Нотатки до курсу аналізу та геометрії

Професор: Christian Gérard

Єгор Коротенко

30 червня 2025 р.

Анотація

Це конспекти, зроблені на курсі OLMA251 - Аналіз та Геометрія, викладеному професором Крістіаном Жераром. Ці конспекти містять інформацію, отриману під час лекцій, а також мою думку, розуміння та речі, вивчені поза цим курсом.

Ці конспекти перекладено українською та англійською мовами за допомогою інструменту `sci-trans-git` [3]

Зміст

Розділ 1

Вступ

1.1 Простори $\mathbb{R}^d$

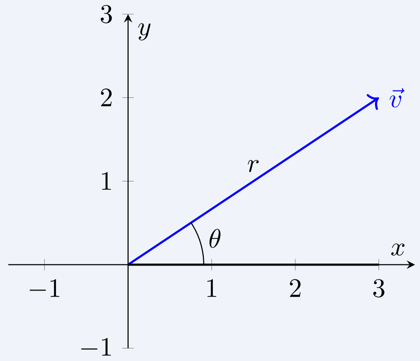
Визначення 1.1.

$$\mathbb{R}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{R}\}$$

$x_1, \dots, x_d$ декартові координати X

Приклад 1.2. $d = 2$ полярні координати:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$0 \le r \le \infty \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



Визначення 1.3. $\mathbb{R}^d$ є векторним простором над $\mathbb{R}$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$$
$$\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\vec{0}_d = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

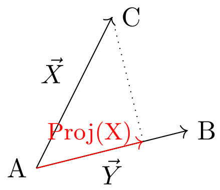
Визначення 1.4. Скалярний **добуток**:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_d y_d = \|X\|\|Y\| \cos(\theta) \text{ (де } \theta \text{ є кут між } X \text{ та } Y)$$

Інтуїція. Цей добуток говорить нам *how closely the vectors point in the same direction* (косинус прямує до 1, коли θ прямує до 0^{o}, і косинус прямує до 0, коли θ прямує до 90^{o}). І цей добуток дозволяє нам отримати проекцію X на Y за формулою:

$$Proj(X) = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}$$

$X \cdot Y$ дає longeur X і Y разом, поділивши цю longeur на $\|Y\|$ (longeur Y), ми отримуємо longeur X на Y, нам залишається помножити цю longeur на одиничний вектор (longeur 1), який вказує в тому ж напрямку, що й Y, (ми отримуємо його за допомогою $\frac{Y}{\|Y\|}$)



Твердження 1.5. Скалярний добуток задовольняє такі властивості:

1. білінійність $\lambda \in \mathbb{R}$
   (а) $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
   (б) $(\lambda X) \cdot Z = \lambda(X \cdot Z)$
   (в) $Z \cdot (X + Y) = Z \cdot X + Z \cdot Y$
   (г) $Z \cdot (\lambda X) = \lambda(Z \cdot X)$
2. симетрія $X \cdot Y = Y \cdot X$
3. додатно визначений: $X \cdot X \geq 0$ та $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Твердження 1.6. Коші-Шварца:

$$|X \cdot Y| \leq (X \cdot X)^{\frac{1}{2}} (Y \cdot Y)^{\frac{1}{2}}$$

Визначення 1.7. Евклідова норма вектора X позначається:

$$\|X\| = \left(\sum_{n=1}^{d} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2} = (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}$$

часто позначається $\|X\|_2$

Інтуїція. За теоремою Піфагора, це довжина цього вектора.

Твердження 1.8. Норма має такі властивості:

1. $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\| \; X \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (нерівність трикутника)
3. $\|X\| \geq 0$ et $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Доведення. З (2)

$$\begin{aligned}\|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot (X + Y) + Y \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2\end{aligned}$$

Визначення 1.9. Норма на $\mathbb{R}^d$ це відображення $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ таке що:

1. $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
2. $N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ і $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Приклад 1.10.

$$\|X\|_1 = \sum_{n=1}^{d} |x_i|$$
$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

1.2 Простір

Твердження 1.13. .

1. $(X|Y)$ є "лінійним відносно Y"
   - $(Z|X+Y) = (Z|X) + (Z|Y)$
   - $(Z|\lambda X) = \lambda(Z|X) \quad \lambda \in$
   - $(Z|\lambda X + \mu Y) = \lambda(Z|X) + \mu(Z|Y)$
   - $(X+Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$
   - $(\lambda X|Z) = \overline{\lambda}(X|Z) \quad \lambda \in$
   - $(\lambda X + \mu Y|Z) = \overline{\lambda}(X|Z) + \mu(Y|Z)$
2. $(Y|X) = \overline{(X|Y)}$
3. $(X|X) = \sum_{n=1}^{d} \overline{x_i} x_i = \sum_{n=1}^{d} |x_i|^2$
   $(X|X) \geq 0$ і $(X|X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Доведення. Маємо Коші-Шварц:

$$(X|Y) \leq (X|X)^{\frac{1}{2}} (Y|Y)^{\frac{1}{2}}$$

те саме доведення, що й раніше

Покладемо:

$$\|X\| (\text{або } \|X\|_2)$$
$$= (X|X)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

гільбертова норма

$$\|X\|^2_{\in}$$

Лема 1.14.

$$\|X\| = \underset{\|Y\|\leq 1}{sup}|(X|Y)|$$

Доведення. $|(X|Y)| \leq \|X\|\|Y\| \leq \|X\|$ якщо $\|Y\| \leq 1$

$$\underset{\|Y\|\leq 1}{sup}|(X|Y)|$$

Інше значення:

$$X \neq 0 \quad Y = \frac{X}{\|X\|} = \lambda X \quad \lambda = \frac{1}{\|X\|}$$
$$\|Y\| = |\lambda|\|X\| = \frac{1}{\|X\|}\|X\| = 1$$
$$(X|Y) = (X|\frac{X}{\|X\|}) = \frac{1}{\|X\|}(X|X) = \|X\|$$
$$sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\}$$
$$\|X\| \leq sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \quad (\text{взяти } Y = \frac{X}{\|X\|})$$

Інші норми на

$\|X\|_1 = \sum_{n=1}^{d} |x_i| \quad X \in$

$\|X\|_\infty = \underset{1\leq i\leq d}{sup} |x_i|$

1.3 Відстань на $\mathbb{R}^d$

Ми забуваємо про норму та скалярний добуток. Ми вводимо відстань

Визначення 1.15. Відстань — це відображення:

$$d : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \longmapsto d((X, Y))$$

яке задовольняє наступні властивості:

1. $d(X, Y) = d(Y, X)$ (симетрія)
2. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ (нерівність трикутника) $\forall X, Y, Z$
3. $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$ та $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

Визначення 1.16. Евклідова відстань

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$$

Приклад 1.17. Відстані

1. $d_2(X,Y) = \|X-Y\|_2$ (евклідова відстань на $\mathbb{R}^d$)

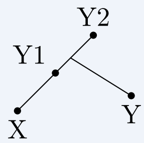
2. $d_1(X,Y) = \|X-Y\|_1$
   $d_\infty(X,Y) = \|X-Y\|_\infty$

3. логарифмічна відстань на $\mathbb{R}_+$: $d(a,b) = |b-a|$

$$\log_{10}(a) = \frac{\log(a)}{\log(10)}$$

   $x, y \in]0, +\infty[$
   $d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})|$
   i є відстань на $]0, +\infty[$
   $d_{\log}(100, 110) = \log_{10}(1,1)$

4. відстань SNCF



   $d(X,Y)$ звичайна відстань у $\mathbb{R}^2$ покладемо:

$$\delta(X,Y) = \begin{cases} d(X,Y) \text{ якщо } X, 0, Y \text{ вирівняні} \\ d(X,0) + d(0,Y) \text{ інакше} \end{cases}$$

Твердження 1.18. Нехай E метричний простір і дві метрики d_1 та d_2. Метрики називаються **еквівалентними** якщо $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такими, що:

$$\forall x, y \in E, \quad a \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b \cdot d_1(x,y)$$

Розділ 2

Метричні простори

Визначення 2.1. E, оснащений функцією відстані d (див. Визначення 1.15), позначається (E, d): метричний простір

Примітка 2.2. якщо $d_1 \neq d_2$ (E, d_1) не має нічого спільного з (E, d_2)

Примітка 2.3. Запам'ятайте наступну версію нерівності трикутника:

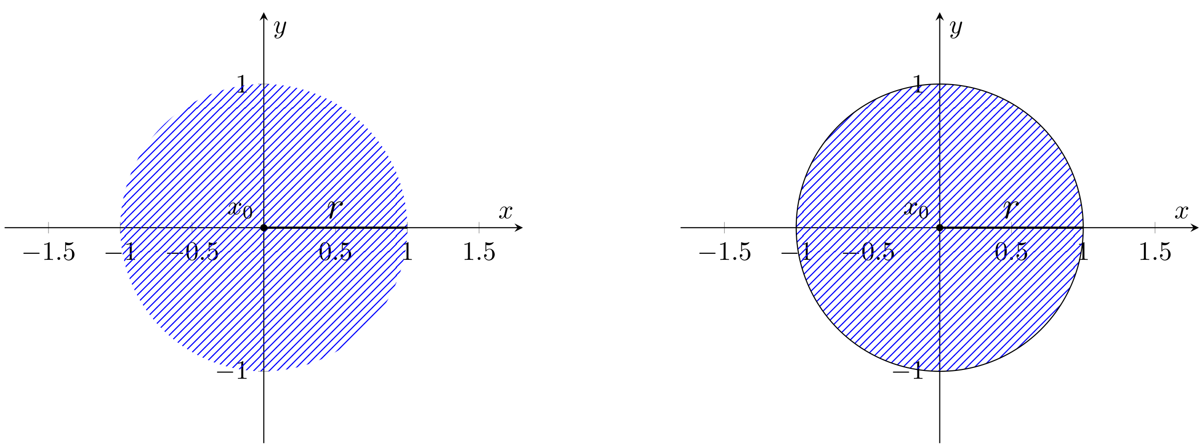
$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

Примітка 2.4. Індуктована відстань:
Якщо (E, d) метричний простір і $U \subset E$. Я можу restreidnre d на $U \times U$: (U, d) також є éspace metrique.

2.1 Кулі у метричному просторі

Визначення 2.5. (E, d) метричний простір. Нехай $x_0 \in E$ та $r \geq 0$

1. $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\ \}$ відкрита куля з центром x_0, радіусом r
2. $B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$ замкнена куля з центром x_0, радіусом r



(а) відкриті кулі (тобто $d(x_0, x) < r$)

(б) замкнені кулі (тобто $d(x_0, x) \leq r$)

Лема 2.6. .

1. $B(x_0, 0) = \emptyset$ (тому що неможливо мати точки, відстань до яких строго менша за 0)
2. $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
3. $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$ якщо $r_1 < r_2$
4. $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$ якщо $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$

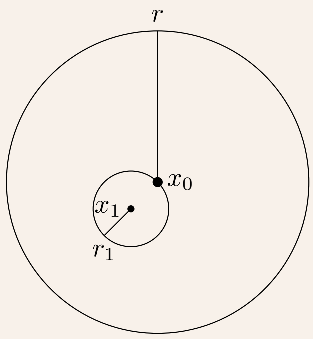


Рис. 2.2: Лема 4

Доведення. Я припускаю, що $d(x_0, x_1) \leq r$
Нехай $x \in B(x_1, r_1)$ тому $d(x_1, x) < r_1$ показати: $x \in B(x_0, r)$ (тобто $d(x_0, x) < r$?)
Нерівність трикутника говорить мені:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \leq r \\ &\Rightarrow x \in B(x_0, r) \end{aligned}$$

Приклад 2.7. 1. $E = \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|$

$$B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$$

2. $E = \mathbb{R}^d, \quad d = 2, 3, \quad X = (x_1, \ldots, x_d)$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} x_i$$
$$\|X\|_\infty = \text{макс}_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

$$d_2(X, Y) = \|Y - X\|_2 = \|\vec{XY}\|_2$$
$$d_1(X, Y), d_\infty(X, Y)$$

Властивість. У $\mathbb{R}^n$

- $d_\infty(X, Y) \leq d_1(X, Y) \leq n d_\infty(X, Y)$
- $d_\infty(X, Y) \leq d_2(X, Y) \leq \sqrt{n} d_\infty(X, Y)$

2.2 Обмежені підмножини (E, d)

Визначення 2.8. Нехай $A \subset E$. A є обмеженою якщо $\exists R > 0$ і $\exists x_0 \in E$ таке що

$$A \subset B(x_0, R)$$

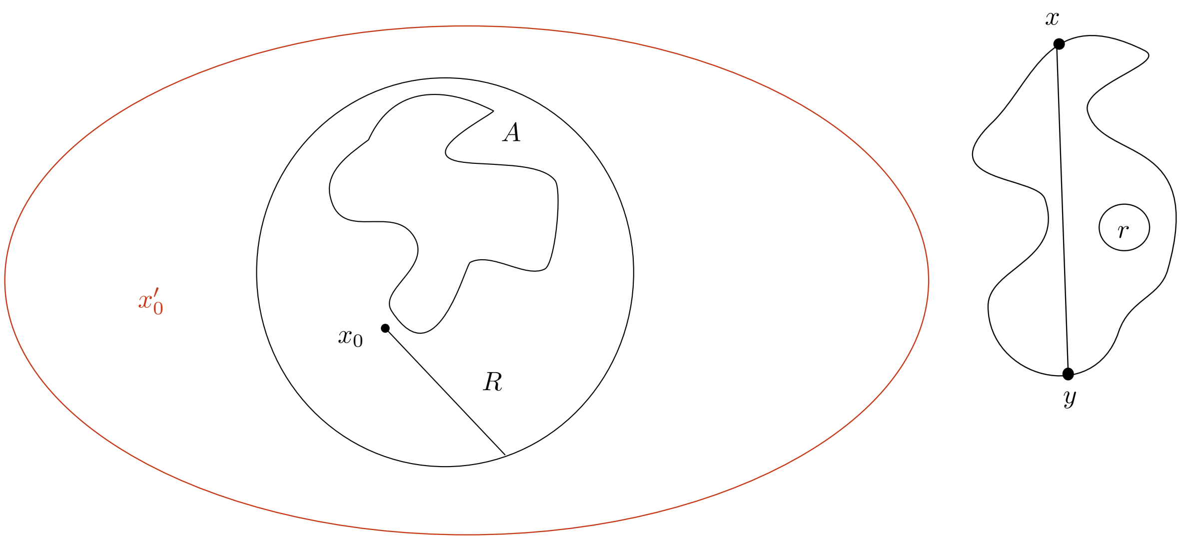


Рис. 2.3: Приклад обмеженої множини

Лема 2.9. Наступні властивості є еквівалентними:

1. A є обмеженою
2. $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$ такий що $A \subset B(x_0, r)$
3. $\exists r > 0$ такий що $\forall x, y \in A$ виконується $d(x, y) < r$

Доведення. леми

- $(1) \Rightarrow (2)$:
  Гіпотеза: $\exists x_1 \in E, \exists r_1 \in E$ така що $A \subset B(x_1, r_1)$
  Нехай $x_0 \in E$. Мета: знайти r такий що $A \subset B(x_0, r)$ якщо $x \in A$, маємо: $d(x_1, x) < r_1$
  Я хочу: $d(x_0, x) < r$

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \leq d(x_0, x_1) + r_1 < r \quad \text{якщо } r > d(x_0, x_1) + r_1$$

Властивість. 1. Будь-яка скінченна частина є обмеженою

2. Якщо A обмежена і $B \subset A$ тоді B обмежена
3. Об'єднання скінченного числа обмежених є обмеженим

Доведення. з (3).
$A_1, \ldots, A_n$ є обмеженими. Я фіксую $x_0 \in E$, A_i обмежений ($1 \leq i \leq n$), отже $\exists r_i > 0$ такий що $A_i \subset B(x_0, r_i)$ якщо $r = \underset{1 \leq i \leq n}{max}\, r_i$

$$A_i \subset B(x_0, r), \forall i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset B(x_0, r)$$

□

2.3 Обмежені функції

Визначення 2.10. Нехай B — множина. Функція $F : B \to E$ є обмеженою якщо $F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$ є обмеженим.

2.4 Відстань між множинами

Визначення 2.11. Відстань між двома множинами A, B становить:

$$d(A, B) := \underset{x \in A, y \in B}{inf} d(x, y)$$

Інтуїтивно, ми шукаємо дві точки x і y такі, що відстань є найменшою можливою.

Визначення 2.12. Відстань між точкою x та множиною B становить:

$$d(x, B) := \underset{y \in B}{inf} d(x, y)$$

Та сама інтуїція.

Властивість. $\forall x \in A$, $y \in B$, $d(x, y) \geq d(A, B)$ і $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, $y \in B$ така що $d(x, y) \leq d(A, B) + \varepsilon$

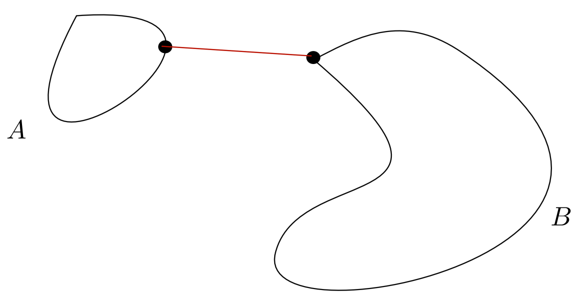


Рис. 2.4: Відстань між множинами

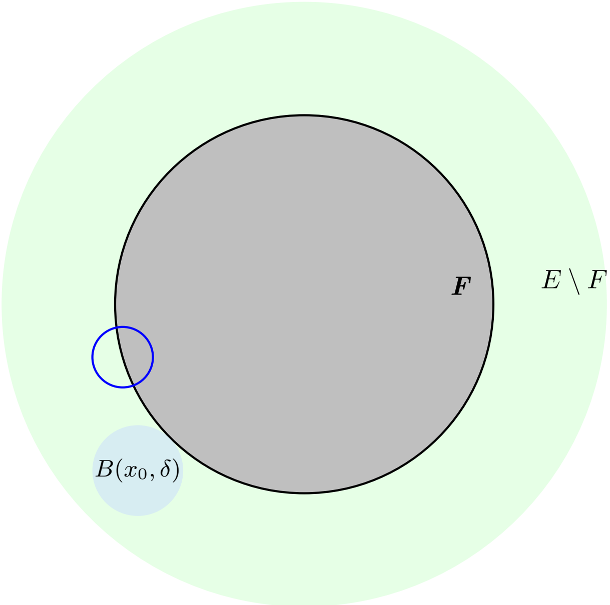
2.5 Топологія метричних просторів

відстань $d(x, y) \longrightarrow$ кулі $B(x_0, r) \longrightarrow$ відкриті множини

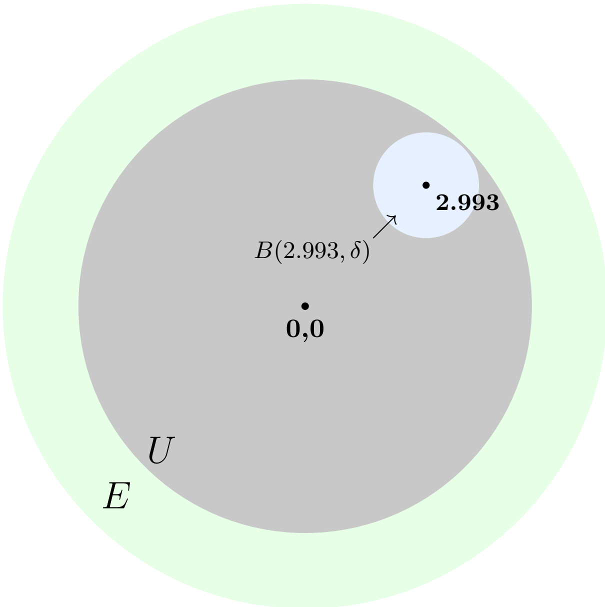
Визначення 2.13. Нехай (E, d) метричний простір.

1. $U \subset E$ є відкритою, якщо $\forall x_0 \in U$, $\exists r > 0\, r(x_0)$ такий, що $B(x_0, r) \subset U$
2. $F \subset E$ є замкненою, якщо $E \setminus F$ є відкритою

$\emptyset$ є відкритою і E є відкритою. $\emptyset$ є замкненою і E є замкненою.



(a) Закрита множина
На межі неможливо знайти кулі, які належать F, оскільки неможливо мати відкриту кулю радіуса $r = 0$. Приклад: темно-синій круг
Для кожної точки в $E \setminus F$ можна знайти відкриту кулю



(б) Відкрита множина
для кожної точки поблизу межі можна знайти кулю нескінченно малу з точками навколо цієї точки, включеними в U.

Рис. 2.5: Демонстрація відкритих і закритих просторів

Примітка 2.14. в $\mathbb{R}$ відкриті інтервали є відкритими (те саме для замкнених)

Примітка 2.15. Відстань між двома відкритими множинами завжди існує, і вона є інфімумом (який ніколи не досягається)

Лема 2.16.
1. $B(x_0, r_0)$ є відкритою.
2. $B_f(x_0, r_0)$ є замкненою.

Доведення.
1. Нехай $x_1 \in B(x_0, r_0)$ $(d(x_0, x_1) < r_0)$.
   Мета: знайти $r_1 > 0$ таке що $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$?

$$x \in B(x_1, r_1):\ d(x_1, x) < r_1$$
$$x \in B(x_0, r_0) \text{ якщо } d(x_0, x) < r_0$$

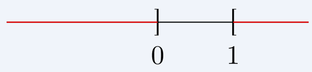
легко:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &\leq d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< r_0 \text{ якщо} \end{aligned}$$

$r_1 < r_0 - d(x_0, x_1) > 0$

$\square$

Приклад 2.17. дивно.
Нехай $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x|$, $A =]0, 1[$ відкритий, не замкнений в $\mathbb{R}$.



Я розглядаю A як частину (A, d). Оскільки $A \setminus A = \emptyset$ є відкритим, то A є замкненим в A. Натомість, межі ніколи не досягаються, тому A є відкритим в (A, d).

Теорема 2.18. .

1. Нехай U_i, $i \in I$ колекція відкритих множин. Тоді, $\cup_{i \in I} U_i$ є відкритою.
   Переклад: Будь-яке об'єднання відкритих множин є відкритою.

2. Якщо $U_1, \ldots, U_n$ є відкритими
   $$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ є відкритою.}$$
   Переклад: <u>скінченний</u> перетин відкритих множин є відкритою.

1. Нехай U_i, $i \in I$ колекція замкнених множин. Тоді, $\cup_{i \in I} U_i$ є замкненою.
   Переклад: Будь-яке об'єднання замкнених множин є замкненою.

2. Якщо $U_1, \ldots, U_n$ є замкненими
   $$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ є замкненою.}$$
   Переклад: <u>скінченний</u> перетин замкнених множин є замкненою.

Доведення. .

1. Нехай $x \in U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Існує i позначений i_0 такий, що $x \in U_{i_0}$, U_{i_0} є відкритою, тому $\exists r > 0$ такий, що $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset U := \bigcup_{i \in I} U_i$.

2. Нехай $x \in U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$.
   Зафіксуємо i. $x \in U_i$, U_i відкритою, тому $\exists r_i > 0$ такий, що $B(x, r) \subset U_i$, $1 \leq i \leq n$, тому $B(x, r) \subset U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$

$\square$

2.6 Алгоритми для доведення, що множина є відкритою/замкненою

Показати, що множина є відкритою	Показати, що множина є замкненою

• **Використовувати визначення :** $\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0 \quad \text{таке що} \quad B(x,r) \subset \mathcal{U}$
• Показати, що $E \setminus \mathcal{U}$ є замкненою.
• Показати, що $\mathcal{U}$ є прообразом відкритої множини при неперервному відображенні.
• Виразити $\mathcal{U}$ як відкриту кулю.
• Записати $\mathcal{U}$ як :
  – об'єднання відкритих множин ;
  – скінченний перетин відкритих множин.
• $\mathcal{U} = \mathrm{Int}(U)$.
• Записати $\mathcal{U} = I_1 \times \cdots \times I_n$ з I_i відкритою.
	• **Використовувати визначення :** $E \setminus V$ є відкритою.
	• **Послідовнісна характеристика :** Будь-яка збіжна послідовність у V, її границя також знаходиться в V.
	• Показати, що V є прообразом замкненої множини при неперервному відображенні.
	• Показати, що V є компактною.

2.7 Внутрішність, замикання, межа

2.7.1 Внутрішність

Визначення 2.19. Нехай $A \subset E$.

1. $x_0 \in E$ є внутрішньою до A якщо $\exists\, \delta > 0$ таке що:
$$B(x_0, \delta) \subset A$$
2. $Int(A)$ (внутрішність A) = усі внутрішні точки A. (також позначається A)

Інтуїція. $Int(A)$ є множиною, яка повністю знаходиться в A і яка знаходиться далеко від країв A.

Твердження 2.20. $Int(A)$ є найбільшою відкритою множиною, що міститься в A. Еквівалентно, $Int(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, що містяться в A.

Доведення.

1. $Int(A) \subset A$: зрозуміло
2. $Int(A)$ є відкритою:
   Нехай $x_0 \in Int(A)$.

   Мета: знайти δ_0 таке що $B(x_0, \delta_0) \subset Int(A)$. Знайти δ_0 таке що якщо $d(x_0, x) < \delta_0$ тоді $x \in Int(A)$?

   Гіпотеза: $x_0 \in Int(A)$. $\exists \delta_1 > 0$ таке що $B(x_0, \delta_1) \subset A$. Ми бачили, що $B(x_0, \delta_1)$ є відкритою. Я стверджую, що $B(x_0, \delta_1) \subset Int(A)$.

   Доведення: Нехай $x \in B(x_0, \delta_1)$. $B(x_0, \delta_1)$ відкрита, отже $\exists \delta_2 > 0$ таке що $B(x, \delta_2) \subset B(x_0, \delta_1) \subset A$. Отже $x \in Int(A)$, отже $B(x_0, \delta_1) \subset Int(A)$.

   $Int(A)$ є відкритою.
3. Якщо U є відкритою і $U \subset A$ тоді $U \subset Int(A)$?

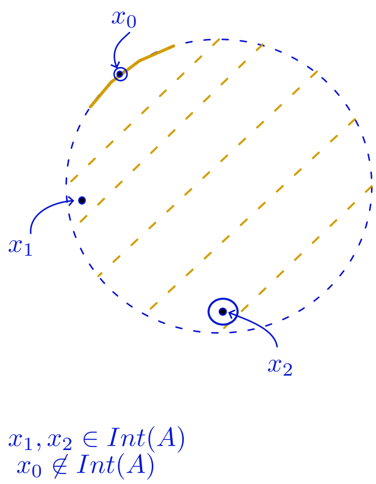


Рис. 2.6: Приклад інтер'єру

$x_0 \in U$. U відкрита $\Rightarrow \exists\delta$ таке що $B(x_0, \delta) \subset U \subset A \Rightarrow x_0 \in Int(A)$

□

2.7.2 Учасник

Визначення 2.21. Нехай $A \subset E$.

1. $x_0 \in E$ є прилягаючою точкою до A, якщо $\forall\delta > 0$, $B(x_0, \delta)$ перетинає A. (еквівалентно $d(x_0, A) = 0$)
2. $Adh(A)$ (замикання або замикання A) = множина точок, прилягаючих до A (також позначається $\overline{A}$)

Інтуїція. Замикання допомагає доповнювати множини. Якщо A є відкритою, то її межі не належать до A, але вони належать до $Adh(A)$.

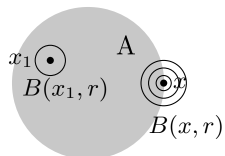


Рис. 2.7: Дотична точка

Твердження 2.22. $Adh(A)$ є найменшою замкненою множиною, що містить A (перетин усіх замкнених множин, що містять A)

Доведення. 1. $A \subset Adh(A)$ очевидно

2. $Adh(A)$ є замкненою?

   Покажемо, що $E \setminus Adh(A)$ є відкритою.

$x_0 \in Adh(A) \Leftrightarrow \forall\delta > 0,\ B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$

$x_0 \notin Adh(A) \Leftrightarrow \exists\delta_0 > 0$ така що $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists\delta_0 > 0$ така що $B(x_0, \delta_0) \subset E \setminus A \Leftrightarrow x_0 \in Int(E \setminus A)$

Тоді:

$$E \setminus Adh(A) = Int(E \setminus A)$$
$$Adh(A) = (Int(\underbrace{A^c}_{=E\setminus A}))^c$$

□

Визначення 2.23. Нехай $A \subset B$. Кажуть, що A є **щільним** у B якщо $B \subset Adh(A)$

Нехай $x_0 \in B$, $\forall\varepsilon > 0\, \exists x_\varepsilon \in A$ такий що $d(x_0, x_\varepsilon) < \varepsilon$

Приклад 2.24.

$$\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\} \text{ щільна в } \mathbb{R}^2$$

Визначення 2.25. альтернатива щільності. Нехай $A \subset B$. A є щільним у B якщо кожна відкрита куля з B містить щонайменше один елемент з A.

2.7.3 Межа

Визначення 2.26. Нехай $A \subset E$. **Межа** A (або край A), що позначається $Fr(A)$ або ∂A, це:

$$Adh(A) \cap Adh(E \setminus A)$$

Приклад 2.27. в $\mathbb{R}$

1. $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$
2. $Int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$
3. $Adh(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
4. $Adh(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
5. $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
6. $Fr(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Приклад 2.28. $E = \{a, b, c\}$ Покладемо:

- $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$
- $d(a, b) = d(b, a) = d(b, c) = d(b, c) = 1$
- $d(a, c) = d(c, a) = 2$

$$B(a, 2) = \{a, b\} = Adh(B(a, 2))$$
$$B_f(a, 2) = \{a, b, c\}$$

Твердження 2.29. 1. $Int(A) \subset A \subset Adh(A)$

2. $E = Int(E \setminus A) \cup Fr(A) \cup Int(A)$ (диз'юнктне об'єднання)

3. $E \setminus Int(A) = Adh(E \setminus A)$

4. $E \setminus Adh(A) = Int(E \setminus A)$

5. $Fr(A) = Adh(A) \setminus Int(A)$

Твердження 2.30. 1. A відкрита $\Leftrightarrow A = Int(A)$

2. A замкнена $\Leftrightarrow A = Adh(A)$

3. $x \in Adh(A) \Leftrightarrow d(x, A) = 0$

4. $x \in Int(A) \Leftrightarrow d(x, E \setminus A) > 0$

2.8 Послідовність у метричному просторі

Визначення 2.31. E множина. Послідовність в E: позначена $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ це функція $u : \mathbb{N} \to E$, де $u(n)$ позначається u_n і є n-тим членом послідовності $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Якщо $E = \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d \ni X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

де $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ послідовності в $\mathbb{R}$

Визначення 2.32. Нехай (x_n) послідовність у E і $x \in E$. Кажуть, що $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ якщо $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ така що якщо $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon)$

Твердження 2.33. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є обмеженою, якщо $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}(\subset E)$ є обмеженою множиною.

Примітка 2.34. в $\mathbb{R}^d$ з d_2 (евклідова відстань)

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$
$$X = (x_1, \dots, x_d)$$
$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i \quad (1 \leq i \leq d)$$

Твердження 2.35. межа збіжної послідовності є унікальною.

Доведення.

$$\text{Якщо } X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \text{ і } X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X'$$
$$d(X, X') \leq \underbrace{d(X, X_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(X_n, X')}_{\to 0} \Rightarrow d(X, X') = 0 \Rightarrow X = X'$$

□

Твердження 2.36. (зв'язок із замиканням)

1. $x \in Adh(A)$ тоді й лише тоді, якщо існує послідовність (x_n) елементів з A така що $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
2. A є замкненою тоді й лише тоді, якщо для будь-якої послідовності (x_n) елементів з A, що збігається до $x \in E$, ми маємо $x \in A$

Інтуїція. 1. Якщо $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ складається з елементів A ($\forall n \in N$, $x_n \in A$), то вона збігається до елемента x, який може бути або в A, або на межі елементів A, тобто на кордоні.

2. Якщо границя будь-якої послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елементів A також знаходиться в A, тоді межа A включена в A. Тому що одна з послідовностей прямує до межі.

Доведення. Доведення Проп. 2.36

1. ($\Leftarrow$) Нехай (x_n) з $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
   Маю $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ і $x_n \in A$, тому
   $$inf_{y\in A}(d(x,y)) = 0 = d(x, A)$$
   $$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in Adh(A)$$
   ($\Rightarrow$) Нехай $x \in Adh(A)$
   $$\begin{aligned}&\Leftrightarrow d(x, A) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A \text{ такий що } d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon\end{aligned}$$
   Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{n}$, покладемо $u_n = x_{\frac{1}{n}}$. $u_n \in A$ $d(x, u_n) < \frac{1}{n}$, тому $\lim_{n\to\infty} u_n = x$
2. ($\Rightarrow$) Нехай A замкнена, тому
   $$A = Adh(A)$$
   Якщо (x_n) послідовність в A, що збігається до x.
   $$x \in Adh(A) = A$$
   ($\Leftarrow$) Кажуть, що $Adh(A) \subset A$. Оскільки $A \subset Adh(A)$, тому $A = Adh(A)$

□

2.9 Послідовності Коші

Визначення 2.37. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність в E є <u>Коші</u> якщо:
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ таке що } \forall n, p \geq N(\varepsilon), d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$$

Інтуїція. Послідовність Коші — це ніби ми вимірюємо точку і локалізуємо її, тобто:

1. Ми кажемо, що вона знаходиться між 0 та 1.
2. Потім ми уточнюємо і кажемо, що вона знаходиться між 0.5 та 0.6.
3. Далі, між 0.55 та 0.56

Ми можемо нескінченно збільшувати рівень точності. Це і є ідея послідовності Коші.

Твердження 2.38.

1. Будь-яка послідовність Коші є обмеженою.
2. Будь-яка збіжна послідовність є послідовністю Коші

Доведення.

1. Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність Коші. Тоді, за визначенням
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ така що } \forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) < \varepsilon$$
Нехай $\varepsilon = 1$. Отже $\exists N \in \mathbb{N}$ така що $\forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) < 1$, отже $\forall n \geq N$, $d(x_n, x_N) < 1$. Тоді маємо:
$$\forall n \in N, d(x_n, x_N) < 1 + \overbrace{\sup_{1\leq i\leq N} d(x_n, x_N)}^{=:r_0}$$
Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B(x_N, 1 + r_0)$ отже $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ обмежена.
2. Нехай (x_n) послідовність з $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ з $x \in E$.
   - Гіпотеза: $\frac{\varepsilon}{2} > 0\, \exists N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ така що $\forall n \geq N(\frac{\varepsilon}{2}), d(x_n, x) \leq \varepsilon/2$
   - Довести: $\varepsilon > 0\, \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ така що $\forall n, p \geq M(\varepsilon), d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$
$$d(x_n, x_p) < d(x_n, x) + d(x, x_p) \text{ якщо } n, p \geq N(\frac{\varepsilon}{2})\, d(x_n, x_p) \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Визначення 2.39. (E, d) є повним, якщо будь-яка послідовність Коші в E є збіжною.

Визначення 2.40. Метричний простір (E, d) є **повним** якщо будь-яка послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елементів з E збігається до границі x яка також належить до E.

Інтуїція. Не дуже коректно говорити, але можна сказати, що послідовність Коші $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ завжди збігається, оскільки існує момент $N \in \mathbb{N}$, після якого елементи дуже близькі, але границя не завжди належить множині, в якій ця послідовність є послідовністю Коші.

Наприклад, послідовність $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ зі значеннями в $\mathbb{Q}$, яка збігається до $\sqrt{2}$ в $\mathbb{R}$. В $\mathbb{R}$ вона є збіжною та Коші, але в $\mathbb{Q}$ вона є Коші, але не збіжною, оскільки границя $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Приклад 2.41. Метричний простір $(]0, 1], d)$ з d евклідовою відстанню не є повним, оскільки нехай послідовність: $x_n = \frac{1}{n}$ границя якої дорівнює 0. Однак, $0 \notin]0, 1]$. Отже, цей простір не є повним.

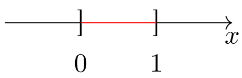


Рис. 2.8: $(]0, 1], d)$ не є повним

Приклад 2.42. Простір $(\mathbb{Q}, d)$ не є повним. Бо можна взяти послідовність x_n яка прямує до $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

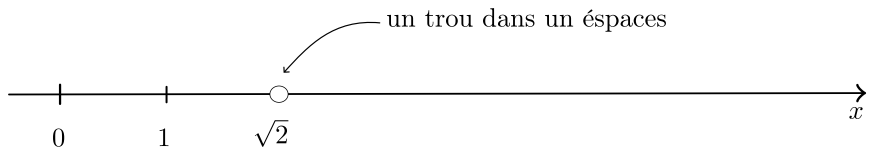


Рис. 2.9: $\mathbb{Q}$ неповний

Твердження 2.43. $\mathbb{R}^d$ зі звичайною відстанню є повним.

Доведення.

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

$$|x_i - y_i| \leq d(X,Y) = \|X - Y\|_2 \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

дійсні послідовності $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ є Коші якщо (X_n) є Коші. □

Властивість. $\mathbb{R}$ є повним

Доведення. (Випливає з властивості верхньої межі)

Існує $x_i \in \mathbb{R}$ з $1 \leq i \leq d$ таке що $|x_{i,n} - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$d(X,Y) \leq \sqrt{d} \max_{1\leq i\leq d} |x_i - y_i|$$

тому $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$, $X = (x_1, \dots, x_d)$ □

2.10 Підпослідовності

Визначення 2.44. Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність у E. Послідовність

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ з } y_n = x_{\phi(n)}$$

де $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є строго зростаючою називається **підпослідовністю** послідовності (x_n).

Приклад 2.45. Нехай функція $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така що $\phi(n) = 2n$. Тому $(x_n)_{\phi(n)}$ є підпослідовністю $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і:

$$(x_n)_{\phi(n)} = \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

Твердження 2.46.

1. Будь-яка підпослідовність збіжної послідовності збігається до границі цієї послідовності.

   Це означає, що, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ така що $\exists x \in E, \lim_{n\to\infty} x_n = x$

   $$\forall \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ строго зростаюча}, \lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = x$$

2. Якщо (x_n) є послідовністю Коші і має підпослідовність, яка збігається до X, то (x_n) збігається до x.

Доведення. 1. Нехай (x_n) з $\lim x_n = x$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists M(\varepsilon) \text{ таке що якщо } n \geq N(\varepsilon), d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

Нехай $y_n = x_{\phi(n)}$ підпослідовність.

- Мета: Нехай $\varepsilon > 0$, знайти $N(\varepsilon)$ таке що якщо $n \geq N(\varepsilon)$, $d(\underbrace{y_n}_{:=x_{\phi(n)}}, x) \leq \varepsilon$

Я обираю $N(\varepsilon)$ таке що якщо $n \geq N(\varepsilon)$ тоді $\phi(n) \geq M(\varepsilon)$, тому $d(y_n, x) d(x_{\phi(n)}, x) \leq \varepsilon$. Це можливо, оскільки $\phi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $N(\varepsilon) = M(\varepsilon)$

2. - Гіпотеза1: $\forall \varepsilon > 0\, \exists M(\varepsilon)$ таке що якщо $n, p \geq M(\varepsilon)$ $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$
   - Гіпотеза2: $\forall \varepsilon > 0\, \exists P(\varepsilon)$ таке що якщо $p \geq P(\varepsilon), d(y_p, x) \leq \varepsilon$, $d(y_p, x) = d(x_{\phi(p)}, x)$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\phi(p)}) + d(x_{\phi(p)}, x) \quad \text{за нерівністю трикутника}$$

$$d(x_n, x_{\phi(p)}) \leq \varepsilon \text{ якщо } n \geq M(\varepsilon) \text{ та } \phi(p) \geq M(\varepsilon)$$

$$d(x_{\phi(p)}, x) \leq \varepsilon \text{ якщо } p \geq P(\varepsilon)$$

Якщо $n \geq M(\varepsilon)$, я обираю p такий що $\phi(p) \geq M(\varepsilon)$ та $p \geq P(\varepsilon)$. Я фіксую це p!

$$\text{якщо } n \geq M(\varepsilon) \text{ тоді } d(x_n, x) \leq 2\varepsilon$$

□

2.11 Процес побудови внутрішнього та замикання

Я маю $A \subset \mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^2$ (або $\mathbb{R}^3$). Я маю знайти $Int(A)$ та $Adh(A)$

1. Я малюю A на аркуші
2. Я думаю, що $Int(A) = C$ (C має бути включеним в A!)
   (а) Я показую, що C є відкритою (легко), тому
   $$C \subset Int(A)$$
   бо $Int(A)$ є найбільшою відкритою множиною, включеною в A.
   (б) Я показую, що $Int(A) \subset C$, тобто я показую, що точки в A, але не в C, не належать $Int(A)$: я беру $X \in A, X \notin C$, я показую, що $X \notin Int(A)$ Я будую послідовність (X_n) з $X_n \notin A$ але $X_n \to X$.
3. Я думаю, що $Adh(A) = B$ (потрібно, щоб $A \subset B$)
   (а) Я показую, що B є замкненою (легко)
   $$\text{тому } Adh(A) \subset B$$
   (б) Ми показуємо, що $B \subset Adh(A)$: Ми фіксуємо $X \in B$, ми шукаємо послідовність (X_n) з $X_n \in A$ і $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$. Ми розглядаємо лише $X \in B, X \notin A$

Приклад 2.47.
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 4, x \neq y\}$$

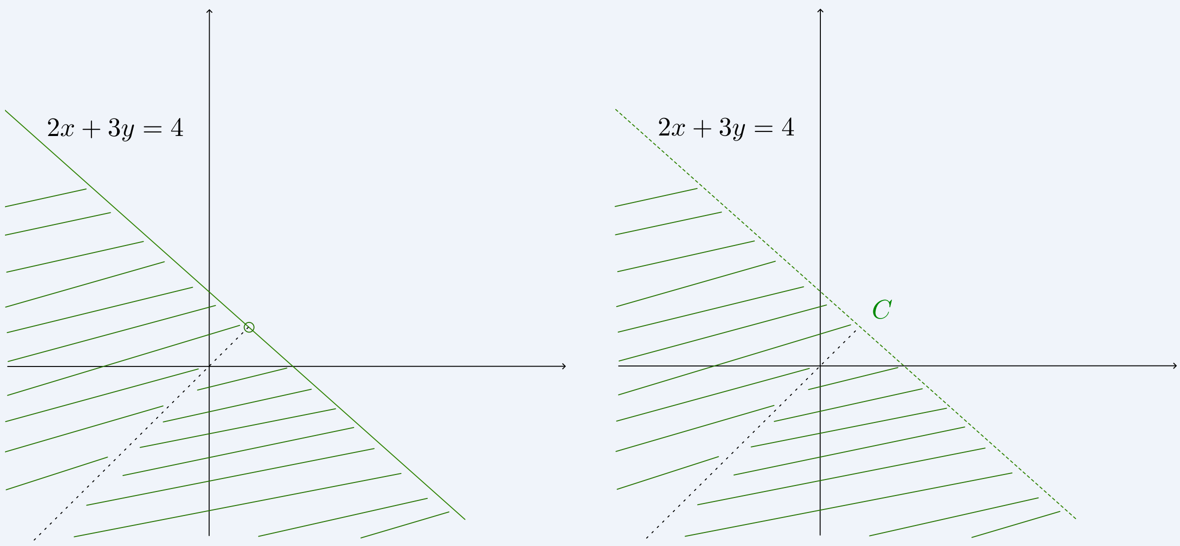


Рис. 2.10: Приклад інтер'єру

.

- Я припускаю, що $Int(A) = C = \{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x \neq y\}$
- Опукле: $\{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x < y\} \cup \{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x > y\}$

Я будую послідовність (X_n) з $X_n \notin A$ але $X_n \to X$. Нехай $X \in A, X \notin C$, $X = (x, y)$ отже: $2x + 3y = 4 \quad x \neq y$

$$X_n = (x, y + \frac{1}{n})$$

$$2x_n + 3y_n = 2x + 3y + \frac{3}{n} = 4 + \frac{3}{n} > 4$$

$$X_n \notin A \text{ але } X_n \to X$$

Приклад 2.48.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{-1}\}$$

$Int(A) = \emptyset$? $C = \emptyset$

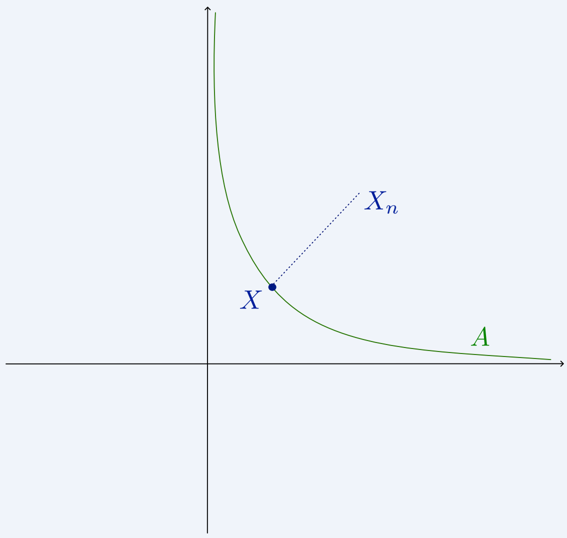


Рис. 2.11: Приклад внутрішньої частини гіперболи

$\emptyset$ відкрита, тому $C \subset Int(A)$
Нехай $X \in A \quad X \notin C$, тому $X \in A$.

$$X_n := (x, y + \frac{1}{n}) \quad X_n \notin A$$

$$x_n y_n = xy + \frac{x}{n} = 1 + \frac{x}{n} \neq 1$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \text{ тому } X \notin Int(A)$$

$$Int(A) = \emptyset$$

Приклад 2.49.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{-1}\}$$

$Adh(A) = ?$
Я думаю, що $Adh(A) = A$ $(B = A)$. Достатньо показати, що A є замкненою.

$$x > 0 \quad y \leq \frac{1}{x} \quad y \geq \frac{1}{x}$$

Якщо $X_n = (x_n, y_n) \quad X_n \in A$ і $X_n \to X$, тоді $X \in A$

$$X = (x, y) \quad \substack{x_n \to x \\ y_n \to y} \quad \substack{x_n \to x \\ \frac{1}{x_n} \to y} \quad (x_n > 0)$$

тому $x > 0$ і $y = \frac{1}{x}$ тому $X \in A$

$$A \text{ є замкненою}$$

Приклад 2.50.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 4, x \neq y\}$$

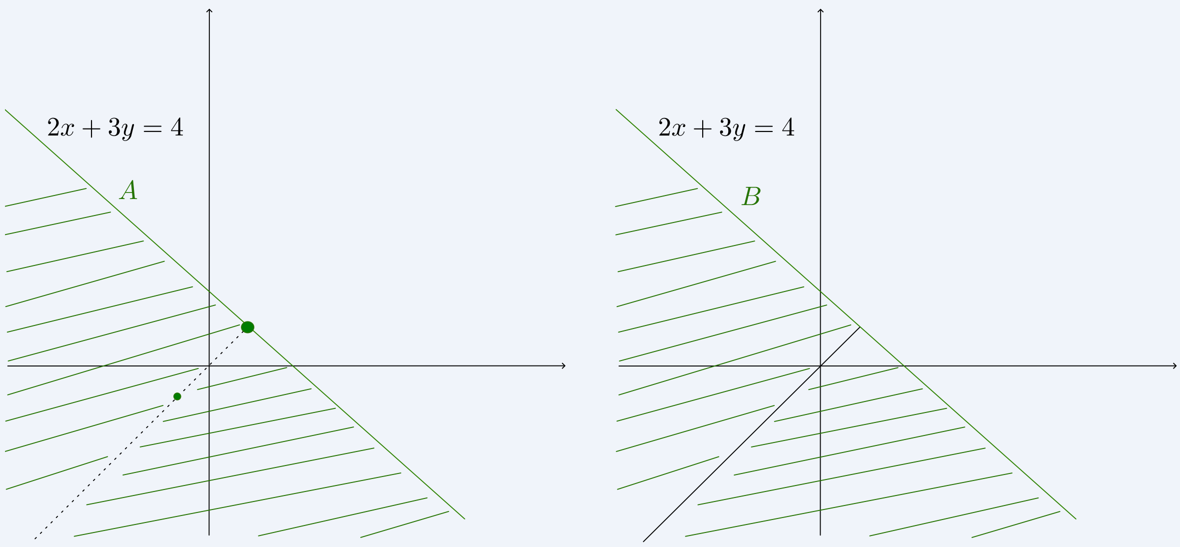


Рис. 2.12: example-adherence

.

1. B є замкнений (легко), тому $Adh(A) \subset B$
2. Нехай $X \in B$. Показуємо, що $X \in Adh(A)$ (шукаємо $X_n \in A$ з $X_n \to X$)
   Я просто дивлюся на $X \in B, X \notin A$

$$X_n = (x_n, y_n) \in A \quad x_n \to x \text{ і } y_n \to y$$

$$x_n = x + \frac{1}{n}, y_n = y = x$$

$$X_n \to X \text{ і } 2x_n + 3y_n = 2x + 3y - \frac{2}{n} \leq 4 i x_n \neq y_n$$

тому $X_n \in A$

Приклад 2.51.

$$A = \{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| < 1\}$$

$$Int(A) = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$$

$$Adh(A) = \{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

Приклад 2.52.

$$A = \{(x,y) \mid x > 0, y = \sin(\frac{1}{n})\}$$

$Adh(A) = A \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ $Int(A) =$

fdsf fds fds

2.12 Компактність

Визначення 2.53. Нехай $F \subset E$. Відкрите покриття F — це сукупність $(U_i)_{i \in I}$ де U_i є відкритими множинами і $F \subset \cup_{i \in I} U_i$ ("множини U_i покривають F")

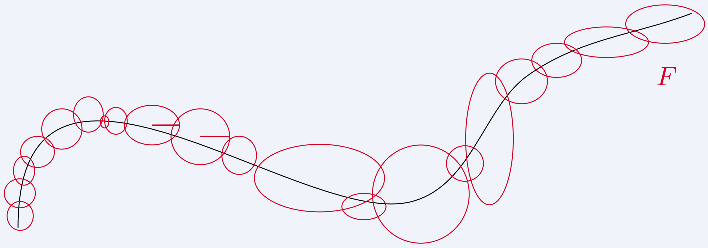


Рис. 2.13: відкрите покриття

Приклад 2.54.

- $U_x = B(x, \frac{1}{2})$
- $\bigcup_{x \in F} U_x$ містить F
- $(U_x)_{x \in F}$ відкрите покриття F

Визначення 2.55. $K \subset E$ є компактною, якщо з будь-якого відкритого покриття $(U_i)_{i \in I}$ множини F можна виділити скінченне підпокриття: я можу вибрати $i_1, \ldots, i_n \in I$ такі що

$$F \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

Властивість. Скінченна множина є компактною.

$$F = \{a_1, \ldots, a_p\} \quad a_j \in E$$

$(U_i)_{i \in I}$ покриває F. Я обираю a_j (точка з F), існує $i \in I$ позначений як $i(j)$ такий, що

$$a_j \in U_{i(j)} \quad F \subset U_{i(1)} \cup \ldots \cup U_{i(p)}$$

Теорема 2.56. Характеристика за допомогою послідовностей.

$K \subset E$ є компактною тоді і тільки тоді, якщо кожна послідовність елементів з K має підпослідовність, що збігається до елемента з K.

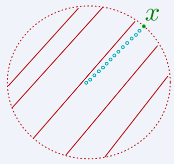


Рис. 2.14: Компактність з послідовностями

Приклад 2.57.

- $E = \mathbb{R}^2$
- $F = B(x_0, r)$ не компактна
- $x_n \in F$, $x_n \to x$, $x \notin F$
- якщо $y_n = x_{\phi(n)}$, $y_n \to x$ але $x \notin F$

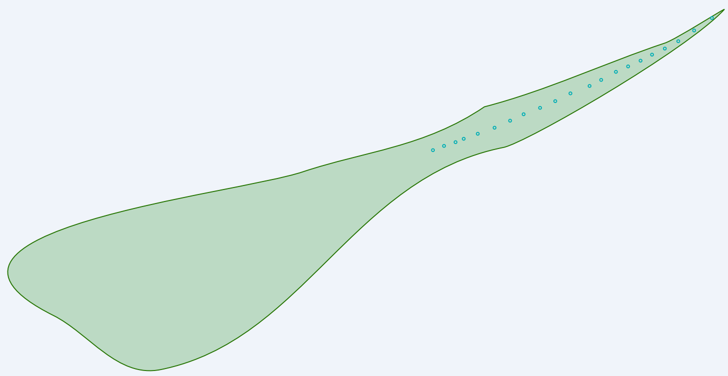


Рис. 2.15: suite-sans-sous-suite-convergente

Приклад 2.58.

$$F = \{(x, y) : x \geq 0, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$u_n = (n, 0)$ (u_n) послідовність в F без збіжної підпослідовності.

Твердження 2.59.

1. K компактний $\Rightarrow$ K замкнений і обмежений. (обернене твердження є хибним загалом!)
2. Якщо K компактний і F замкнений, тоді $K \cap F$ є компактним.
3. Якщо K компактний, будь-яка послідовність Коші в K збігається в K

Доведення.

1. Нехай K компакт. K замкнений якщо (u_n) послідовність в K, яка збігається до u,

тоді $u \in K$.

зрозуміло: (u_n) має підпослідовність $v_n = u_{\phi(n)}$ з $v_n \to v \in K$, $u_n \to u$, тому $v_n \to u \Rightarrow u = v \Rightarrow u \in K$

K обмежений:

Нехай $U_x = \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$ відкрите покриття K. Однак K компактний, тому існують $x_1, \dots, x_n \in K$, такі що $K \subset \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, 1)$, тому K обмежений.

2. K компактний і F замкнений. (u_n) послідовність в $K \cap F$. $u_n \in K$. $\exists$ підпослідовність $v_n = u_{\phi(n)}$ з $v_n \to x \in K$. $v_n \in F, v_n \to x$, F замкнений тому $x \in F$, $x \in K \cap F$.

3. Нехай (u_n) послідовність Коші в K. (u_n) має підпослідовність $v_n = u_{\phi(n)}$, яка збігається до $x \in K$. $u_n \to x \in K$

□

2.12.1 Компактність у $\mathbb{R}^n$ зі звичайною відстанню

Теорема 2.60. (Borel-Lebesgue)
в $\mathbb{R}^n$ зі звичайною відстанню K є компактною тоді і тільки тоді, якщо K є замкненою та обмеженою

Твердження 2.61. Замкнені кулі $B_f(x_0, r)$ є компактними в $\mathbb{R}^n$.

- Тягне за собою теорему: Нехай K замкнений та обмежений. K обмежений, отже $K \subset B_f(0, r)$ з r великим, отже $K = K \cap B_f(0, r)$. Отже K компактний.

Доведення. до проп. 2.61

1. $n = 1$. Показати: $[a, b]$ є компактним.

   Нехай $(U_i)_{i \in I}$ відкрите покриття для $[a, b]$. Нехай F: множина $x \in [a, b]$ такі що $[a, x]$ покривається скінченною кількістю U_i.

   Мета: показати, що $b \in F$! (якщо $x \in F$, і $x' \leq x$ $x' \in F$)

   (а) $F \neq \emptyset$: $a \in F$ $[a, a] = \{a\}$

   (б) $c = sup(F)$. Показуємо, що $c = b$
   Припустимо, що $c < b$.
   - c належить одному з U_i позначений U_{i_0}
   - U_{i_0} є відкритим, $c \in U_{i_0}$ отже $\exists \delta_0 > 0$ такий що $]c - \delta_0, c + \delta_0[\subset U_{i_0}$
   - $c = sup(F)$: $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in F$ з $c - \delta < x_\delta \leq c$

   $$\delta = \delta_{0,2} \quad \exists x_{\delta_0} \in F, c - \delta_{0,2} < x_{\delta_0}$$

   $[a, x_{\delta_0}]$ покривається $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ і $]c - \delta_0, c + \delta_0[\subset U_{i_0}$ отже $[a, c + \delta_{0,2}]$ покривається $U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, отже $c + \delta_{0,2} \in F$ суперечить тому, що $c = sup(F)$. Отже $c = b$.
   F це $[a, b[$ або $[a, b]$. $b \in F$ $\exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ такі що $[a, b] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, $[a, b]$ компактний.

□

2.13 Межі та неперервність

2.13.1 Межі

Я беру $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ два метричні простори і $F : E_1 \to E_2$. $x_0 \in E_1, l \in E_2$.

Визначення 2.62. .

1. Границя:
$$\lim_{x \to x_0} F(x) = l$$
якщо $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ така що якщо $d_1(x_0, x) < \delta$ тоді $d_2(l, F(x)) < \varepsilon$
2. F неперервна в x_0 якщо $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$
3. F є неперервною (на E) якщо вона неперервна в кожній x_0 з E

Твердження 2.63. Наступні властивості є еквівалентними:

1. $F : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ є неперервною.
2. $\forall U_2 \subset E_2$ відкритою, $F^{-1}(U_2)$ є відкритою в E_1.
3. $\forall F_2 \subset E_2$ замкненою, $F^{-1}(F_2) \subset E_1$ є замкненою.
4. $\forall (x_n)$ послідовність в E_1 з $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ маємо:
$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$$

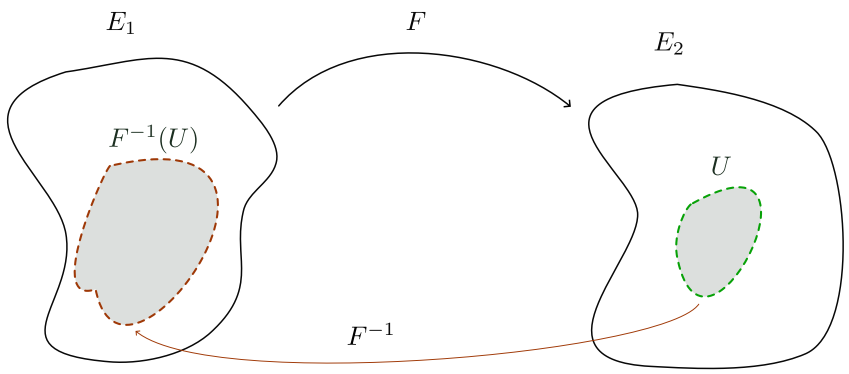


Рис. 2.16: топологічна неперервність

Приклад 2.64.
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \sin(y) - e^x > 1\}$$
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto F((x, y)) = x \sin(y) - e^x \end{aligned}$$
очевидно неперервна.
$$U = F^{-1}(\underbrace{]1, +\infty[}_{\text{відкрита множина в } \mathbb{R}})$$

Доведення. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$: Гіпотеза: F неперервна і $U_2 \subset E_2$ є відкритою.
Висновок: $U_1 = F^{-1}(U_2)$ є відкритою?

Я фіксую $x_0 \in U_1$ $(F(x_0) \in U_2)$.

1. U_2 відкрита $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ така що $B_2(F(x_0), \varepsilon_0) \subset U_2$
2. F неперервна в x_0:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ така що } d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_2(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$$

$$x \in B_1(x_0, \delta) \Rightarrow F(x) \in B_2(F(x_0), \varepsilon)$$

$\delta_0 =$ той δ що працює для ε_0

$$x \in B_1(x_0, \delta_0) \Rightarrow F(x) \in B_2(F(x_0), \varepsilon_0)$$

Отже $B_1(x_0, \delta_0) \subset F^{-1}(U_2)$. Отже $F^{-1}(U_2)$ відкрита.

$2 \Rightarrow 3$: : $F^{-1}(U_2)^c = F^{-1}(U_2^c)$

□

Приклад 2.65. результат цієї пропозиції. Візьмемо функцію: $f(x) = x^2$. $f^{-1}(]4,9[) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x^2 < 9\} =]-3,-2[\cup]2,3[$. Іншими словами, неперервність f (очевидно) дає, що $U =]4,9[$ відкритий, тоді $f^{-1}(U)$ також відкритий.

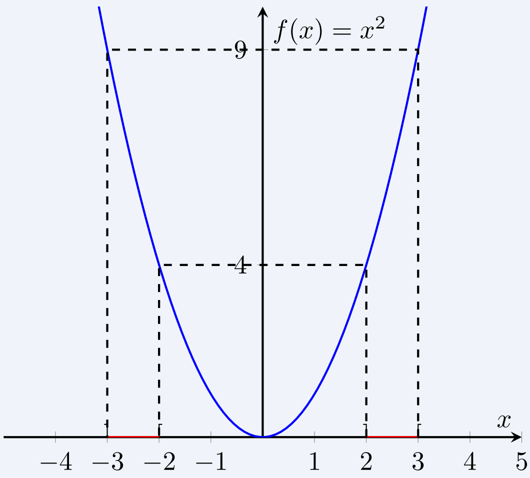


Рис. 2.17: Приклад для $f(x) = x^2$

Розділ 3

Функції багатьох змінних

3.1 Вступ

Основа:$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ $D \subset \mathbb{R}^n$

$$F : D \to \mathbb{R}^p$$

на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ звичайні відстані, на D відстань успадкована від $\mathbb{R}^n$.
з декартовими координатами

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n))$$

де $F_i : D \to \mathbb{R}$

$$F : D \to \mathbb{R}^p \text{ continue}$$

ми знаємо:

Лема 3.1.

$$F : D \to \mathbb{R}^p iiii, :$$

кожне $F_i : D \to \mathbb{R}$ є неперервним

Доведення. $Y_n = (Y_{1,n}, \ldots, Y_{p,n})$ послідовність $\mathbb{R}^p$. $Y_n \to Y$ тоді і тільки тоді, коли $Y_{i,n} \to Y_i$ $(1 \leq i \leq p)$ □

Твердження 3.2. Нехай $f, g : D \to \mathbb{R}$ неперервні.

- $f + g, f \times g$ є неперервними на D
- якщо $g(X) \neq 0$, $\forall X \in D$, $\frac{f}{g}$ неперервна на D
- якщо $f(D) \subset I$ інтервал і $\phi : I \to \mathbb{R}$ неперервна, тоді $\phi \circ f : D \to \mathbb{R}$ є неперервною.
- $$P : X \to \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq d} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_n}$$

  $a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \in \mathbb{R}, d =$ степінь P.
  $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна.

3.2 Як показати, що множина є відкритою або замкненою

Згідно з пропозицією 2.63, якщо $f : D \to Q$ є неперервною і $K \subset Q$ відкрита і $K_f \subset Q$ замкнена, тому:

- $f^{-1}(K)$ також є відкритою

- $f^{-1}(K_f)$ також є замкнутою

Це дозволяє нам спростити докази того, що множина є замкнутою або відкритою. Ось кілька прикладів:

Приклад 3.3.

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 2x_2x_3^2 < 2, \sin(x_1x_2) > 0\}$$
$$D = D_1 \cap D_2$$

$$D_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 2[) \qquad f_1(x) = x_1^2 + 2x_2x_3^2$$
$$D_2 = f_2^{-1}(]0, +\infty[) \qquad f_2(x) = \sin(x_1x_2)$$

D_1, D_2 відкриті, тому D відкритий.

Приклад 3.4.

$$D = \{(x_1, x_2) : \frac{e^{x_1-2x_2^2}}{x_1^2+3x_2^4} \geq 1\}$$

$$D = f^{-1}([1, +\infty[) \qquad f(x) = \frac{e^{x_1-2x_2^2}}{x_1^2+3x_2^4}$$

$[1, +\infty[$ є замкненим у $\mathbb{R}$, тоді D також є замкненим, оскільки f неперервна на $[1, +\infty[$

3.3 Зв'язок із компактністю

Теорема 3.5. Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ неперервна і $K \subset \mathbb{R}^n$ компактна. Тоді, $F(K)$ є компактним у $\mathbb{R}^p$

Примітка 3.6. Можна замінити $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ на E, F метричні простори.

Примітка 3.7. U відкритий, f неперервна $\not\Rightarrow f(U)$ відкритий:

Приклад 3.8.

$$f(]0, 1[) = [-1, 1]$$
$$f(x) = \sin(2\pi x)$$

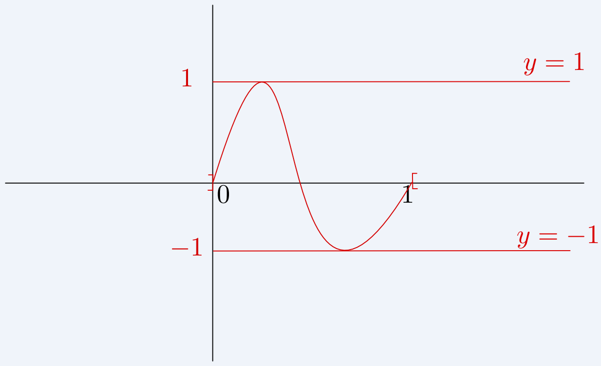


Рис. 3.1: Приклад, що образ відкритої множини не є відкритою

Приклад 3.9.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \arctan x. \end{aligned}$$

$$f(\underbrace{\;]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\;}_{\text{некомпактний}}) = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{некомпактний}}$$

Доведення. Нехай $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність в $F(K)$. Маємо: $v_n = F(u_n)$ де $u_n \in K$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність в K, K компакт, отже: $\exists$ підпослідовність $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ з

$$u_{\phi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \in K$$

F неперервна: отже $F(u_{\phi(n)}) = v_{\phi(n)} \to F(u) \in K$. (v_n) має підпослідовність $(v_{\phi(n)})$ яка збігається до $F(u) \in F(K)$, отже $F(K)$ компактна! □

Теорема 3.10. Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна і $K \subset \mathbb{R}^n$ компактна. Тоді f є обмеженою на K і досягає своїх меж. Тобто, $Q := f(K)$ є обмеженою і досягає меж.

Доведення. Weierstrass: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $K = [a, b]$.

Я беру (E, d) замість $\mathbb{R}^n$. f обмежена на K: $\exists c_1, c_2$ такі що

$$c_1 \leq f(x) \leq c_2, \forall x \in K \Leftrightarrow f(K) \subset [c_1, c_2]$$

Це зрозуміло, оскільки $f(K)$ є компактною в $\mathbb{R}$, тому обмежена.

$$m = \underset{x\in K}{inf} f(x) = inf\ f(K) \qquad\qquad M = \underset{x\in K}{sup} f(x) = sup\ f(K)$$

Потрібно показати: $\exists x \in K$ такий що $f(x) = m$ і $\exists x' \in K$ такий що $f(x') = M$

$m = inf\ f(K)$, це означає, що

1. $f(K) \subset [m, +\infty[$ (m міноранта для $f(K)$)
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in f(K)$ такий що $y \leq m + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ дає послідовність $y_n \in f(K)$ таку що $y_n \to m$

$$y_n = f(x_n) \qquad\qquad x_n \in K$$

K компактна: $\exists$ підпослідовність $x_{\phi(n)}$ така що

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in K$$

$f : E \to \mathbb{R}$ неперервна, тому

$$f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)} \to f(x)$$

Але, $y_n \to m$, тому $y_{\phi(n)} \to m$ і $y_{\phi(n)} \to f(x)$, тому $m = f(x)$, m досягається.

Щоб показати, що M досягається, доказ ідентичний. □

3.4 Часткова неперервність (непотрібно)

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \to \mathbb{R} \text{ неперервна} \quad D \text{ відкрита}$$

Нехай $A = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, існують відкриті інтервали $I_1, \ldots, I_n$ з $a_i \in I_i$ такі що $I_1 \times \ldots \times I_n \subset D$

Я можу покласти

$$f_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \qquad t \in I_i$$

Приклад 3.11.

$$n = 2 \quad f_1(t) = f(t, a_2) \quad f_2(t) = f(a_1, t)$$

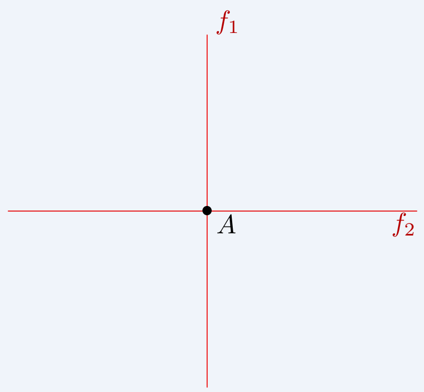


Рис. 3.2: f є неперервною в $A = (a_1, a_2)$

Визначення 3.12. f є частково неперервною в $A = (a_1, \ldots, a_n)$ якщо $f_i(t)$ є неперервними в a_i $(1 \leq i \leq n)$

- неперервність: $f(x_1, x_2) \xrightarrow[(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)]{} f(a_1, a_1)$
- часткова: $f(x_1, a_2) \xrightarrow[x_1\to a_1]{} f(a_1, a_2)$ та $f(a_1, x_2) \xrightarrow[x_2\to a_2]{} f(a_1, a_2)$
- Гарне поняття: неперервність передбачає часткову неперервність (зворотне хибне)

Приклад 3.13.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ якщо } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \text{ якщо } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

неперервна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- частково неперервна в $(0,0)$

$$f(x_1, 0) = \begin{cases} 0 \text{ якщо } x_1 = 0 \\ 0 \text{ якщо } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$f(0, x_2) = 0 \, \forall x_2$$

- не є неперервною в $(0,0)$:

$$x_1 = r\cos(\theta) \quad x_2 = r\sin(\theta)$$

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \begin{cases} 0 \text{ якщо } r = 0 \\ \frac{r^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} = \cos(\theta)\sin(\theta) \text{ якщо } r \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{r \to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos(\theta)\sin(\theta) \neq 0 \text{ якщо } \theta \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \ldots$$

Розділ 4

Диференціювання функцій від кількох змінних

4.1 Вступ

$n = 1$: як визначити $f'(x_0)$?

1. $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
2. DL: $f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ де $a_1 = f'(x_0)$

$$f : D \to R \quad D \text{ відкритий} \quad X_0 \in D \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

Визначення 4.1. f диференційовна в X_0 у напрямку $\vec{u}$ ($\neq \vec{0}$) якщо функція

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = f(X_0 + t\vec{u}). \end{aligned}$$

диференційовна в $t = 0$

Інакше кажучи, похідна за напрямком (у напрямку вектора $\vec{u}$) задається так:

$$D_u f(X_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \tag{4.1}$$

У випадку $\mathbb{R}$ ми мали визначення похідної:

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Напрямок був завжди той самий (вісь x), це можна розглядати як взяття вектора $u = (1)$ і використання лише осі x як напрямку, і ми отримуємо рівняння (4.1)

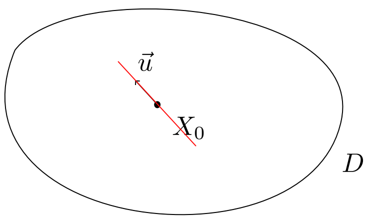


Рис. 4.1: Напрямна похідна

$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ канонічна база $\mathbb{R}^n$, f має частинні похідні в X_0, якщо f диференційовна в X_0 за напрямками $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$.

$$\frac{d}{dt} f(X_0 + t\vec{e_i}) \mid_{t=0}$$

позначається

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$$

Натомість функція може бути диференційовною вусі напрямкив одній точці, алене бутипродовжується в цій точці, ось

Приклад 4.2.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ якщо } x_2 = x_1^2 \text{ і } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \text{ інакше} \end{cases}$$

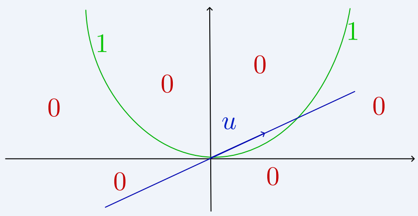


Рис. 4.2: Приклад диференційовної, але не неперервної функції

$$f((0,0) + t\vec{u}) = f(t\vec{u}) = 0$$

якщо $t \neq 0$ і t малий, маємо, що f диференційовна в усіх напрямках.

Але, f не є неперервною в $(0,0)$:

$$X_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \quad X_n \to (0,0)$$

$$\forall n, f(X_n) = 1 \quad f(X_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(0,0)$$

Визначення 4.3. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ відкрита та $X_0 \in D$, функція $f : D \to \mathbb{R}$ є **диференційовною** в X_0 якщо існує вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що

$$f(X_0 + \vec{X}) = f(X_0) + \vec{u} \cdot \vec{X} + \|\vec{X}\|\varepsilon(\vec{X})$$

де $\lim_{\vec{X}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{X}) = 0$

Інтуїція. Пропоную поміркувати над тим, що означає це визначення. Нагадаємо, що інтуїтивно означає похідна у випадку $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ ($n = 1$). Інтуїтивно, якщо збільшити функцію, яку ми диференціюємо, вона поводиться і виглядає як лінія. У випадку $R^n = \mathbb{R}^2$, якщо збільшити функцію, вона виглядає як площина. Дійсно, це і є ідея похідної: якщо зробити маленький-маленький крок мурашки, переміщення також буде маленьким і рівномірним. Зі збільшенням n, похідна дає скаляри для побудови підпростору розмірності $n - 1$ простору $\mathbb{R}^n$.

Примітка. Щоб показати, що функція диференційовна, достатньо показати, що її частинні похідні неперервні.

4.2 Обмежений Розклад першого порядку

Ця репрезентація похідної як підпростору при збільшенні зображена за допомогою DL першого порядку. З визначення 4.3, цей вектор $\vec{u}$ позначається $\vec{\nabla} f(X_0)$ (градієнт f в X_0)

Твердження 4.4. f диференційовна в $X_0 \Rightarrow f$ диференційовна за всіма напрямками в X_0, і тоді:

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} f(X_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} f(X_0) \end{pmatrix}$$

у базисі $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$

Доведення. f є неперервною в X_0 $|\vec{u} \cdot X| \leq |\vec{u}||X|$

1. неперервність

$$\begin{aligned} |f(X_0 + X) - f(X_0)| &\leq |\vec{u} \cdot X| + \|X\||\varepsilon(X)| \\ &\leq \|X\| \left(\|\vec{u}\| + |\varepsilon(x)|\right) \leq c\|X\| \end{aligned}$$

   отже: $f(X_0 + X) \xrightarrow[X \to \vec{0}]{} f(X_0)$

2. .

$$\begin{aligned} g(t) = f(X_0 + t\vec{v}) &= f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot t\vec{v} + \|t\vec{v}\| \cdot \varepsilon(t\vec{v}) \\ &= f(X_0) + t\vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{v} + |t|\|\vec{v}\|\varepsilon_1(t) \\ &= f(X_0) + t\vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

   отже:

$$\frac{d}{dt} f(X_0 + t\vec{v}) \mid_{t=0} = \vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{v}$$

   (взяти $\vec{v} = \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ для координат $\vec{\nabla} f(X_0)$)

□

Визначення 4.5.

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad D \text{ відкрита} \quad f : D \to \mathbb{R} \text{ є } \mathcal{C}^1 \text{ на } D$$

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ відкрита, тоді функція $f : D \to \mathbb{R}$ є класу $\mathcal{C}^1$ на D якщо f є диференційовною в кожній $X \in D$ і функція

$$\begin{aligned} : D &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto \vec{\nabla} f(X) \end{aligned}$$

є неперервною.

Теорема 4.6. f класу $\mathcal{C}^1$ на D тоді і лише тоді, якщо f має неперервні частинні похідні у кожній точці D.

Приклад 4.7.

$$f(X) = f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot (X - X_0) + \|X - X_0\|\varepsilon(X - X_0)$$

лінійний

У $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z)$

$$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$

S: поверхня в $\mathbb{R}^3$, $X_0 \in S$ дотична площина до S у X_0, площина рівняння:

$$f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot X = 0$$

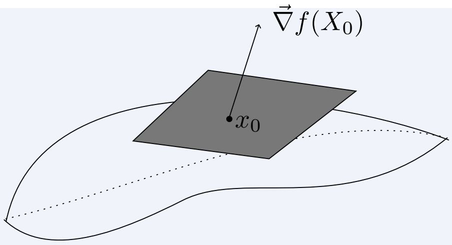


Рис. 4.3: Приклад диференційовної поверхні

4.3 Екстремуми та критичні точки

Визначення 4.8. Екстремум (локальний) f — це мінімум або максимум (локальний) f

- X_0 є локальним максимумом f, якщо: $\exists\delta > 0$ таке що

$$\forall X \in D, f(X) \leq f(X_0) \text{ з } d(X, X_0) \leq \delta$$

- X_0 є локальним мінімумом f, якщо: $\exists\delta > 0$ таке що

$$\forall X \in D, f(X) \geq f(X_0) \text{ з } d(X, X_0) \leq \delta$$

Визначення 4.9. Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ та $X_0 \in D$, тоді якщо

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \vec{0}$$

тому X_0 є **критичною точкою**.

Інтуїція. Зв'язок між екстремумами та критичною точкою:

1. щоб існував екстремум, необхідно, щоб існувала хоча б одна критична точка – це необхідний <u>але не достатній</u> критерій.
2. кожен локальний екстремум є критичною точкою

Критичні точки falicites пошук локальних екстремумів.

Теорема 4.10. Нехай $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ диференційовна, D відкрита і $X_0 \in D$ (інакше, якщо D не відкрита, потрібно $X_0 \in \mathrm{Int}(D)$) тоді:

$$X_0 \text{ локальний екстремум } \Rightarrow X_0 \text{ критична точка}$$

Приклад 4.11. Не кожна критична точка є локальним екстремумом

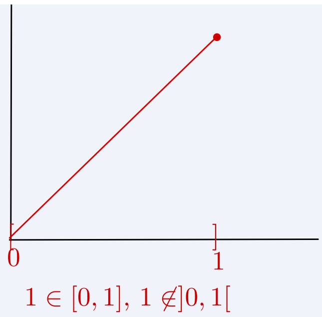


Рис. 4.4: Критична точка, яка не є локальним екстремумом

4.4 Часткові похідні порядку ≥ 2

Визначення 4.12. Нехай D, тоді $f : D \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{C}^k$ якщо $f : D \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{C}^1$ і $\partial_{x_i} f : D \to \mathbb{R}$ є C^{k-1}

Визначення 4.13. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$\partial_x^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

це позначення для похідної вищого порядку.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_2} f$$

Теорема 4.14. Лема Шварца
Якщо $f \in \mathcal{C}^2(D)$ тоді

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) \qquad \forall X \in D, \forall i, j$$

Приклад 4.15. де функція має часткові похідні вищого порядку, але $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ якщо } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \text{ якщо } (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$$r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(2\theta) = \frac{1}{4} r^2 \sin(4\theta)$$

Обчислимо $\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_1} \partial_{x_2}}(0,0)$? Це $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1)$ у $x_1 = 0$ для $g(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)|_{x_2=0}$. Обчислення $g(x_1)$:

1. якщо $x_1 \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$, отже якщо $x_1 \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1$
2. якщо $x_1 = 0$ $f(0, x_2) = 0$

Висновок:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1 \quad \forall x_1$$

отже:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(0,0) = 1$$

$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}f(0,0) = ?$. Бачимо, що, $f(x_2, x_1) = -f(x_1, x_2)$ отже

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}f(0,0) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}f(0,0) = -1$$

4.5 Формула Тейлора другого порядку

Визначення 4.16. Нехай $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Гессіанна матриця: матриця $n \times n$

$$H_f(X_0) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)\right] 1 \le i, j \le n$$

Лема 4.14 дає нам, що $H_f(X_0)$ є симетричною якщо $f \in \mathcal{C}^2(D)$

Нагадаємо:

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

Теорема 4.17. Теорема Тейлора другого порядку
Нехай $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $X_0 \in D$. Тоді

$$f(X_0 + \vec{X}) = f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{X} + \frac{1}{2}\vec{X} \cdot H_f(X_0)\vec{X}$$

приклад у $\mathbb{R}^1$

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + \dots$$

Інтуїція. Отже, гессіанська матриця слугує для обчислення похідної другого порядку.

4.6 Нагадування з лінійної алгебри та зв'язок з аналізом

$$\vec{X} \cdot A\vec{X} = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i a_{i,j} x_j$$

Якщо $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $A = [a_{i,j}]$ маємо: $X \mapsto X \cdot AX$ для вивчення. Якщо $A = A^T, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

"A допускає ортонормований базис власних векторів"

Існує базис $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ з $\mathbb{R}^n$ з $\vec{u_i} \cdot \vec{u_j} = \delta_{i,j}$ (1 якщо $i = j$ і 0 в іншому випадку) та дійсні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n (\lambda_i = \lambda_j$ можливо) такі, що

$$A\vec{u_i} = \lambda_i \vec{u_i}$$

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{u_j}$$

$$\vec{X} \cdot \vec{u_i} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{u_j} \vec{u_i} = y_i$$

$$\|\vec{X}\|^2 = \vec{X} \cdot \vec{X} = \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \vec{u_j}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \vec{u_i}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} y_j y_i \vec{u_j} \cdot \vec{u_i}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

$$A\vec{X} = A \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{u_j} = \sum_{j=1}^{n} y_j A\vec{u_j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \vec{u_j}$$

$$\vec{X} \cdot A\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

1. якщо $\lambda_i > 0$ $(1 \le i \le n)$

$$C = \min \lambda_i > 0$$
$$X \cdot AX \ge C \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = C\|X\|^2$$

2. якщо $\lambda_i < 0$ $(1 \le i \le n)$

$$-C = \max \lambda_i < 0$$
$$X \cdot AX \le -C\|X\|^2$$

Приклад 4.18. $n = 2$

$$f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 3y_2^2$$
$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3$$
$$f(y_1, 0) < f(0, 0) < f(0, y_2)$$

4.7 Природа критичних точок

Теорема 4.19. (Природа критичних точок)
Нехай $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $X_0 \in D$, D відкрита і $\vec{\nabla} f(X_0) = \vec{0}$

1. якщо всі власні значення $H_f(X_0)$ є > 0 (відп. < 0) X_0 є мінімумом (відп. максимумом) локальним.
2. якщо всі власні значення $H_f(X_0)$ є ненульовими але не одного знаку, X_0 не є локальним екстремумом: X_0 є сідловою точкою (точкою перегину).
3. якщо 0 власних значень $H_f(X_0)$, висновок неможливий, (X_0 вироджена критична точка) тобто нічого не можна зробити висновок

Доведення. Доказ теореми 4.19

$$f(X_0 + X) - f(X_0) = \frac{1}{2} X \cdot H_f(X_0) X + \|X\|^2 \varepsilon(X)$$

.

1. якщо $\lambda_i > 0$ $\frac{1}{2} X \cdot H_f(X_0) X \ge C\|X\|^2$ $C > 0$

$$f(X_0 + X) - f(X_0) \ge \|X\|^2 (C + \varepsilon(X)) \ge \frac{C}{2}\|X\|^2 \text{ якщо } \|X\| \text{ досить малий}$$

$$\Rightarrow X_0 \text{ локальний мінімум}$$

2. якщо $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 > 0$

$$H_f(X_0)\vec{u_i} = \lambda_i \vec{u_i}$$

$$f(X_0 + t\vec{u_i}) = f(X_0) + \frac{1}{2}\lambda_i t^2 + t^2\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t\vec{u_i}) = \varepsilon(t)$$

$$f(X_0 + t\vec{u_i}) - f(X_0) = t^2(\frac{1}{2}\lambda_i + \varepsilon(t))$$

якщо $i = 1 < 0$ $|t|$ малий, $i = 2 > 0$ $|t|$ малий, тоді X_0 не є локальним екстремумом

□

Приклад 4.20.

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_f = \{(x, y, z) : z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\}$$

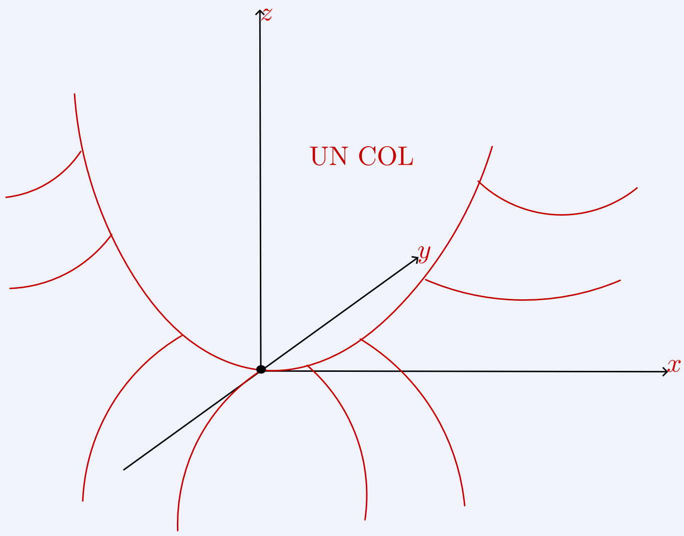


Рис. 4.5: Приклад сідлової точки.

Червоні лінії представляють часткові похідні, і ми бачимо, що одні зростають, а інші спадають, тому ця точка не є ні мінімумом, ні максимумом

Приклад 4.21. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$(a_{1,2} = a_{2,1})$

Власні значення: корені характеристичного пол.:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2}) - a_{1,2}a_{2,1}$$

$$\lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

$$a_{1,1} + a_{2,2} = Tr(A)$$

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = \det(A)$$

$$x^2 - Sx + P = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

$$\det(A) = \text{ добуток власних значень}$$
$$Tr(A) = \text{ сума власних значень}$$

$$A = H_f(X_0)$$

1. якщо $\det(A) < 0$, X_0 сідлова точка
2. якщо $\det(A) > 0$
   (а) $Tr(A) > 0$, X_0 мінімум
   (б) $Tr(A) < 0$, X_0 максимум
3. $\det(A) = 0$, X_0 вироджена критична точка

4.8 Ланцюгове правило диференціювання

Визначення 4.22. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна функція, що диференціюється, та функції $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ..., $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовні та неперервні функції, і

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \end{aligned}$$

тоді

$$h'(t) = \frac{\partial g_1}{\partial h} g_1'(t) + \frac{\partial g_2}{\partial h} g_2'(t) + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial h} g_n'(t)$$

Визначення 4.23. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна диференційовна функція та функції $g_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, ..., $g_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ диференційовні функції тобто

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad g_i : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto g_i(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto h(g_1(t_1, \dots, t_p), \dots, g_n(t_1, \dots, t_p)). \end{aligned}$$

тоді

$$\frac{\partial h}{\partial t_i} = \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial t_i}$$

Розділ 5

Нормовані векторні простори

5.1 Вступ

Визначення 5.1. Нехай E — $\mathbb{K}$-векторний простір і $\lambda \in \mathbb{R}$, **норма** на E є відображенням $N : E \to \mathbb{R}_+$ з:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \quad u \in E$
2. $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$
3. $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$

напівнорма: 1 і 2 тільки.

Ми можемо інтерпретувати 2 як:

$$|N(u) - N(v)| \leq N(u-v)$$

Твердження 5.2. Індуктована норма: Якщо $F \subset E$ є векторним підпростором, я обмежую N до F, тоді (F, N) є нормованим векторним простором.

Приклад 5.3. $E = \mathbb{K}^n$ з $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ з $1 \leq p < \infty$

Твердження 5.4. Трикутна нерівність для $p > 2$ називається **нерівність Мінковського**:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Визначення 5.5. Нехай U множина та $E = \{f : U \to \mathbb{K} \text{ обмежена}\}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(x)| \text{ норма на E}$$

Визначення 5.6. $R([a,b],\mathbb{K}) = \{$ ті $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ інтегровні за Ріманом[a] $\}$

[a]Функція є інтегровною за Ріманом (не обов'язково неперервна), якщо можна обчислити площу, використовуючи інтегрування за сумами Рімана. Тоді, якщо f розривна, вона є інтегровною за Ріманом, якщо розрив є незначним.

Приклад 5.7.

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{з } 1 \le p < \infty$$

$\|.\|_p$ є напівнормою на $R([a,b],\mathbb{K})$ (нерівність Мінковського). $\|f\|_p = 0$ не означає, що $f = 0$ (напр.: $[a,b] = [-1,1]$, $f(x) = x$, $p = 3$).

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

На $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|.\|_p$ є нормою: якщо $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ неперервна і $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 0$ тоді $f(x) = 0 \forall x \in [a,b]$

Приклад 5.8. $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ множина послідовностей u зі значеннями в $\mathbb{K}$

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

для $1 \le p < \infty$

$$l^p(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \{(u_n) : \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p \text{ є збіжною } \}$$

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

є нормою на $l^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$

$$p = \infty \quad l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \{u \text{ обмежена } \}$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

5.2 Топологія нормованих векторних просторів

Твердження 5.9. Нехай $(E, \|.\|)$ нормований векторний простір з

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

відстань на E (індукована $\|.\|$), тоді (E,d) є метричним простором.

Визначення 5.10. Повний нормований векторний простір називається **банаховим простором**.

Випадок скінченної вимірності:

1. Будь-який нормований векторний простір скінченної розмірності є повним (нагадування: пропозиція 2.43) (див. нижче)

2. Якщо E скінченновимірного:

$$K \text{ компактний} \Leftrightarrow K \text{ замкнений та обмежений}$$

Лема 5.11.

$$(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$$

не є повним.

Доведення. Побудуємо послідовність неперервних функцій $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на $[0,1]$, яка сходиться за нормою $\|\cdot\|_1$ до розривної функції f. Це покаже, що границя цієї послідовності за нормою $\|\cdot\|_1$ не належить до $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, отже, цей простір не є повним.

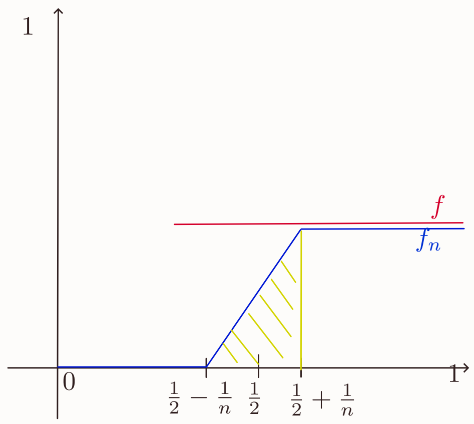


Рис. 5.1: Лема з неповним простором

Визначення послідовності (f_n) **:** для кожного $n\in\mathbb{N}$ визначимо $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ як

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{якщо } x\le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\\ 2n\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) & \text{якщо } \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\\ 1 & \text{якщо } x\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.\end{cases}$$

Кожна f_n є неперервною на $[0,1]$, оскільки вона є кусково-афінною з неперервними з'єднаннями.

Визначення граничної функції : покладемо

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{якщо } x<\frac{1}{2},\\ 1 & \text{якщо } x>\frac{1}{2},\\ \text{довільне значення} & \text{якщо } x=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Тоді f є **розривною** в $x=\frac{1}{2}$, отже $f\notin\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Збіжність (f_n) **до** f **за нормою** $\|\cdot\|_1$ **:**
Маємо

$$\|f_n-f\|_1=\int_0^1|f_n(x)-f(x)|\,dx.$$

Але $f_n(x)=f(x)$ скрізь, крім інтервалу $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right]$ довжиною $\frac{1}{n}$, і на цьому інтервалі $|f_n(x)-f(x)|\le 1$, тому :

$$\|f_n-f\|_1\le\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}1\,dx=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Таким чином, $f_n \to f$ за нормою $\|\cdot\|_1$.

Наслідок : послідовність (f_n) є послідовністю Коші в $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, оскільки :

$$\|f_n - f_p\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f - f_p\|_1 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \xrightarrow[n,p\to\infty]{} 0.$$

Однак, границя f не є неперервною, отже $f \notin \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Висновок : Існує послідовність Коші в $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, яка не сходиться в цьому просторі. Отже, цей простір не є повним.

□

Лема 5.12. У $E = l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ з

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

$B_f(0,1)$ не є компактним.

Доведення. Побудуємо послідовність елементів з $B_f(0,1)$ <u>без збіжної підпослідовності</u>.

$$u \in E \quad u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Я позначаю $u(p)$ замість u_p послідовність у E позначена (u_n), $u_n \in E$. $u_n(p)$ р-й член u_n. Я покладаю

$$u_n(p) = \delta_{n,p} = \begin{cases} 1 \text{ якщо } n = p \\ 0 \text{ інакше} \end{cases}$$

$$\|u_n\|_1 = \sum_{p=0}^{\infty} |u_n(p)| = |u_n(n)| = 1$$

Отже $u_n \in B_f(0,1) \forall n$.
Якщо $v \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$

$$|v(p)| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |v(p)| = \|v\|_1$$

якщо $\|v_n - v\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ тоді $\forall p, v_n(p) \to v(p)$. Припустимо, що $(v_n) = (u_{\phi(n)})$ є підпослідовністю (u_n), яка збігається до v для $\|.\|$. Я фіксую $p \in \mathbb{N}$, $v_n(p) = u_{\phi(n)}(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} v(p)$, але $v_n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, отже $v(p) = 0 \forall p$. v: нульова послідовність, також

$$\|v_n\|_1 = 1 \forall n \text{ та } \|v_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|v\|_1$$

протиріччя

□

5.3 Еквівалентні норми

Визначення 5.13. Дві норми N_1 та N_2 на E є еквівалентними ($N_1 \sim N_2$) якщо $\exists c_1, c_2 > 0$ такі що

- $N_1(u) \leq c_1 N_2(u) \quad \forall u \in E$
- $N_2(u) \leq c_2 N_1(u) \quad \forall u \in E$

$\exists c > 0$ така що

$$cN_1(u) \leq N_2(u) \leq cN_1(u)$$

Примітка 5.14. Якщо $N_1 \sim N_2$ і $N_2 \sim N_3$, тоді $N_1 \sim N_3$

Визначення 5.15. Норми N_1 і N_2 є **топологічно еквівалентними**, якщо вони визначають одні й ті ж відкриті множини.

Теорема 5.16. Нехай N_1, N_2 дві норми, тоді:

$$N_1, N_2 \text{ топологічно еквівалентні } \Leftrightarrow N_1, N_2 \text{ еквівалентні}$$

Приклад 5.17.

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$
2. $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$
3. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$
   Зауважимо, що $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. Чи $\exists c > 0$ така що

$$\|f\|_\infty \leq c\|f_1\| \forall f \in E$$

? Щоб це побачити, побудуємо послідовність (f_n) в E така що $\|f_n\|_1 \to 0$ але $\|f_n\|_\infty \not\to 0$

Теорема 5.18. Нехай E простір скінченної вимірності. Тоді всі норми на E є еквівалентними.

Доведення. Оскільки E є скінченновимірним, існує базис E і, отже, лінійний ізоморфізм між E та $\mathbb{R}^n$ (або $\mathbb{C}^n$). Як наслідок, ми можемо звести задачу до вивчення норм на $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо норму $\|\cdot\|_1$ на E та визначимо відповідну одиничну сферу:

$$S = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}.$$

У скінченновимірному просторі одинична сфера S є компактною (це базується на тому факті, що в $\mathbb{R}^n$ замкнуті та обмежені множини є компактними).

Функція

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|_2$$

є неперервною, оскільки $\|\cdot\|_2$ є нормою (а отже, неперервною функцією). За теоремою Вейєрштрасса, f досягає своїх границь на S. Отже, існує:

- Мінімум $m = \min_{x\in S} f(x) > 0$ (строгість $m > 0$ пояснюється тим, що $x \neq 0$ для $x \in S$).
- Максимум $M = \max_{x\in S} f(x)$.

Нехай $x \in E$ довільний, $x \neq 0$. Запишемо $x = \|x\|_1\, y$, де $y = \frac{x}{\|x\|_1}$ належить S. Тоді,

$$\|x\|_2 = \|x\|_1\, \|y\|_2.$$

Однак, оскільки $y \in S$, ми маємо

$$m \leq \|y\|_2 \leq M.$$

Отже,

$$m\, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\, \|x\|_1.$$

Поклавши $c = m$ та $C = M$, ми отримуємо саме еквівалентність норм.

Для $x = 0$ нерівність є тривіальною, оскільки $\|0\|_1 = \|0\|_2 = 0$.

□

5.4 Доповнення до нормованих векторних просторів

5.4.1 Послідовності функцій

X множина ($X \subset \mathbb{R}$), $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ та $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Корисно для подальшого розділу: $B(X,\mathbb{R})$ позначає множину функцій $f : X \to \mathbb{R}$обмежені

5.4.2 Збіжність проста:

Визначення 5.19. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ просто збігається до f якщо $\forall x_0 \in X$, $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ (не походить від норми).

5.4.3 Рівномірна збіжність:

Визначення 5.20. $f \in B(X,\mathbb{R})$ якщо $\sup_{x\in X} |f(x)| = \|f\|_\infty < \infty$ (f обмежена на X).
Рівномірна збіжність: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ така що $\forall n \geq N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ еквівалентно

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ така що } \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$f_n \to f$ в $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Визначення 5.21. Рівномірна границя неперервних функцій: $X = [a,b], \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \subset B([a,b],\mathbb{R})$(підпростори векторів). $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ є замкненим у $(B([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

5.4.4 Ряди зі значеннями у нормованому векторному просторі.

Визначення 5.22. Нехай $(E, \|\cdot\|_\infty)$ н.в.п.[a], $(u_n)_{n\in N}$ послідовність в E. Ряд $\sum u_n$ збігається в $(E, \|\cdot\|)$, якщо послідовність $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ збігається в $(E, \|\cdot\|)$. $\lim_{N\to\infty} S_N$, що позначається $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (\in E)$

[a]нормований векторний простір

Примітка 5.23. Якщо $\sum u_n$ і $\sum v_n$ сходяться, тоді

- $\sum u_n + v_n$ сходиться і $\sum \lambda u_n$ сходиться
- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

5.4.5 Нормальна збіжність

Визначення 5.24. $\sum u_n$ нормально збігається в $(E, \|\cdot\|)$ якщо $\sum \|u_n\|$ збігається в $\mathbb{R}$.

Приклад 5.25. $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$. Нормальна збіжність = абсолютна збіжність ($\sum u_n$ збігається)

Приклад 5.26. $\sum u_n$ може збігатися, не збігаючись нормально, як: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Теорема 5.27. Якщо $(E, \|\cdot\|)$ є повним, будь-який нормально збіжний ряд є збіжним і

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$$

Доведення. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ і $T_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$

$$n > p \quad \|S_n - S_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{n} u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{n} \|u_k\| = T_n - T_p = |T_n - T_p|$$

(T_n) збігається в $\mathbb{R}$, тому (T_n) є Коші:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ така що } \forall n > p \geq N |T_n - T_p| \leq \varepsilon$$

тому (S_n) є Коші в $(E, \|\cdot\|)$. E повний: (S_n) збігається до $S \in E$. □

5.5 Неперервні лінійні відображення

Для будь-якої секції B_E позначає кулю закритий!

Нехай E, F два нормовані векторні простори з $\|\cdot\|_E$ та $\|\cdot\|_F$ відповідними нормами,

- $A \in \mathcal{L}(E, F)$
- $\lambda A \in \mathcal{L}(E, F)$ і $\lambda A x = \lambda(Ax)$
- $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$ і $(A + B)x = Ax + Bx$
- $0x = 0_F \ \forall x \in E$

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$$

- $(AB)x = A(Bx)$ де $AB = A \circ B$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $0A = 0$
- $AB \neq BA$ (загалом)
- $A(BC) = (AB)C$

Теорема 5.28. Нехай $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Наступні властивості є еквівалентними:

1. $A : E \to F$ є неперервною
2. A є неперервною в 0_E
3. $\exists C \geq 0$ таке що
$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$$
це називається, що A є обмеженою
4. A є обмеженою на $B_E(0, R) \ \forall R > 0$

Кажуть, що A є обмеженою (якщо A є неперервною та лінійною)

Доведення. • 1) $\Rightarrow$ 2) : очевидно

- 2) $\Rightarrow$ 3) :
  - Гіпотеза: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ таке що $\|x - 0_E\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax - A0_E\|_F \leq \varepsilon$ $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \varepsilon$
  - $\varepsilon = 1 \exists \delta > 0$ таке що $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax\|_F \leq 1$
  - Нехай $x \in E$ і $x \neq 0_E$
  - $y = \frac{\delta}{\|x\|_E} x$ тому $\|y\|_E = \delta \Rightarrow \|Ay\|_F \leq 1$
  - $Ay = \frac{\delta}{\|x\|_E} Ax$ і A лінійне
  - $\|Ay\|_F = \frac{\delta}{\|x\|_E} \|Ax\|_F \leq 1 \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \frac{1}{\delta} \|x\|_E$
- 3) $\Rightarrow$ 1)
  - Я фіксую $x_0 \in E$. потрібно перевірити: A неперервне в x_0?
  - $\|Ax - Ax_0\|_F = \|A(x - x_0)\|_F \leq C\|x - x_0\|_E$
  - Отже, якщо $\|x - x_0\|_E \leq \frac{\varepsilon}{c} = \delta(\varepsilon)$, $\|Ax - Ax_0\|_F \leq \varepsilon$

$\square$

Позначення.

$$B(E, F) = \{A \in \mathcal{L}(E, F) : A \text{ неперервна } \}$$

$$B(E, E) = B(E)$$

Лема 5.29. Якщо E є скінченновимірним, то

$$\mathcal{L}(E, F) = B(E, F)$$

Це неправда, якщо $\dim E = \infty$

Доведення. $(e_1, \ldots, e_n)$ база для E. На E всі норми є еквівалентними.

- $\|x\|_E$ задана норма.
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

де $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\|Ax\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i Ae_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|Ae_i\|_F$$

$$\|Ax\|_F \leq \|x\|_\infty \times \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_F = C\|x\|_\infty$$

$(\|x\|_\infty\| \leq C'\|x\|_E)$. Отже: $\|Ax\|_F \leq CC'\|x\|_E$. Тоді: $A \in B(E, F)$ $\square$

5.5.1 Норма на $B(E, F)$

Теорема 5.30. Нехай $A \in B(E, F)$, покладемо $\|A\| = \sup\limits_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup\limits_{x \in B_E(0,1)} \|Ax\|_F$

1. $\|\cdot\|$ є нормою на $B(E, F)$ називається рівномірною нормою.
2. Маємо: $\|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E \quad \forall x \in E$
3. $\|A\| =$ найменша константа C така що $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$

Примітка 5.31. 1. Можна записати $\|A\|_{B(E,F)}$ замість $\|A\|$

2. Іноді зустрічається $|||A|||$ для $\|A\|$

3. Нехай $I^+ =$ множина $C \geq 0$ така що $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$.
   $I^+ \neq \emptyset$ (оскільки $A \in B(E,F)$) та $I^+ \subset [0, +\infty[$. (2) та (3) говорять, що $\|A\|$ є найменшим елементом I^+

$$\inf I^+ = \min I^+ = \|A\|$$

Доведення. 1. $A \in B(E,F) \Leftrightarrow \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Ax\|_F < \infty \Leftrightarrow \|A\|$ добре визначена.

$$\|(A+B)x\|_F = \|Ax + Bx\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in B_E(0,1)} \|(A+B)x\|_F \leq \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Ax\|_F + \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Bx\|_F$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ та } A, B \in B(E,F) \Rightarrow A+B \text{ також}$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\| \text{ та } A \in B(E,F) \Rightarrow \lambda A \text{ також}$$

Якщо $\|A\| = 0$, тоді $\|Ax\|_F = 0 \forall x \in B_E(0,1) \Rightarrow Ax = 0_F \forall x \in B_E(0,1)$

$$Ax = \|x\|_E A \frac{x}{\|x\|_E}$$

$$Ax = 0_F \forall x \in E \Rightarrow A = 0_{L(E,F)}$$

$$C \in I^+ \text{ якщо } \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

$$\|A\| \in I^+ \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E \forall x$$

- Очевидно, якщо $x = 0_E$.
- Якщо $x \neq 0_E$, $y = \frac{x}{\|x\|_E} \in B_E(0,1)$ тому

$$\|Ay\|_F = \frac{1}{\|x\|_E}\|Ax\|_F \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E$$

Нехай $C \in I^+$ тому

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$$

тому $\|Ax\|_F \leq C \quad \forall x \in B_E(0,1)$, тому $\|A\| \leq C$, тоді

$$\|A\| = \min I^+ = \text{"найкраща константа } C\text{"}$$

□

Приклад 5.32. $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $F = \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

$$A : E \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto A(f) = \int_a^b f(x)u(x)\,dx.$$

<u>A обмежений</u>: потрібно показати: $\exists C \geq 0$ такий що

$$\left| \int_a^b f(x)u(x)\,dx \right| \leq C \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

?

$$\left| \int_a^b f(x)u(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||u(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty |u(x)|\,dx = \|f\|_\infty \int_a^b |u(x)|\,dx$$

$$C = \int_a^b |u(x)|\, dx \text{ підходить}$$

(Насправді $\|A\| = \int_a^b |u(x)|\, dx$). $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ оснащений $\|f\|_\infty$, $F = \mathbb{R}$, $Af = f'(0)$ лінійний, але не неперервний. Побудуємо послідовність (f_n) в E така що $\|f_n\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ але $\|Af_n\|_F \not\to 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

Твердження 5.33. Нехай $A \in B(E,F)$ та $\|A\| = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|A\|_F$ рівномірна норма. $\|A\|$ = найменший c такий що

$$\|Ax\|_F \le c\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Доведення. $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ і $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ норма на $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Зафіксуємо $m \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ і $A : f \to mf$. $Af(x) = m(x)f(x)$.

- $A \in L(E)$ очевидно
- $A \in B(E)$?

Знайти $c \ge 0$ таку що

$$\|Af\|_1 \le c\|f\|_1 \quad \forall f \in E$$

$$\|Af\|_1 = \int_a^b |m(x)f(x)|\, dx$$

$$|m(x)f(x)| \le |m(x)||f(x)| \le \|m\|_\infty |f(x)|$$

$$\|m\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |m(x)|$$

$$\int_a^b |m(x)f(x)|\, dx \le \|m\|_\infty \int_a^b |f(x)|\, dx = \|m\|_\infty \|f\|_1$$

$$c = \|m\|_\infty$$

Маємо: $A \in B(E)$ і $\|A\| \le \|m\|_\infty$. Покажемо, що $\|A\| = \|m\|_\infty$

$$\|A\| = \sup_{\|f\|_1 \le 1} \|Af\|_1 \overset{?}{=} \|m\|_\infty = \sup I \text{ з } I = \{\|Af\|_1 : \|f\|_1 \le 1\}$$

Позначимо $\alpha = \sup I$

1. α верхня межа для I
2. $\exists (a_n)\, a_n \in I$ з $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$

У нашому випадку:

- Мета: знайти послідовність $f_n \in E$ $\|f_n\|_1 \le 1$ і $\|Af_n\|_1 \to \|m\|_\infty$

$a_n = \|Af_n\|_1$ $\|m\|_\infty = \sup$ функції $|m|$ на $[a,b]$.

- $|m|$ неперервна: $\exists x_0 \in [a,b]$ такий, що $\|m\|_\infty = |m|(x_0)$

$$|m|(x) = |m(x)|$$

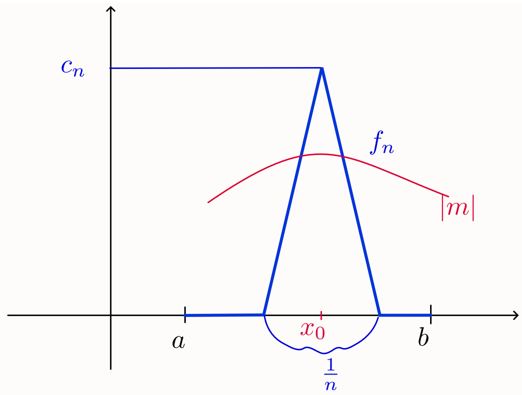


Рис. 5.2: f_n

$$|m(x)f_n(x)| = |Af(x)| \text{ близько до } |m(x_0)||f_n(x)|$$

$\|f_n\|_1 = 1$ якщо $c_n \leq 2n$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ якщо } a \leq x \leq x_0 - \frac{1}{2n} \\ 2n(1 - n|x - x_0|) \text{ якщо } |x - x_0| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 \text{ якщо } x_0 + \frac{1}{2n} \leq x \leq b \end{cases}$$

Рис. 5.3: f_n

$$|m(x)f_n(x) - m(x_0)f_n(x)| \leq |m(x) - m(x_0)||f_n(x)| \leq \varepsilon_n |f_n(x)|$$

Там, де $f_n(x) \neq 0$ $|x - x_0| \leq \frac{1}{n}$ отже

$$|m(x) - m(x_0)| \leq \varepsilon_n \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

тоді m неперервна в x_0.

$$\|Af_n\|_1 = \int_a^b |m(x)f_n(x)|\,dx \leq \int_a^b |m(x) - m(x_0)||f_n(x)|\,dx + \int_a^b |m(x_0)||f_n(x)|\,dx$$

- 1 член: $\leq \varepsilon_n \|f_n\|_1 = \varepsilon_n$
- 2 член: $:= \|m\|_\infty \|f_n\|_1 = \|m\|_\infty$

Тоді:

$$\begin{aligned} &\|f_n\|_1 = 1 \\ &\|Af_n\|_1 \to \|m\|_\infty \\ &\text{отже } \|A\| = \|m\|_\infty \end{aligned}$$

□

Твердження 5.34. Випадок $B(E)$:

Якщо $A, B \in B(E)$, $A \circ B$ (позначений AB) $\in B(E)$ і

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

(дуже корисно)

Доведення.

$$\|A \underbrace{Bx}_{Y}\|_E \leq \|A\|\|Bx\|_E \leq \overbrace{\|A\|\|B\|}^{c} \cdot \|x\|_E$$

отже $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ □

Теорема 5.35. Якщо N_1, N_2 є дві норми на E. N_1 і N_2 топологічно еквівалентні $\Leftrightarrow$ N_1 і N_2 еквівалентні.

Доведення. E_1 це (E, N_1), $E_2 = (E, N_2)$.

N_1 і N_2 топологічно еквівалентні означає саме:

1. $Id : E_1 \to E_2$ є неперервними
2. і $Id : E_2 \to E_1$

Отже:

1. Ω відкрита щодо $N_2 \Rightarrow \Omega$ відкрита щодо N_1
2. Ω відкрита щодо $N_1 \Rightarrow \Omega$ відкрита щодо N_2

1. $\Leftrightarrow N_2(Id\, u)(= N_2(u)) \leq c_1 N_1(u)$
2. $\Leftrightarrow N_1(Id\, u)(= N_1(u)) \leq c_2 N_2(u)$

оскільки Id неперервне і лінійне, тому обмежене $\exists c$ таке що $\underbrace{Id\, u}_{\in E_2} \leq c \underbrace{u}_{E_1}$ отже $N_2(Id\, u) \leq cN_1(u)$

(1) і (2) $\Leftrightarrow$ N_1 і N_2 еквівалентні. □

5.6 Норма матриць

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ототожнений з $A \in L(\mathbb{C}^n)$

$$\left((Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

- $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$
- $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Суміжна матриця A^* $(A^*)_{i,j} = \overline{(A)_{j,i}}$

$$(x|Ay) = (A^*x|y) \quad \forall x, y$$

5.6.1 Гарна норма на $L(\mathbb{C}^n)$ (або на $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

$\|A\|$ рівномірна норма на $L(\mathbb{C}^n)$ $(= B(\mathbb{C}^n))$ отримана з $\|\cdot\|_2$

Лема 5.36.

$$\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

Доведення. $\|x\|_2 = \sup_{\|y\|_2\leq 1} |(y|x)|$. Отже:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2\leq 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2\leq 1, \|y\|_2\leq 1} |(y|Ax)|$$

$$(y|Ax) = (A^*y|x) = \overline{(x|A^*y)}$$

тому $|(y|Ax)| = |(x|A^*y)|$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |(x|A^*y)| = \|A^*\|$$

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|^2$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (x|A^*Ax) &\leq \|x\|\|A^*Ax\| \text{ (Коші-Буняковського)} \\ &\leq \|x\|\|A^*A\|\|x\| = \|A^*A\|\|x\|^2\end{aligned}$$

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^*A\|\|x\|^2$$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}\|x\|_2 \Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

□

5.6.2 Як "обчислити"$\|A\|$?

Теорема 5.37. $\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \mu_i$ причому $\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}$ де $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ власні значення A^*A.

Доведення.

$$\|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

Треба показати: $\|A^*A\| = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$ $(\lambda_i \geq 0)$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$$

Нехай $B = A^*A$, $B = B^*$ і $(x|Bx) = (x|A^*Ax) = (Ax|Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$. Отже:

$$\forall x, \quad (x|Bx) \geq 0$$

Існує о.н.б $(u_1, \dots, u_n)$ з $\mathbb{C}^n$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ такі, що

$$Bu_i = \lambda_i u_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\lambda_i = (u_i|\lambda_i u_i) = (u_i|Bu_i) \geq 0$$

Якщо $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

$$Bu = \sum_{i=1}^n x_i Bu_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i u_i$$

$$\|Bu\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |x_i|^2 \leq \max \lambda_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \max \lambda_i^2 \|u\|^2$$

$$\|B\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$$

Якщо $\lambda_1 = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$

$$\|Be_1\| = \|\lambda_1 e_1\| = \lambda_1 \|e_1\| \leq \|B\| \|e_1\|$$

тому $\|B\| \geq \lambda_1$ □

5.6.3 Як обмежити зверху $\|A\|$

Твердження 5.38. Маємо: $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$ де

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^2$$

Доведення.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \sim \mathbb{C}^{n\times n}$$

$\|\cdot\|_{HS}$ канонічна норма на $\mathbb{C}^{n\times n}$!

$$(Ax)_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

$$(y|Ax) = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} \overline{y_i} x_j$$

Нехай $b_{i,j} = y_i \overline{x_j}$

$$(y|Ax) = \sum_{i,j} \overline{b_{i,j}} a_{i,j}$$

$$|(y|Ax)| \leq \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i,j} |b_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{i,j} |b_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} |y_i|^2 |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{1\leq i\leq n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{1\leq j\leq n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|y\|\|x\|$$

$$|(y|Ax)| \leq \|A\|_{HS} \|x\| \|y\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A\|_{HS}$$

□

Розділ 6

Система диференціальних рівнянь

$$(E)\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \ldots + a_{1,n}x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + \ldots + a_{n,n}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

$$x(t) = (x_1, \ldots, x_n(t)) \text{ або } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ A &\longmapsto f(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

$$(H)\; x'(t) = Ax(t)$$

$$(C)\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

Розв'язок на I:$f : I \to \mathbb{C}^n$ з $I \subset \mathbb{R}$ інтервал (f вважається неперервною). $x : I \to \mathbb{C}^n$ класу $\mathcal{C}^1$ така що (C) виконується $\forall t \in I$

- Якщо $n = 1$ $A = a \in \mathbb{C}$. Розв'язок (H): $x(t) = e^{ta}x_0$ з $x_0 \in \mathbb{C}$

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Але:визначити e^A

Теорема 6.1. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($A \in B(E)$ де $(E, \|\cdot\|)$ повний!)

1. Ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$ збігається в $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$, її сума $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ позначається e^A і називається експонентою A.
2. $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$
3. $\|e^A - \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{(N+1)!}e^{\|A\|}(\leq \frac{\|A\|_{HS}^{N+1}}{(N+1)!}e^{\|A\|_{HS}})$
4. $e^Ae^B = e^Be^A$ якщо $AB = BA$

5. $Be^A = e^A B$ якщо $AB = BA$

Доведення. -

1. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (бо $\|\cdot\|$ рівномірна норма!) тому $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|A\|^n}{n!}$ (числовий ряд!) збігається до $e^{\|A\|}$ тому $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$ збігається нормально в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ є повним (як $B(E)$ якщо E є повним) тому $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$ збігається в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Також OK

3. $$\|e^A - \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}\| = \| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$$

   Позначимо $f(x) = e^x$

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(y) \quad (y \text{ між } 0 \text{ та } x)$$

   $x = \|A\|$

4. $$e^A e^B = e^{A+B} \text{ якщо } AB = BA$$

   $$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (\text{ якщо } AB = BA)$$

   $$(A+B)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p A^{n-p} B^p$$

   Такий самий доказ якщо $A = a, B = b$ з $a, b \in \mathbb{R}$

5. вправа

□

Примітка 6.2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 0 \quad e^A = \mathcal{I} + A \quad e^B = \mathcal{I} + B \text{ де } \mathcal{I} \text{ одинична матриця}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{A+B} = ? \quad A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A+B)^2 = \mathcal{I}$$

$$C = A + B \quad C^{2p} = \mathcal{I} \quad C^{2p+1} = C$$

$$e^C = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^{2p}}{2p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^{2p+1}}{(2p+1)!} = \mathcal{I} \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p!}}_{=\mathrm{ch}(1)} + C \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!}}_{=\mathrm{sh}(1)}$$

$$e^{A+B} = \mathrm{ch}(1)\mathcal{I} + \mathrm{sh}(1)C = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(1) & \mathrm{sh}(1) \\ \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1) \end{pmatrix} \neq e^A \times e^B$$

Твердження 6.3. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (або $B(E)$)

1. $e^{tA}e^{sA} = e^{(s+t)A} \qquad s,t \in \mathbb{R}$
2. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \qquad t \in \mathbb{R}$
3. $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} \qquad t \in \mathbb{R}$

Доведення. -

1. ОК, оскільки tA комутує з sA
2. $e^{tA}e^{-tA} = e^{-tA}e^{tA} = e^{0A} = \mathcal{I}$ тому $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
3. Обчислити: $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{(t+\varepsilon)A} - e^{tA}}{\varepsilon} = ?$

$$e^{tA}(\frac{e^{\varepsilon A} - \mathcal{I}}{\varepsilon})$$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon A} - \mathcal{I} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon A)^n}{n!} \qquad n = 1 + p \\ &= \varepsilon A \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon A)^p}{(p+1)!} \\ &= \varepsilon A \left(\mathcal{I} + \| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon A)^p}{(p+1)!} \| \right) \\ &= \varepsilon A \left(\mathcal{I} + R(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{\varepsilon A} - \mathcal{I}}{\varepsilon} = A + AR(\varepsilon)$$

подивимося: $\|AR(\varepsilon)\| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ тоді $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{\varepsilon A} - \mathcal{I}}{\varepsilon} = A$

$$\|AR(\varepsilon)\| \le c\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\|R(\varepsilon)\| \le \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p \|A\|^p}{(p+1)!} = \varepsilon \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{p-1}\|A\|^p}{(p+1)!} \le \varepsilon e^{\|A\|}$$

Якщо $|\varepsilon| \le 1$

$$\frac{\varepsilon^{p-1}\|A\|^p}{(p+1)!} \le \frac{\|A\|^p}{p!}$$

□

6.1 Застосування до систем ОД

$$(H)\; x'(t) = Ax(t)$$

Теорема 6.4. Множина $\mathrm{Sol}(H)$ розв'язків (H) задається

$$x(t) = e^{tA}x_0 \quad x_0 \in \mathbb{C}^n$$

Нехай $x(t)$ розв'язок

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-tA}x(t) \\
\Rightarrow y'(t) &= -Ae^{-tA}x(t) + e^{-tA}x'(t) \\
&= -Ae^{-tA}x(t) + e^{-tA}Ax(t) \\
&= 0 \\
\Rightarrow y(t) &= x_0 \Rightarrow x(t) = e^{tA}
\end{aligned}$$

$$(E) \quad x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)\,ds$$

$$x(0) = x_0$$

Доведення. Шукати $x(t)$ у вигляді

$$x(t) = e^{tA}y(t)$$

Я знаходжу, що $y'(t) = e^{-tA}f(t)$

$$y(t) = x_0 + \int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds$$

□

Література

[1] Christian Gérard. *Analyse et Géométrie (OLMA251)*. fre.

[2] Christian Gérard. *Cours Magistral d'Analyse et Géométrie (OLMA251) à l'Université Paris-Saclay*. 2024-2025.

[3] Yehor Korotenko. *sci-trans-git*. Вер. 0.2.0-alpha. 2025. DOI: 10.5281/zenodo.15775111. URL: https://github.com/DobbiKov/sci-trans-git.