Aide-Mémoire : Probabilités (MDD303)

Basé sur le polycopié de cours

1

Espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

— Ω : Ensemble des résultats possibles.

— $\mathcal{F}$: Tribu (σ-algèbre). Contient Ω, stable par complémentaire et union dénombrable.

— $\mathbb{P}$: Mesure de probabilité ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$, σ-additive).

Tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: Plus petite tribu contenant les intervalles ouverts/fermés de $\mathbb{R}$.
Variable Aléatoire (v.a.) : Application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable (i.e., $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).
Loi d'une v.a. $\mathbb{P}_X$: Mesure sur $\mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

1.1 Espérance et Variance

Espérance : $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$.

— Si $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \sup\{\mathbb{E}[\delta] : \delta \text{ étagée}, 0 \leq \delta \leq X\}$.

— Cas général : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$. Intégrable si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

2

Mesure de Lebesgue (λ) : Unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda([a, b]) = b - a$.
Loi à densité : Il existe $f \geq 0$ borélienne telle que :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

Condition : $\int_\mathbb{R} f(x)dx = 1$.
Formule de Transfert (Fondamentale) :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} g(x)d\mathbb{P}_X(x)$$

Si densité f : $\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \int_\mathbb{R} g(x)f(x)dx}$

Lois usuelles :

— Uniforme $\mathcal{U}([a, b])$: $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

— Exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

— Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

3

Événements : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. **Variables** : $X_1, \ldots, X_n$ sont indép. si $\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i)$$

Propriétés :

— X, Y indép $\implies \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.

— X, Y indép et intégrables $\implies \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

— X, Y indép $\implies \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (Réciproque fausse).

— $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ (si indép).

Lemme des coalitions : Si X_i indép, les fonctions de paquets disjoints $(f(X_1, X_2), g(X_3))$ sont indép.

4

Modes de convergence :

1. **Presque sûre (p.s.)** : $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$.
2. **En moyenne** (L^r) : $\lim \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$.
3. **En probabilité** ($\mathbb{P}$) : $\forall \epsilon > 0, \lim \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$.

Hiérarchie :

$$L^r \implies \mathbb{P} \quad \text{et} \quad p.s. \implies \mathbb{P}$$

(p.s. n'implique pas L^r et vice-versa).
Lemmes de Borel-Cantelli (Évènement A_n i.s. = infiniment souvent) :

1. $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0$.
2. $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$ ET (A_n) **indépendants** $\implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 1$.

5

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i i.i.d. **Critère de récurrence** : La marche repasse par 0 une infinité de fois p.s. ssi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$$

Résultats (Marche symétrique sur $\mathbb{Z}^d$) :

— $d = 1$: Récurrente ($\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$).

— $d = 2$: Récurrente ($\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n}$).

— $d \geq 3$: Transiente ($\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim n^{-d/2}$).

6

Tribu asymptotique (de queue) : $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$.
Loi du 0-1 de Kolmogorov : Si (X_n) indépendants, tout événement $A \in \mathcal{T}$ vérifie $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. *Exemple : convergence d'une série aléatoire.*
Inégalité de Kolmogorov : Pour X_i centrées indép. :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{Var}(S_n)$$

7

Inégalités :

— Markov ($X \geq 0$) : $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$.

— Bienaymé-Chebyshev : $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$.

Soit (X_n) i.i.d avec $\mathbb{E}[X_1] = m$.

Loi Faible (WLLN)

Si moment d'ordre 2 (ou 1) existe :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

Loi Forte (SLLN)

Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m$$

8

Définition ($X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) : Pour toute fonction f continue bornée :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

Fonction de Répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Caractérise la loi. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ en tout point de continuité de F_X.

9

Définition : $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mathbb{P}_X(x)$. **Propriétés** :

- $\phi_X(0) = 1$, $|\phi_X(u)| \leq 1$, continue.
- **Injectivité** : ϕ_X caractérise la loi de X.
- **Indépendance** : X, Y indép $\implies \phi_{X+Y} = \phi_X \cdot \phi_Y$.
- **Moments** : $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.
- **Affine** : $\phi_{aX+b}(u) = e^{iub}\phi_X(au)$.

Théorème de Paul Lévy : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall u, \phi_{X_n}(u) \to \phi_X(u)$.

Tableau des f.c. usuelles :

Loi	$\phi_X(u)$
$Ber(p)$	$1 - p + pe^{iu}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\exp(\lambda(e^{iu} - 1))$
$\mathcal{E}(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$e^{ium - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$

10

Soit (X_n) i.i.d avec $\mathbb{E}[X_i] = m$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

TCL

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Interprétation : La somme de v.a. i.i.d. centrées réduites converge vers une Gaussienne standard.

11

Modélise des événements rares/aléatoires (sauts). **Définition** : Processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$.

- Accroissements indépendants et stationnaires.
- $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Instants de saut T_n :

- Temps inter-arrivées $Y_i = T_i - T_{i-1}$ sont i.i.d $\sim \mathcal{E}(\lambda)$.
- Temps d'arrivée $T_n = \sum Y_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

12

Modèle de milieux poreux. Chaque arête est ouverte avec proba p, fermée avec $1 - p$. **Cluster ouvert** $C(0)$: composante connexe de 0. **Probabilité de percolation** : $\Theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty)$.

Transition de phase : Il existe $p_c \in (0, 1)$ tel que :

- $p < p_c \implies \Theta(p) = 0$ (pas de percolation).
- $p > p_c \implies \Theta(p) > 0$ (percolation).

Théorème (Kesten) : Pour $\mathbb{Z}^2$, $\boxed{p_c = 1/2}$.