire sur \mathbb{C}^n , $\exists!$ décomposition $f = d + n$, d diag., n nilp., $dn = nd$.

Algo : (1) $\chi_f = \prod (X - \lambda_j)^{m_j}$; (2) base \mathcal{B}_j de $\ker(A - \lambda_j)^{m_j}$; (3) $d(u) = \lambda_j u$; (4) $n = f - d$.

PROP. 2.11. Pour le bloc Jordan $T_j = \lambda_j I + N_j$:
 $e^{T_j} = e^{\lambda_j} \left(I + N_j + \dots + N_j^{m_j-1} / (m_j - 1)! \right)$.

PROP. 2.12. $\varphi(t) = e^{tA}$ est \mathcal{C}^∞ ; $\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$; $\varphi(t)^{-1} = \varphi(-t)$; $(d/dt)e^{tA} = Ae^{tA}$.

PROP. 2.13. Solution unique de $Y' = AY$, $Y(0) = X_0$: $Y(t) = e^{tA}X_0$.

PROP. 2.14. Solutions complexes de $Y' = AY$: combinaisons de $t \mapsto e^{t\lambda_j} t^k u_{j,k}$, $k \leq m_j - 1$.

Var. cte. (cst.) : $Y_{p(t)} = e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$.

PROP. 2.15. Solutions réelles ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) : combinaisons de $e^{t\alpha_j} \cos(b_j t) t^k u$ et $e^{t\alpha_j} \sin(b_j t) t^k v$.

DEF. 2.16. Résolvante : $R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$; pour A cst. : $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

PROP. 2.17. $R(t, t) = I$; $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$; $\partial_t R = A(t)R$; $R^{-1}(t, t_0) = R(t_0, t)$.

DEF. 2.18. SFS : $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ libres dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. **Wronskien** : $\mathcal{W}(t) = \det(Y_1(t) | \dots | Y_n(t))$.

PROP. 2.19 (LIOUVILLE). $\mathcal{W}(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds\right) \neq 0$; les colonnes de $R(t, t_0)$ forment un SFS.

Var. cte. (var.) : $Y_{p(t)} = R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s) B(s) ds$.

Ordre 2 : Pour $y'' + py' + qy = f$, SFS (y_1, y_2) ; chercher $y_p = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ avec $\alpha'_1 y_1 + \alpha'_2 y_2 = 0$, $\alpha'_1 y'_1 + \alpha'_2 y'_2 = f$.

CHAPITRE 3

Euler explicite : $y_0 = x_0$, $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.

DEF. 3.1. Erreur globale : $e(h) = \max_n |y(t_n) - y_n^h|$.

DEF. 3.2. Schéma convergent si $e(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

DEF. 3.3. Erreur de consistance locale : $\varepsilon_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$. **Erreur globale** : $\varepsilon(h) = \sum |\varepsilon_n(h)|$. Euler ($f \in \mathcal{C}^1$) : $|\varepsilon_n| \leq Mh^2$, $\varepsilon(h) \leq M'h \square$ ordre 1.

PROP. 3.4. Euler explicite est d'ordre **exactement 1**.

DEF. 3.5. Schéma stable si $\exists C > 0$: $|z_n^h - y_n^h| \leq C(|z_0 - y_0| + \sum_{m < n} |\delta_m|)$.

PROP. 3.6. Si f est L -Lipschitz en y , Euler est stable avec $C = e^{L(t-t_0)}$.

PROP. 3.7 (LAX). Consistance + Stabilité \Rightarrow Convergence. Pour Euler : $e(h) = O(h)$.

Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. Stable $\forall h > 0$ sur $y' = -ay$.

Heun (RK2) : $p_1 = f(t_n, y_n)$, $p_2 = f(t_n + h, y_n + hp_1)$, $y_{n+1} = y_n + h(p_1 + p_2)/2$.

Ordre 2 RK (2 étages) : $b_1 + b_2 = 1$, $b_2 c_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 a_{2,1} = \frac{1}{2}$. Famille $b_2 = \frac{1}{2\alpha}$, $c_2 = a_{2,1} = \alpha$.

PROP. 3.8. Schéma $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t, y_n, h)$ consistant $\Leftrightarrow \Phi(t, x, 0) = f(t, x)$. RK : $\Leftrightarrow \sum b_i = 1$.

RK4 : tableau de Butcher $c = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^\top$, $b = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^\top$.