Algèbre Linéaire Avancée & Numérique

Levitt — L3 Paris-Saclay — Fiche de synthèse

1. Rappels & Calcul Matriciel

1.1. Notations fondamentales

$A^* = \overline{A}^T$ (adjoint). Produit scalaire $\langle x, y\rangle = x^* y$ (conjugue à gauche). Norme: $\|x\| = \sqrt{x^* x}$.

$(AB)^* = B^* A^*$. $\langle x, Ay\rangle = \langle A^* x, y\rangle$.

- **Hermitienne**: $A^* = A$. **Anti-herm.**: $A^* = -A$. **Unitaire** (carrée): $A^* = A^{-1}$.
- **HDP**: hermitienne avec $x^* A x > 0$ pour tout $x \neq 0$.
- **Normale**: $AA^* = A^* A$.

A hermitienne $\Rightarrow$ valeurs propres $\in \mathbb{R}$; vecteurs propres pour $\lambda \neq \mu$ sont $\perp$.

1.2. Alternative de Fredholm

$\mathbb{C}^N = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A^*)$ (décomposition orthogonale).

$Ax = b$ a une solution $\Leftrightarrow b \perp \ker(A^*)$.

1.3. Complément de Schur

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, A_{11} inversible. Schur: $\tilde{A} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.

A inversible $\Leftrightarrow \tilde{A}$ inversible. Éliminer x_1, résoudre $\tilde{A} x_2 = \tilde{b}$, remonter.

Usages: preuve pivot de Gauss, Norton, Lagrange-Schur, estimation optimale.

1.4. Coûts de calcul

$O(N)$ produit scalaire; $O(N^2)$ mat-vect; $O(N^3)$ mat-mat, LU, Cholesky, QR, Schur, SVD, diagonalisation.

Pour $N = 5000$: LU pivoté 0.5s, Cholesky 0.3s, QR 1.5s, SVD 21s, Schur 18s, Diag. 25s.

2. Systèmes Linéaires & Factorisations

2.1. Résumé des factorisations

LU pivoté $PA = LU$: carrée, stable, 0.5s.

Cholesky $A = LL^*$: HDP, stable, 0.3s. Test HDP inclus.

QR $A = QR$: moindres carrés, stable, 1.5s.

SVD $A = USV^*$: tout, stable, 21s. Rang, normes, approx.

Schur $A = PTP^*$: valeurs propres, stable, 18s.

Diagonalisation $A = PDP^{\{-1\}}$: $f(A)$, instable. 25s.

LU: Opérations élémentaires $A_{n+1} = B_n A_n$ (B_n tri. inf.) $\Rightarrow A = LU$.

Résoudre K systèmes: factoriser $O(N^3)$ une fois, résoudre $K \times O(N^2)$.

QR via Gram-Schmidt: $A = QR$, $Q^* Q = I$, R tri. sup. inversible (si rang plein).

2.2. Moindres carrés $\min_x \|Ax - b\|^2$

$A \in \mathbb{C}^{N\times M}$, rang M ($N \geq M$): solution unique par $A^* A x = A^* b$.

Via QR: $x = R^{-1} Q^* b$ (plus stable). Via SVD: $x = V S^{-1} U^* b$.

Tikhonov ($\lambda > 0$): $\min\left(\|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2\right)$ toujours solution unique.

3. Théorème Spectral

Hermitien: $A = A^* \Rightarrow A = PDP^*$, P unitaire, D réelle. Preuve: minimiser $x^* A x$ sur la sphère (Lagrange $\Rightarrow$ vect. propre) puis récurrence.

Normal: $AA^* = A^* A \Leftrightarrow A$ diagonalisable en base orth. dans $\mathbb{C}$.

Schur: tout $A = PTP^*$, P unitaire, T tri. sup.

3.1. Formules min-max (Courant-Fischer)

A hermitienne, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N$:

$$\lambda_n = \min_{S,\, \dim S = n} \max_{x \in S \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

En particulier $\lambda_1 = \min_x \frac{x^* A x}{x^* x}$. Le quotient de Rayleigh est une combinaison barycentrique des λ_i de poids $|x_i \frac{|^2}{\|x\|^2}$.

3.2. Commutation et co-diagonalisation

$AB = BA \Rightarrow$ espaces propres de B sont A-invariants. A, B hermitiennes et commutent $\Rightarrow$ base commune de vecteurs propres.

A normale $\Leftrightarrow H(A) = \frac{A + A^*}{2}$ et $\mathrm{AH}(A) = \frac{A - A^*}{2i}$ commutent.

3.3. DFT et Matrices circulantes

$(A_a)_{ij} = a_{i-j \bmod N}$. Vecteurs propres: $(v_k)_j = \frac{\omega_N^{kj}}{\sqrt{N}}$, $\omega_N = e^{2\pi \frac{i}{N}}$.

VP de A_a associée à v_k: $\hat{a}_k = \sum_j a_j \omega_N^{-kj}$ (transformée de Fourier de a).

Toute matrice circulante est normale, diagonalisée par la base (v_k).

Th. de convolution: $\mathcal{F}(x * y)_k = (\mathcal{F}x)_k (\mathcal{F}y)_k$. FFT: $O(N \log N)$.

4. Algèbre Linéaire Quantitative

4.1. Décomposition SVD

$A \in \mathbb{C}^{N\times M}$, rang r: $A = USV^*$, $U \in \mathbb{C}^{N\times r}$, $V \in \mathbb{C}^{M\times r}$ orth., $S = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_r)$, $s_k > 0$.

Construction: vect. propres de $A^* A$ (herm., ≥ 0) donnent V et $s_k = \sqrt{\lambda_k}$; puis $U_k = A \frac{V_k}{s_k}$.

$A = \sum_{k=1}^r s_k U_k V_k^*$ (somme de matrices rang 1).

Géométrie: sphère $\xrightarrow{V^*}$ sphère $\xrightarrow{S}$ ellipse (demi-axes s_k) $\xrightarrow{U}$ ellipse orientée.

4.2. Normes matricielles

$\|A\| = s_1(A)$ (norme induite, $=$ plus grande VP de $A^* A$ au carré sous racine).

$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^* A)} = \|(s_1, \ldots, s_r)\|_2 \geq \|A\|$.

Les deux sont sous-multiplicatives. $\rho(A) \leq \|A\|$; égalité si A normale.

4.3. Eckart-Young

$A_k = \sum_{n=1}^k s_n U_n V_n^*$ minimise $\|A - B\|$ (opér.) et $\|A - B\|_F$ pour $\mathrm{rang}(B) \leq k$.

$\|A - A_k\| = s_{k+1}$.

ACP: $A^* A =$ matrice de covariance empirique; SVD cherche directions de variance max.

4.4. Séries de Neumann

$\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow (A - B)^{\{-1\}} = A^{-1} \sum_{n \geq 0} (BA^{-1})^n$.

Perturbation de rang 1: $(A + \varepsilon u u^*)^{\{-1\}} = A^{\{-1\}} - \varepsilon A^{\{-1\}} u u^* \frac{A^{\{-1\}}}{1 + \varepsilon u^* A^{\{-1\}} u}$ (formule Sherman-Morrison).

4.5. Conditionnement

$\kappa(A) = \|A\| \|A^{\{-1\}}\| = \frac{s_1}{s_r}$.

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$.

κ grand: erreurs amplifiées, matrice “mal posée numériquement”.

5. Calcul Fonctionnel

Spectral: $f(A) = Pf(D)P^{\{-1\}}$ si $A = PDP^{\{-1\}}$. Instable si $\kappa(P)$ grand.

Séries entières: $\|A\| < r \Rightarrow f(A) = \sum a_n A^n$ converge normalement.

$e^A = \sum \frac{A^n}{n!}$. $\frac{\mathrm{d} e^{tA}}{\mathrm{d}t} = A e^{tA}$. $e^{tA} x_0$ résout $\dot{x} = Ax$.

Attention: $e^A e^B = e^{A+B}$ ssi $AB = BA$.

Holomorphe (f hol. sur $U \supset \sigma(A)$):

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z-A)^{\{-1\}} dz$$

$f(A)g(A) = (fg)(A)$. $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Résolvante $(z-A)^{\{-1\}}$: holomorphe hors $\sigma(A)$. Développement via Neumann autour de $z_0 \notin \sigma(A)$.

6. Spectre & Asymptotique

Gelfand: $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(A)$.

$\rho(A) < 1 \Rightarrow A^n \to 0$ (via $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint z^n (z-A)^{\{-1\}} dz$, $z^n \to 0$ uniform. sur le contour).

Continu: $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\|e^{tA}\| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.

Forme de Schur ou exercice 17 (norme $\|\cdot\|_\varepsilon$): preuves alternatives sans calc. fct. holomorphe.

7. Méthodes Itératives ($Ax = b$)

7.1. Méthode de Richardson

$x_{n+1} = x_n - \alpha(Ax_n - b)$, $e_n = (I - \alpha A)^n e_0$.

A HDP, $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_N$: converge si $\alpha < \frac{2}{\lambda_N}$.

Optimal: $\alpha_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_N}$, $\rho = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \approx 1 - \frac{2}{\kappa}$.

$n_{\mathrm{iter}} \approx \kappa \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ iters pour atteindre précision ε.

Préconditionneur: remplacer A par $P^{\{-1\}}A$ (avec $P \approx A$ facile à inverser).

Jacobi: $P = \mathrm{diag}(A)$, $\alpha = 1$. Gradient pour fct. quadratique = Richardson.

7.2. Méthodes de Krylov

$K_{n(A,b)} = \mathrm{Span}(b, Ab, ..., A^{n-1}b)$.

$A^{\{-1\}}b \in K_N$ (si $b, Ab, ..., A^{N-1}b$ dép. lin.: combinaison $\Rightarrow A^{\{-1\}}b$ dans espace de plus petit indice).

Arnoldi: Gram-Schmidt sur $\left(q_1 = \frac{b}{\|b\|}, Aq_1, Aq_2, ...\right)$.

$(A_n)_{ij} = \langle q_i, Aq_j\rangle$: Hessenberg sup. ($= 0$ pour $i \geq j+2$).

A hermitienne $\Rightarrow A_n$ tridiagonale (Lanczos, coût $O(Nn)$ au lieu de $O(Nn^2)$).

7.3. Gradient conjugué (A HDP)

$x_n = \arg\min_{x\in K_n} \|x - A^{\{-1\}}b\|_A$ (A-norme $\|y\|_A^2 = y^*Ay$).

$\|x_n - A^{\{-1\}}b\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^n \|x_0 - A^{\{-1\}}b\|_A$.

$\sqrt{\kappa}$ itérations vs κ pour Richardson: gain majeur quand κ grand.

Impl.: récurrence courte via compl. de Schur sur A_n tridiagonale. Toujours meilleur que Richardson.

Polynômes de Chebyshev: fournissent le polynôme q optimal sur $[\lambda_1, \lambda_N]$ avec $q(0) = 1$.

8. Méthodes pour $Ax = \lambda x$

Puissance: $x_{n+1} = A\frac{x_n}{\|Ax_n\|} \to$ VP de $|\lambda|$ max. Taux: $\left(|\lambda_{\{N-1\}}\frac{|}{|}\lambda_N|\right)^n$.

Puissance inverse: $x_{n+1} = A^{\{-1\}}\frac{x_n}{\|A^{\{-1\}}x_n\|} \to$ VP de $|\lambda|$ min.

Shift: travailler avec $\alpha A + \beta$ pour cibler une VP. Analogue du conditionnement: $|\lambda_N - \lambda^*\frac{|}{|}\lambda_1 - \lambda^*|$.

Arnoldi/Lanczos VP: Galerkin sur K_n, résoudre $A_n c = \lambda c$ (petit dense).

Calcul de VP intrinsèquement itératif (Galois). Ne jamais passer par le polynôme caractéristique.

Méthode du gradient sur quotient de Rayleigh $\approx$ puissance inverse (exercice 10.5).

9. Analyse Complexe (rappel rapide)

Holomorphe: $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ indépendant de la direction.

Cauchy-Riemann: $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$.

Cauchy: $\oint_C f dz = 0$ (f hol. dans U simplement connexe).

Formule de Cauchy: $\oint_C \frac{f(z)}{z-\lambda} dz = 2\pi i f(\lambda)$.

$\oint_{C_r} z^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$.

Déformation de contour: valeur ne change pas si on reste dans le domaine d'holomorphie.

Théorème de Liouville: bornée + analytique sur $\mathbb{C} \Rightarrow$ constante $\Rightarrow$ tout polynôme a une racine dans $\mathbb{C}$.