Analyse complexe
et applications à l'algèbre linéaire

Cours d'Antoine Levitte. Notes de cours prises par Yehor Korotenko

Table des matières

1 Résolvante et spectre

1.1 Définitions

Definition 1.1 (Spectre et résolvante) – *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle* ***spectre*** *de A l'ensemble*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid A - \mu I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$, la matrice $A - \lambda I$ est inversible. On note

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$$

et on l'appelle la ***résolvante*** *de A en λ.*

Remarque 1.2 – *On dispose d'une expression alternative. Posons*

$$B_A(z) = (I - zA)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\mu} \mid \mu \in \mathrm{Sp}(A) \right\}.$$

Un calcul direct donne

$$R_A(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\, B_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

◇

1.2 Norme d'opérateur

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. La **norme d'opérateur** (norme subordonnée) de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}.$$

Elle satisfait $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. De plus, si $\|A\| < 1$ alors $I - A$ est inversible et

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

1.3 Développement en série entière de la résolvante

Proposition 1.3 (Poly, Prop. 4.8) – *La série suivante converge (localement uniformément pour la norme d'opérateur) sur le disque $\mathbb{D}\left(0, \frac{1}{\|A\|}\right)$:*

$$B_A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n A^n.$$

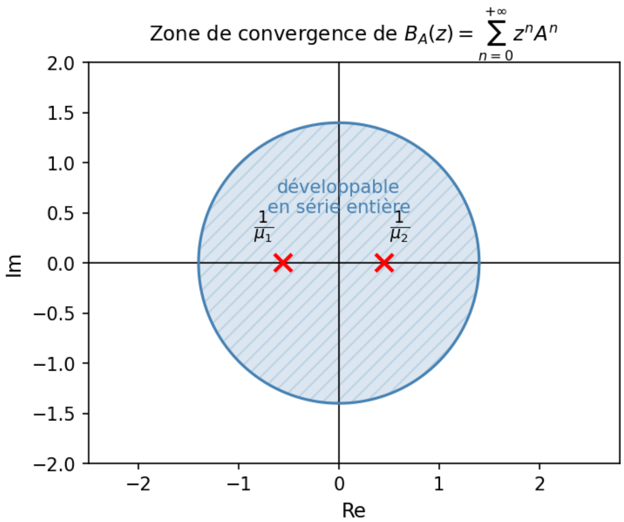

Fig. 1. – Zone de convergence de $B_{A(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n A^n$. Les croix marquent les singularités $1/\mu_i$ pour $\mu_i \in \mathrm{Sp}(A)$.

Remarque 1.4 – *Au voisinage de tout pintegral.cont de son domaine de définition, B_A est développable en série entière :*

$$B_A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - z_0)^n B_A(z_0)[AB_A(z_0)]^n.$$

But : *étudier ce type de fonction d'une variable complexe.* ◇

Un calcul algébrique montre que, en posant $C = I - z_0 A$ et $D = (z - z_0)A$:

$$B_A(z) = (I - zA)^{-1} = (I - z_0 A - (z - z_0)A)^{-1} = (C - D)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} C^{-1}(DC^{-1})^n.$$

2 Fonctions holomorphes

2.1 Définition

Definition 2.1 (Fonction holomorphe) – *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est* ***holomorphe*** *lorsque*

$$\forall z_0 \in \Omega, \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ et } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tels que } \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0, \varepsilon), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2.2 Rappel : convergence des séries entières

Proposition 2.2 (Piqûre de rappel) – *Si $\left(|a_n|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $M>0$, alors la série entière $z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{D}(0,1/M)$, et définit une fonction C^∞ en tant que fonction de deux variables réelles.*

En particulier, si $R<\frac{1}{M}$ et $z\in\mathbb{D}(0,R)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n z^n|\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}(RM)^n<+\infty.$$

2.3 L'opérateur $\overline{\partial}$

Remarque 2.3 – *En écrivant $z=x+iy$, on calcule :*

$$\frac{\partial}{\partial x}(x+iy)^n=n(x+iy)^{n-1},\qquad\frac{\partial}{\partial y}(x+iy)^n=in(x+iy)^{n-1}.$$

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)^n=0.$$

On note $\overline{\partial}=\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ (aussi noté $\frac{\partial}{\partial\bar z}$). ◇

Proposition 2.4 – *Si f est holomorphe, alors $\overline{\partial}f=0$.*

2.4 Exemples

Les fonctions suivantes sont holomorphes :
- la résolvante $\lambda\mapsto R_A(\lambda)$,
- les polynômes,
- l'exponentielle $z\mapsto\exp(z)$,
- la matrice-exponentielle $z\mapsto\exp(zA)$.

Exemple 2.5 (Non-exemple) – *La fonction $z\mapsto\bar z$ n'est **pas** holomorphe car*

$$\frac{\partial}{\partial x}(x-iy)=1\neq0=\overline{\partial}\bar z.$$

◇

3 Intégrales de contour

3.1 Formule de Stokes / Théorème d'Ampère

3.1.1 Version 1D

Si $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

3.1.2 Version 2D

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert dont le bord est une courbe régulière simple γ. On parcourt γ à vitesse 1 ; on note $T = \text{Longueur}(\gamma)$.

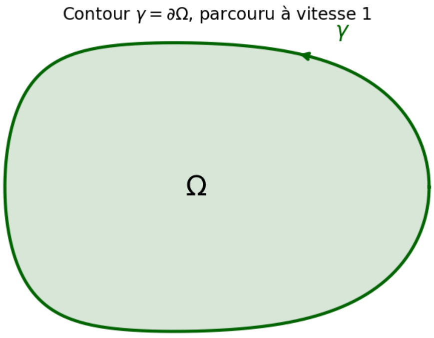

Fig. 2. – Contour simple $\gamma = \partial\Omega$ orienté dans le sens direct.

Theoreme 3.1 (Stokes / Green-Riemann) – *Soit $\vec{A} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs C^1, avec*

$$\vec{A}(x, y) = A_x(x, y)\vec{e}_x + A_y(x, y)\vec{e}_y.$$

On définit le rotationnel scalaire

$$\operatorname{rot}\left(\vec{A}\right) = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Alors

$$\iint_\Omega \operatorname{rot}\left(\vec{A}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^T \vec{A}(\gamma(s)) \cdot \vec{T}(\gamma(s))\,\mathrm{d}s,$$

où $\vec{T}(s) = \gamma'(s)$ est le vecteur tangent.

3.1.3 Preuve sur le carré

On prend $\Omega = [0, 1]^2$ et A affine :

$$A_x = c_x + a_{xx}x + a_{xy}y, \quad A_y = c_y + a_{yx}x + a_{yy}y.$$

Donc $\operatorname{rot}\left(\vec{A}\right) = a_{yx} - a_{xy}$ et $\iint_\Omega \operatorname{rot}\left(\vec{A}\right) = a_{yx} - a_{xy}$.

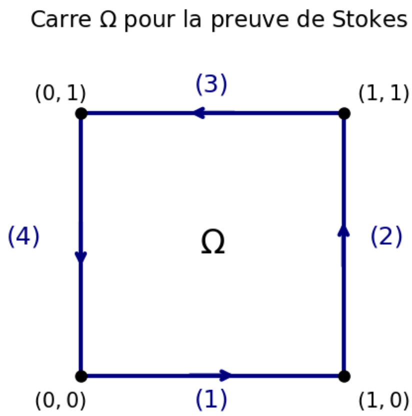

Fig. 3. – Le carré $\Omega = [0,1]^2$ avec ses quatre côtés numérotés.

On paramétrise les quatre côtés et on somme les contributions :

$$\begin{aligned}
&(1): \quad s \mapsto (s,0), s \in [0,1], && \int_0^1 A_x(s,0)\,\mathrm{d}s = c_x + \frac{a_{xx}}{2}\\
&(2): \quad s \mapsto (1,s), s \in [0,1], && \int_0^1 A_y(1,s)\,\mathrm{d}s = c_y + a_{yx} + \frac{a_{yy}}{2}\\
&(3): \quad s \mapsto (1-s,1), s \in [0,1], && -\int_0^1 A_x(1-s,1)\,\mathrm{d}s = -\left(c_x + a_{xy} + \frac{a_{xx}}{2}\right)\\
&(4): \quad s \mapsto (0,1-s), s \in [0,1], && -\int_0^1 A_y(0,1-s)\,\mathrm{d}s = -\left(c_y + \frac{a_{yy}}{2}\right)
\end{aligned}$$

En additionnant : $\oint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{T} = a_{yx} - a_{xy} = \iint_\Omega \mathrm{rot}\left(\vec{A}\right)$. $\square$

Chemin vers une vraie preuve :

1. Vérifier d'abord pour des fonctions affines sur des triangles quelconques.
2. Approcher γ par une courbe polygonale, trianguler Ω, et approcher A par une fonction affine sur chaque triangle.

3.2 Intégrale complexe et formule de Green

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $\gamma : [0,T] \to \mathbb{C}$ une courbe régulière. On définit

$$\int_\gamma f = \int_0^T f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s.$$

En posant $\vec{A}(x,y) = f(x,y)\vec{e}_x + i f(x,y)\vec{e}_y$, on calcule :

$$\mathrm{rot}\left(\vec{A}\right) = i\partial_x f - \partial_y f = i\left(\partial_x f + i\partial_y f\right) = 2i\,\overline{\partial} f.$$

Proposition 3.2 – *Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est de classe C^1 avec $\overline{\partial}f=0$, alors pour toute courbe γ fermée dans Ω,*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

Remarque 3.3 – *Vrai si on a une courbe simple et f définie partout à l'intérieur. En général pour des contours homologues :*

$$\oint_{\gamma_1} f = 0, \quad \oint_{\gamma_2} f = \oint_{\gamma_3} f, \quad \oint_{\gamma_5} f = \oint_{\gamma_2} f + \oint_{\gamma_4} f.$$

◇

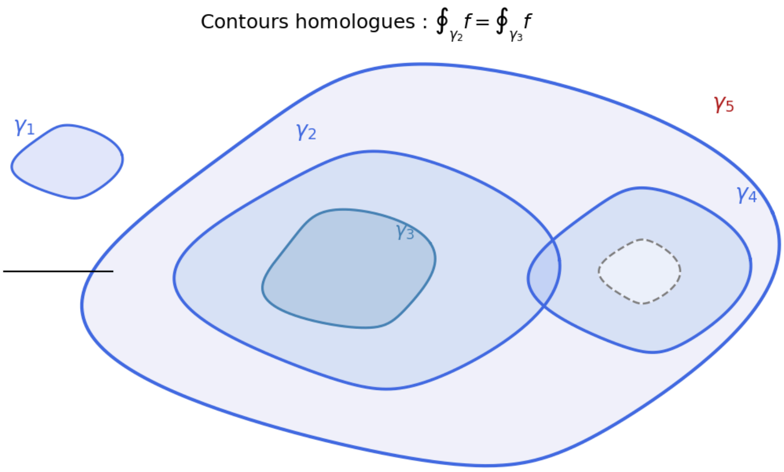

Fig. 4. – Contours homologues : γ_1 (petit contour isolé), γ_2, γ_3 (contours emboîtés), γ_4 (contour avec trou), γ_5 (grand contour extérieur).

4 Formule de Cauchy

Theoreme 4.1 (Formule de Cauchy) – *Soit $f\in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ avec $\overline{\partial}f=0$. Soit $z_0\in\Omega$. Alors, pour toute courbe γ qui fait un tour (dans le sens direct) autour de z_0,*

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$$

Preuve. La valeur de l'intégrale ne dépend pas de γ, donc on prend γ_ε le cercle de rayon ε autour de z_0 :

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + O\Big(\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\Big) = O(\varepsilon).$$

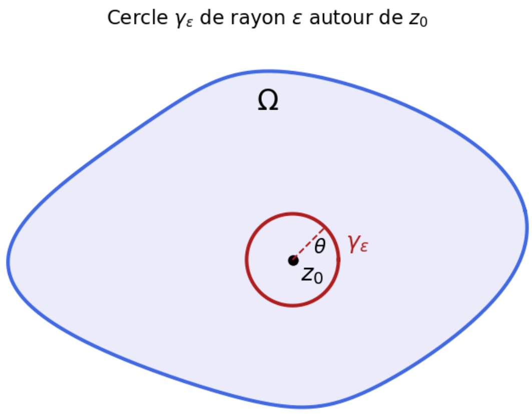

Fig. 5. – Le cercle γ_ε de rayon ε centré en z_0, utilisé dans la preuve de la formule de Cauchy.

On paramétrise $\gamma_\varepsilon : \theta \mapsto z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, donc $\gamma_{\varepsilon'}(\theta) = i\varepsilon e^{i\theta}$ et

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i.$$

$\square$

4.1 Caractérisation des fonctions holomorphes

Theoreme 4.2 – *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\overline{\partial} f = 0$. Alors f est holomorphe.*

Preuve. Soit γ une courbe simple dans Ω. Pour tout z_0 à l'intérieur de γ, la formule de Cauchy donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Pour tout $z \in \gamma$, la fonction $z_0 \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Après intégration, $z_0 \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$ est holomorphe sur $\omega = \mathrm{Int}(\gamma)$. $\square$

5 Application à l'algèbre linéaire

5.1 Projecteur spectral

Proposition 5.1 (Projecteur sur un espace propre) – *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, et soit γ une courbe qui fait un tour autour d'une valeur propre μ, sans encercler les autres. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma R_A(z)\,\mathrm{d}z = \Pi_\mu,$$

*où Π_μ est le **projecteur** sur l'espace propre E_μ, parallèlement aux autres espaces propres.*

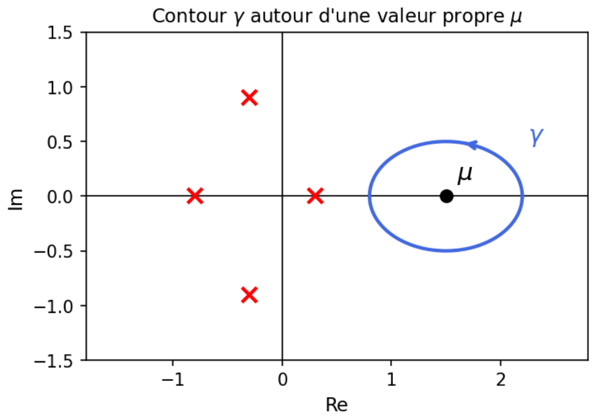

Fig. 6. – Contour γ entourant la valeur propre μ, sans encercler les autres valeurs propres (croix rouges).

Preuve. Puisque A est diagonalisable, il existe P inversible telle que

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} P, \quad \mu \notin \mathrm{Sp}(D').$$

Alors

$$(A - \lambda I)^{-1} = P^{-1}\begin{pmatrix} (\mu-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (D' - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} P.$$

On intègre sur γ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma (A-\lambda I)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda &= P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \mathrm{d}\frac{\lambda}{\mu-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \Pi_\mu. \end{aligned}$$

Le bloc inférieur est nul car $(D' - \lambda I)^{-1}$ est holomorphe à l'intérieur de γ (puisque $\mu \notin \mathrm{Sp}(D')$). Le bloc supérieur vaut 1 par calcul de résidu :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{\mu-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = 1. \quad \square$$

$\square$