

# Комплексний аналіз та його застосування до лінійної алгебри

## Самостійний вступ

НА ОСНОВІ КУРСУ АНТУАНА ЛЕВІТТА, УНІВЕРСИТЕТ ПАРИЖ-САКЛЕ | ЄГОР КОРОТЕНКО

### 1 Вступ

Цей розділ пропонує короткий, але самодостатній вступ до комплексного аналізу, маючи на увазі єдину мету: дійти до формули **спектрального проєктора**

$$P_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma R_A(z) dz, \quad (1)$$

яка видобуває проєктор на власний простір матриці  $A$  з контурного інтеграла її резольвенти. Попутно ми розвиватимемо справжню геометричну та аналітичну інтуїцію — а не просто формули.

Центральною темою є дивовижне явище жорсткості. Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  може бути диференційованою скрізь, не маючи представлення у вигляді степеневого ряду. Функція  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , яка є диференційованою скрізь у комплексному сенсі, **автоматично** є степеневим рядом. Цей єдиний факт — доведення якого проходить через теорему Стокса та формулу Коші — робить комплексний аналіз таким потужним.

**Дорожня карта.** Ми рухаємося п'ятьма кроками:

1. **Голоморфні функції** — що означає комплексна диференційовність геометрично (§2)
2. **Контурні інтеграли** — інтегрування вздовж кривих у  $\mathbb{C}$  (§3)
3. **Теорема Стокса** — чому голоморфні функції мають нульові інтеграли по замкненому контуру (§4)
4. **Формула Коші** — граничні дані визначають внутрішні значення (§5)
5. **Застосування до лінійної алгебри** — спектральний проєктор (§6)

## 2 Голоморфні функції

### 2.1 Геометричний зміст комплексної диференційовності

Функція  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  є диференційовною в точці  $p_0$ , якщо існує матриця  $Jf(p_0)$  — якобіан — така, що

$$f(p_0 + h) = f(p_0) + Jf(p_0) \cdot h + o(|h|). \quad (2)$$

Якобіан може бути **будь-якою** матрицею  $2 \times 2$ : він може представляти обертання, зсув, відображення, асиметричне розтягування або будь-яку їх комбінацію.

Комплексна площина  $\mathbb{C}$  має додаткову структуру, якої немає у  $\mathbb{R}^2$ : **множення**. Множення на комплексне число  $w = re^{i\theta}$  діє на  $\mathbb{R}^2$  як одночасне обертання на  $\theta$  та масштабування на  $r$ . Як матриця:

$$z \mapsto wz \quad \text{відповідає} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad w = a + ib. \quad (3)$$

Це дуже особлива матриця  $2 \times 2$  —  $\det = a^2 + b^2$ ,  $\text{tr} = 2a$ .  $\det = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a^2 + b^2$ .

**Означення 2.1** — Нехай  $\Omega \subset \mathbb{C}$  є відкритою множиною, а  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Ми говоримо, що  $f$  є **голоморфною** на  $\Omega$ , якщо для кожної точки  $z_0 \in \Omega$  існує окіл, на якому  $f$  може бути виражена у вигляді збіжного степеневого ряду:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4)$$

**Інтуїція 2.2** — Голоморфна = локально виглядає як множення на комплексне число. Збільшуючи масштаб поблизу будь-якої точки  $z_0$ , функція  $f$  поводить себе як  $f(z_0 + h) \approx f(z_0) + f'(z_0) \cdot h$ , де  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ , а множення є **комплексним** множенням — обертанням і масштабуванням вхідного зміщення  $h$ . Без відображень, без зсувів, без асиметричних розтягувань.  $\diamond$

## 2.2 ОПЕРАТОР $\bar{\partial}$ ТА РІВНЯННЯ КОШІ-РІМАНА

Записуючи  $z = x + iy$ , будь-яку гладку  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  можна розглядати як таку, що залежить від двох незалежних «координат»  $z$  та  $\bar{z}$ , оскільки

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (5)$$

Ланцоґове правило дає природні диференціальні оператори у цьому новому базисі:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \quad (6)$$

Вони не визначаються таким чином — вони **виводяться** зі зміни змінних. Одразу перевіряємо, що  $\partial_z(z^n) = nz^{n-1}$ ,  $\bar{\partial}(z^n) = 0$ , і  $\bar{\partial}(\bar{z}) = 1$ . Отже,  $\bar{\partial}$  — це «антиголоморфна похідна» — вона виявляє залежність від  $\bar{z}$ .

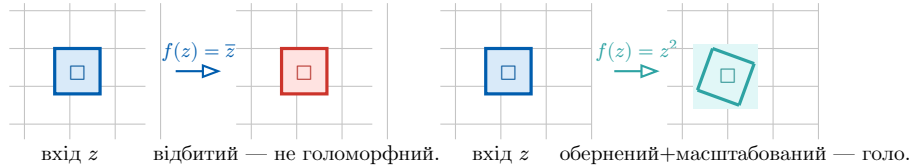
**ТЕОРЕМА 2.3 (CAUCHY-RIEMANN)** — Нехай  $f = u + iv$  (де  $u, v$  — дійснозначні функції) буде класу  $C^1$ . Наступні твердження є еквівалентними:

1.  $\bar{\partial}f = 0$ ,
2.  $\partial_x u = \partial_y v$  і  $\partial_y u = -\partial_x v$  (рівняння Коші-Рімана),
3. Якобіан  $Jf$  має вигляд  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  для деяких  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
4.  $f$  є комплексно-диференційовною в кожній точці, причому  $f'(z_0) = a + ib$ .

**Доведення.** Еквівалентність (1) (2) :  $\bar{\partial}f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}[(\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u)]$ , що дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли  $\partial_x u = \partial_y v$  і  $\partial_y u = -\partial_x v$ .

Для (2)  $\Leftrightarrow$  (3): якобіан дорівнює  $Jf = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$ . Рівняння Коші-Рімана є точною умовою  $\partial_x u = \partial_y v$  і  $\partial_y u = -\partial_x v$ , що дає  $Jf = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , де  $a = \partial_x u$ ,  $b = \partial_x v$ .

Для (3)  $\Leftrightarrow$  (4): Якобіан  $Jf$  у формі  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  діє на  $h = h_1 + ih_2$  як  $(a + ib)(h_1 + ih_2)$  — тобто комплексне множення на  $a + ib = f'(z_0)$ .  $\square$



**Рисунок 1:** Зліва:  $f(z) = \bar{z}$  відображає площину — Якобіан має вигляд  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , який не має вигляду  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , тому він не є голоморфним. Справа:  $f(z) = z^2$  локально обертає та масштабує — Якобіан має особливий вигляд, тому він є голоморфним.

### 2.3 ПРИКЛАДИ ТА КОНТРПРИКЛАДИ

Наступні функції є голоморфними:

- Поліноми  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  (степеневі ряди, що закінчуються після скінченної кількості членів)
- Комплексна експонента  $z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- Матрична експонента  $z \mapsto \exp(zA)$  для фіксованої  $A \in M_n(\mathbb{C})$
- Резольвента  $\lambda \mapsto R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ , на  $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$

Наступні не є голоморфними:

- $f(z) = \bar{z}$ : дає  $\bar{\partial}f = 1 \neq 0$
- $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ : дає  $\bar{\partial}f = z \neq 0$  (крім  $z = 0$ )
- $f(z) = \text{Re}(z) = x$ : дає  $\bar{\partial}f = \frac{1}{2} \neq 0$

**ЗАУВАЖЕННЯ 2.4** —  $f(z) = |z|^2$  є комплексно-диференційовною в  $z = 0$  (границя  $|h \frac{|z|^2}{h} = \bar{h} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ), але більше ніде. Бути диференційовною в одній ізольованій точці не означає бути голоморфною — голоморфність вимагає диференційовності у відкритому околі.  $\diamond$

## 3 КОНТУРНІ ІНТЕГРАЛИ

### 3.1 ВИЗНАЧЕННЯ

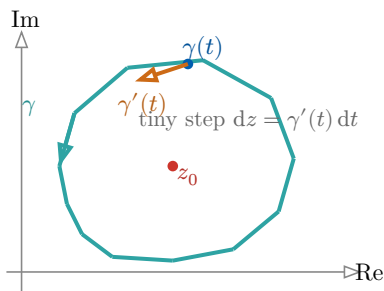
**Означення 3.1 (КОНТУРНИЙ ІНТЕГРАЛ)** — *Контур* (або *крива*) у  $\mathbb{C}$  — це  $C^1$ -відображення  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ . **Контурний інтеграл** від  $f$  уздовж  $\gamma$  визначається як

$$\int_{\gamma} f dz := \int_0^T f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (7)$$

Це точно такий же, як дійсний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , за винятком того, що:

- Ми інтегруємо вздовж **кривої** у  $\mathbb{C}$ , а не відрізка в  $\mathbb{R}$
- У кожній точці ми множимо  $f(\gamma(t))$  на  $\gamma'(t)$  — **швидкість** кривої, комплексне число, що кодує як швидкість, так і напрямок
- Результатом є комплексне число

Множник  $\gamma'(t) dt$  є нескінченно малим переміщенням  $dz$  уздовж кривої. На дійсному відрізку  $\gamma(t) = t$  ми маємо  $\gamma'(t) = 1$ , і визначення зводиться до звичайного інтеграла.



**Рисунок 2:** Контур  $\gamma$  у  $\mathbb{C}$ . У кожній точці  $\gamma(t)$ , швидкість  $\gamma'(t)$  задає напрямок і швидкість руху. Контурний інтеграл накопичує добутки  $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$  — крихітні комплексні внески — по всій кривій.

### 3.2 НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ШЛЯХУ ТА ЗАМКНЕНІ КОНТУРИ

Два шляхи  $\gamma_1, \gamma_2$  від  $z_0$  до  $z_1$  дають однаковий інтеграл, коли

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz \iff \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz = 0. \quad (8)$$

Але « $\gamma_1$  з наступним  $\gamma_2$  у зворотному напрямку» це **замкнений контур**. Отже, незалежність від шляху еквівалентна наступному: **кожен інтеграл по замкнутому контуру дорівнює нулю**:

$$\oint_{\gamma} f dz = 0 \quad \text{для будь-якого замкнутого } \gamma. \quad (9)$$

### 3.3 ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ ПРИКЛАД: ІНТЕГРАЛ ОБХОДУ

Нехай  $z_0 \in \mathbb{C}$  і  $\gamma_\varepsilon : \theta \mapsto z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  буде колом радіуса  $\varepsilon$  навколо  $z_0$ . Тоді  $\gamma'_\varepsilon(\theta) = i\varepsilon e^{i\theta}$ :

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i. \quad (10)$$

$\varepsilon$  повністю скорочується — відповідь  $2\pi i$  є **незалежною від радіуса**. Це найважливіший інтеграл у комплексному аналізі.

**ЗАУВАЖЕННЯ 3.2** — Функція  $\frac{1}{z - z_0}$  діє як «вихор», зосереджений у  $z_0$ : вона є голоморфною скрізь, окрім самої точки  $z_0$ , а інтегрування навколо  $z_0$  завжди дає  $2\pi i$  незалежно від форми петлі, якщо вона обходить  $z_0$  один раз.  $\diamond$

## 4 ТЕОРЕМА СТОКСА ТА НУЛЬОВІ ІНТЕГРАЛИ ПО ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРУ

### 4.1 РОТОР І ТЕОРЕМА СТОКСА

Для векторного поля  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y$  на  $\mathbb{R}^2$ , **скалярний ротор** (ротаціал) вимірює локальне обертання:

$$\text{rot}(\vec{A}) = \partial_x A_y - \partial_y A_x. \quad (11)$$

Геометрично: розмістіть крихітне лопатеве колесо в точці рідини. Якщо потік змушує його обертатися, ротор там відмінний від нуля. Якщо потік локально «збалансований» — стільки ж приходить з одного боку, скільки й з іншого — ротор дорівнює нулю, і колесо залишається нерухомим.



**Рисунок 3:** Ліворуч: однорідний потік має нульовий ротор — лопатеве колесо, розміщене будь-де, залишається нерухомим. Праворуч: вихор має ненульовий ротор — лопатеве колесо обертається. Ротор вимірює локальне обертання рідини.

**ТЕОРЕМА 4.1 (СТОУКС / ГРІН)** — Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  буде обмеженою відкритою множиною з гладкою межею  $\gamma = \partial\Omega$  (орієнтованою проти годинникової стрілки), а  $\vec{A} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  — векторним полем класу  $C^1$ . Тоді

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{T} = \iint_{\Omega} \text{rot}(\vec{A}) \, dx \, dy. \quad (12)$$

Ідея доведення: розбити  $\Omega$  на крихітні квадрати зі стороною  $\varepsilon$ . На кожному квадраті внески від спільних внутрішніх ребер взаємно знищуються (протилежні орієнтації). Залишається зовнішня межа. На кожному крихітному квадраті підінтегральна функція приблизно постійна, що дає внесок  $\approx \text{rot}(\vec{A}) \cdot \varepsilon^2$ .

#### 4.2 ЗВ'ЯЗОК З КОМПЛЕКСНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ

Записуючи комплексний інтеграл  $\int_{\gamma} f \, dz$  у дійсних координатах з  $f(x, y)$  та  $\vec{A}(x, y) = f(x, y)\vec{e}_x + if(x, y)\vec{e}_y$ , отримуємо:

$$\text{rot}(\vec{A}) = i\partial_x f - \partial_y f = i(\partial_x f + i\partial_y f) = 2i\bar{\partial}f. \quad (13)$$

**ПРОПОЗИЦІЯ 4.2** — Нехай  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  буде  $C^1$  з  $\bar{\partial}f = 0$ . Тоді для будь-якої замкненої кривої  $\gamma$  в  $\Omega$ ,

$$\oint_{\gamma} f \, dz = 0. \quad (14)$$

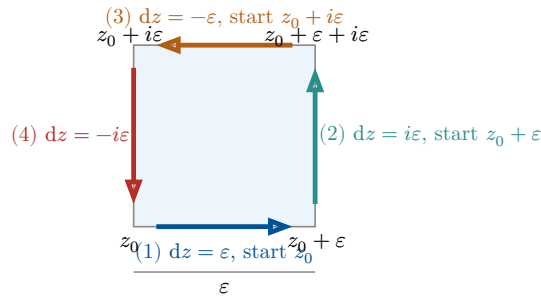
**Доведення.** За теоремою Стокса,  $\oint_{\gamma} f \, dz = \iint_{\text{interior}} \text{rot}(\vec{A}) \, dx \, dy = \iint 2i\bar{\partial}f \, dx \, dy = 0$ .  $\square$

**ІНТУЇЦІЯ 4.3** — Чому  $\bar{\partial}f = 0$  дає нульові інтеграли по замкненому контуру? Тому що голоморфні функції локально виглядають як обертання та масштабування. Обходячи будь-який контур та множачи кожен крок на локальне обертання+масштабування,

внески від протилежних сторін контуру ідеально компенсуються. Неголоморфні функції порушують цю симетрію — вони можуть розтягуватися по-різному в різних напрямках, і компенсація не відбувається. Ротор  $\text{rot}(\vec{A}) = 2i\bar{\partial}f$  точно вимірює цю асиметрію.  $\diamond$

### 4.3 ОБЧИСЛЕННЯ ПО МАЛОМУ КВАДРАТУ

Перевіримо ключову оцінку явно. Розглянемо квадрат з вершиною в  $z_0 = x_0 + iy_0$  і стороною  $\varepsilon$ . Рухаючись проти годинникової стрілки, чотири сторони вносять внесок:



**Рисунок 4:** Чотири сторони крихітного квадрата зі стороною  $\varepsilon$  з куту у  $z_0$ , обходиться проти годинникової стрілки. Кожна сторона вносить  $f(\text{куток}) \times dz$  до контурного інтеграла.

Сума всіх чотирьох внесків становить:

$$f(z_0) \cdot \varepsilon + f(z_0 + \varepsilon) \cdot i\varepsilon + f(z_0 + i\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) + f(z_0) \cdot (-i\varepsilon). \quad (15)$$

Групуючи та використовуючи  $f(z_0 + \varepsilon) \approx f(z_0) + \varepsilon \partial_x f$  і  $f(z_0 + i\varepsilon) \approx f(z_0) + i\varepsilon \partial_y f$ :

$$= \varepsilon^2 [i\partial_x f - \partial_y f] = \varepsilon^2 \cdot i(\partial_x f + i\partial_y f) = 2i\varepsilon^2 \bar{\partial}f(z_0). \quad (16)$$

Отже,  $\oint_{\square} f dz \approx 2i\varepsilon^2 \bar{\partial}f(z_0)$ . Якщо  $\bar{\partial}f = 0$ , кожен квадрат дає нульовий внесок, і інтеграл по всьому контуру зникає.

## 5 ФОРМУЛА КОШІ

### 5.1 ТВЕРДЖЕННЯ

**ТЕОРЕМА 5.1 (CAUCHY'S INTEGRAL FORMULA)** — Нехай  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  буде  $C^1$  з  $\bar{\partial}f = 0$ , і нехай  $z_0 \in \Omega$ . Для будь-якої замкненої кривої  $\gamma$ , яка один раз обходить проти годинникової стрілки навколо  $z_0$  і повністю лежить у  $\Omega$ :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (17)$$

Еквівалентно:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (18)$$

**Інтуїція 5.2** — Ця формула говорить щось дивовижне: значення голоморфної функції в одній внутрішній точці  $z_0$  є повністю визначеним її значеннями на граничному

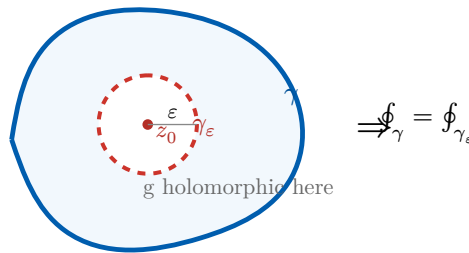
контурі  $\gamma$ . У дійсному аналізі значення функції у внутрішніх точках не залежать від граничних значень. Для голоморфних функцій граничні значення жорстко контролюють усе всередині — як мильна плівка, натягнута на дротяний контур, де дріт (межа) повністю визначає форму плівки (внутрішню частину).  $\diamond$

**Доведення.** Функція  $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$  є голоморфною на  $\Omega \setminus \{z_0\}$ , але має особливість у  $z_0$ .

**1: деформація.** Оскільки  $g$  є голоморфною в кільцевій області між  $\gamma$  та будь-яким малим колом  $\gamma_\varepsilon$  радіуса  $\varepsilon$  навколо  $z_0$ , за теоремою Стокса маємо:

$$\oint_{\gamma} g dz = \oint_{\gamma_\varepsilon} g dz. \quad (19)$$

Великий контур можна зменшити до крихітного контуру, не змінюючи значення інтеграла.



**Рисунок 5:** Деформація контуру. Оскільки  $g = f/(z - z_0)$  є голоморфною в затіненій кільцевій області між  $\gamma$  та малим колом  $\gamma_\varepsilon$ , обидва інтеграли рівні. Ми можемо стягнути  $\gamma$  до крихітного кола без зміни інтеграла.

**2: наближення.** На  $\gamma_\varepsilon$ , коли  $\varepsilon \rightarrow 0$  ми маємо  $f(z) \rightarrow f(z_0)$ , тому:

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \approx f(z_0) \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i, \quad (20)$$

де останній інтеграл було обчислено явно в §3.  $O(\varepsilon)$  і зникає, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , що завершує доведення.  $\square$

## 5.2 Від формули Коші до степеневих рядів

Формула Коші є генератором степеневих рядів. Зафіксуємо  $z_0$  і запишемо  $w$  як близьку точку. Розкладемо ядро Коші в геометричний ряд:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0) - (w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n}. \quad (21)$$

Підставляючи у формулу Коші та міняючи місцями суму й інтеграл (що обґрунтовано рівномірною збіжністю):

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right]}_{=: a_n} (w-z_0)^n. \quad (22)$$

Це є справжній степеневий ряд для  $f$  в околі  $z_0$  — що доводить, що комплексна диференційовність всюди змушує  $f$  бути степеневим рядом. Це диво не має аналогів у дійсному аналізі.

## 6 ЗАСТОСУВАННЯ: СПЕКТРАЛЬНИЙ ПРОЕКТОР

Тепер ми переходимо до результату лінійної алгебри. Протягом цього розділу  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

### 6.1 РЕЗОЛЬВЕНТА

**Означення 6.1** — *Спектр*  $A$  — це  $\text{Sp}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid A - \mu I \text{ not invertible}\}$ . Для  $\lambda \notin \text{Sp}(A)$  *резольвента* має вигляд

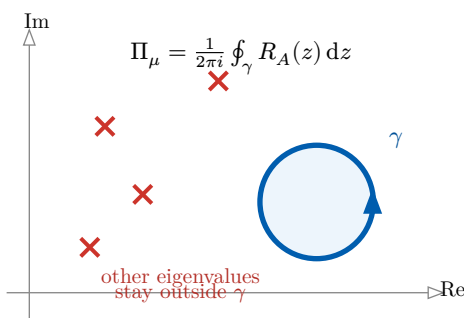
$$R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}. \quad (23)$$

Резольвента є матричнозначною функцією від  $\lambda$ . Вона голоморфна на  $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$ : за рядом Неймана, для  $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_A(\lambda_0)\|$ ,

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_A(\lambda_0)^{n+1}. \quad (24)$$

Сингулярності  $R_A(\lambda)$  є саме власними значеннями  $A$ .

### 6.2 СПЕКТРАЛЬНИЙ ПРОЕКТОР



**Рисунок 6:** Контур  $\gamma$  обходить один раз цільове власне значення  $\mu$  (синій хрестик), тоді як усі інші власні значення (червоні хрестики) залишаються поза  $\gamma$ . Контурний інтеграл резольвенти виділяє спектральний проектор на власний простір  $E_\mu$ .

**Пропозиція 6.2 (Спектральний проектор)** — Нехай  $A \in M_n(\mathbb{C})$  діагоналізовна,  $\mu$  — власне значення  $A$ , а  $\gamma$  — замкнена крива, яка обходить  $\mu$  один раз проти годинникової стрілки, але не обходить жодного іншого власного значення. Тоді

$$\Pi_\mu := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma R_A(z) dz \quad (25)$$

є проектором на власний підпростір  $E_\mu = \ker(A - \mu I)$ , паралельний до суми всіх інших власних підпросторів.

**Доведення.** Оскільки  $A$  є діагоналізовною, запишемо  $A = P^{-1} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} P$ , де  $\mu \notin \text{Sp}(D')$ .

Резольвента блок-діагоналізується так:

$$R_A(z) = (A - zI)^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} (\mu - z)^{-1} & 0 \\ 0 & (D' - zI)^{-1} \end{pmatrix} P. \quad (26)$$

Інтегруючи по  $\gamma$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_A(z) dz = P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\mu - z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (D' - zI)^{-1} dz \end{pmatrix} P. \quad (27)$$

**Верхній лівий блок:** За інтегралом звивистості з §3,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\mu - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\mu - z} = 1. \quad (28)$$

**Нижній правий блок:**  $(D' - zI)^{-1}$  є голоморфною всередині  $\gamma$  (оскільки жодне власне значення  $D'$  не лежить всередині  $\gamma$ ). 3.1,  $\gamma$  дорівнює нулю.

Отже:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_A(z) dz = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \Pi_{\mu}. \blacksquare \quad (29)$$

□

### 6.3 ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Спектральний проектор є окремим випадком набагато загальнішої конструкції. Для будь-якої функції  $f$ , голоморфної в околі  $\text{Sp}(A)$ , визначимо:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - A} dz, \quad (30)$$

де  $C$  — будь-який контур, що охоплює весь  $\text{Sp}(A)$ . Це голоморфне функціональне числення.

**Інтуїція 6.3** — Це розширює природне визначення  $f(A) = \sum a_n A^n$  (для  $f$  як степеневого ряду) до всіх голоморфних  $f$ , незалежно від проблем збіжності. Потрібно  $(I + A)^{-1}$ , коли  $\|A\| > 1$ ? Запишіть це як контурний інтеграл. Потрібно  $\log(A)$  для матриці без нульового власного значення? Використовуйте функціональне числення. Контурний інтеграл уникає всіх обмежень радіуса збіжності.  $\diamond$

Основні властивості:

- $\text{Id}(A) = A$  (тотожна функція повертає  $A$ )
- $(fg)(A) = f(A)g(A)$  (мультіплікативність)
- Якщо  $f(z) = \sum a_n z^n$  збігається і  $\|A\| < \text{radius}$ , то  $f(A) = \sum a_n A^n$  (узгодженість зі степеневими рядами)

## 7 Підсумок: ЛОГІЧНИЙ ЛАНЦЮЖОК

Весь розділ слідує одній нитці:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f = 0 &\Rightarrow \text{Стокса} \Rightarrow \oint_{\gamma} f dz = 0 \Rightarrow \text{незалежність від шляху} \\ &\Rightarrow \text{Коші} \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{степеневі ряди} \Rightarrow \text{спектральний проектор } \Pi_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma R_A(z) dz$$

Кожна стрілка відповідає одній секції цього розділу. Геометрична інтуїція кожного кроку:

Крок	Формула	Геометричний зміст
§2	$\bar{\partial}f = 0$	Якобіан = обертання + масштабування; без зсуву, без відбиття
§3	$\int_\gamma f dz$	Накопичувати добуток $f \times$ на швидкість вздовж кривої в $\mathbb{C}$
§4	$\oint f dz = 0$	Рівномірне обертання+масштабування компенсується навколо будь-якого замкнутого контуру
§5	Формула Коші	Граничні значення жорстко визначають внутрішні значення
§5	Степеневі ряди	Ядро Коші розкладається в геометричний ряд
§6	Спектральний проектор	Контур навколо $\mu$ виділяє лише $\mu$ -власний простір

Найглибше розуміння полягає в тому, що  $\bar{\partial}f = 0$  — «немає антиголоморфної частини» — одночасно є чотирма речами: умовою для матриці Якобі, відсутністю ротора, незалежністю інтегралів від шляху та жорстким зв'язком між граничними та внутрішніми значеннями, що робить спектральний проектор можливим.