

# CheatSheet d'Analyse et Géometrie

Yehor KOROTENKO

D'après le cours de Christian Gérard

## Table des matières

|          |                                                                    |          |
|----------|--------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Espaces Vectoriels Normés, Distances</b>                        | <b>2</b> |
| 1.1      | Produit Scalaire et Norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ . . . . . | 2        |
| 1.2      | Distance . . . . .                                                 | 2        |
| <b>2</b> | <b>Espaces Métriques : Topologie</b>                               | <b>3</b> |
| 2.1      | Boules et Ensembles Bornés . . . . .                               | 3        |
| 2.2      | Ouverts et Fermés . . . . .                                        | 3        |
| 2.3      | Intérieur, Adhérence, Frontière . . . . .                          | 3        |
| 2.4      | Suites dans un Espace Métrique . . . . .                           | 3        |
| 2.5      | Compacité . . . . .                                                | 4        |
| <b>3</b> | <b>Continuité dans les Espaces Métriques</b>                       | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>Fonctions de Plusieurs Variables : Différentiation</b>          | <b>4</b> |
| 4.1      | Dérivées Partielles, Différentiabilité . . . . .                   | 5        |
| 4.2      | Dérivées d'Ordre Supérieur . . . . .                               | 5        |
| 4.3      | Extrema . . . . .                                                  | 6        |
| 4.4      | Règle de Dérivation en Chaîne . . . . .                            | 6        |
| <b>5</b> | <b>Espaces Vectoriels Normés : Compléments</b>                     | <b>6</b> |
| 5.1      | Suites et Séries de Fonctions . . . . .                            | 6        |
| 5.2      | Applications Linéaires Continues . . . . .                         | 7        |
| <b>6</b> | <b>Systèmes d'Équations Différentielles Linéaires</b>              | <b>7</b> |
| 6.1      | Exponentielle de Matrice . . . . .                                 | 7        |
| 6.2      | Résolution de Systèmes . . . . .                                   | 8        |

# 1 Espaces Vectoriels Normés, Distances

## 1.1 Produit Scalaire et Norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$

**Définition 1.1** (Produit Scalaire sur  $\mathbb{R}^d$ ). Pour  $X = (x_1, \dots, x_d)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_d)$  dans  $\mathbb{R}^d$ , le **produit scalaire** est :

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^d x_i y_i = \|X\| \|Y\| \cos(\theta)$$

*Propriétés : bilinéarité, symétrie, défini positif ( $X \cdot X \geq 0$ , et  $X \cdot X = 0 \iff X = 0_d$ ).*

**Proposition 1.1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^d$  :

$$|X \cdot Y| \leq (X \cdot X)^{1/2} (Y \cdot Y)^{1/2} \quad \text{i.e.} \quad |X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|$$

**Définition 1.2** (Norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ ). La **norme euclidienne** d'un vecteur  $X \in \mathbb{R}^d$  est :

$$\|X\| = \|X\|_2 = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2} = (X \cdot X)^{1/2}$$

**Définition 1.3** (Norme sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ ). Une **norme** sur  $E$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  (notée  $\|\cdot\|$ ) telle que :

1. **Séparation** :  $\|X\| = 0 \iff X = 0_E$
2. **Homogénéité** :  $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}, X \in E$
3. **Inégalité triangulaire** :  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  pour tout  $X, Y \in E$

Un espace vectoriel muni d'une norme est un **espace vectoriel normé** (EVN).

**Exemple 1.1** (Autres normes sur  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}^d$ ). Soit  $X = (x_1, \dots, x_d)$

1. Norme 1 :  $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$
2. Norme infinie :  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$
3. Norme  $p$  ( $p \geq 1$ ) :  $\|X\|_p = \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p}$

## 1.2 Distance

**Définition 1.4** (Distance sur un ensemble  $E$ ). Une **distance** sur  $E$  est une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tous  $X, Y, Z \in E$  :

1. **Séparation** :  $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$
2. **Symétrie** :  $d(X, Y) = d(Y, X)$
3. **Inégalité triangulaire** :  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$

Un ensemble muni d'une distance est un **espace métrique**.

**Propriété 1.1** (Distance induite par une norme). Si  $(E, \|\cdot\|)$  est un EVN, alors  $d(X, Y) = \|X - Y\|$  définit une distance sur  $E$ .

**Exemple 1.2** (Distance Euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ ).  $d(X, Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$

**Définition 1.5** (Distances équivalentes). Deux distances  $d_1, d_2$  sur  $E$  sont **équivalentes** s'il existe  $a, b > 0$  tels que  $\forall x, y \in E$ ,

$$a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b \cdot d_1(x, y)$$

Elles définissent alors les mêmes ouverts (la même topologie).

**Définition 1.6** (Normes équivalentes). Deux normes  $N_1, N_2$  sur un EVN  $E$  sont **équivalentes** s'il existe  $a, b > 0$  tels que  $\forall X \in E$ ,

$$a \cdot N_1(X) \leq N_2(X) \leq b \cdot N_1(X)$$

**Théorème 1.1** (Normes équivalentes en dimension finie). Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

## 2 Espaces Métriques : Topologie

### 2.1 Boules et Ensembles Bornés

**Définition 2.1** (Boules). Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $x_0 \in E$  et  $r > 0$ .

1. **Boule ouverte** :  $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$
2. **Boule fermée** :  $B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$
3. **Sphère** :  $S(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) = r\}$

**Définition 2.2** (Ensemble borné). Une partie  $A \subset E$  est **bornée** si elle est contenue dans une boule, i.e.,  $\exists x_0 \in E, \exists R > 0$  tel que  $A \subset B(x_0, R)$ . Cela est équivalent à :  $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$  tel que  $A \subset B(x_0, r)$ . Ou encore :  $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) < \infty$ .

**Propriété 2.1.** — Toute partie finie est bornée.

- Toute sous-partie d'un borné est bornée.
- Une union finie de bornés est bornée.

### 2.2 Ouverts et Fermés

**Définition 2.3** (Ouvert, Fermé). Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

1.  $U \subset E$  est **ouvert** si  $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subset U$ .
2.  $F \subset E$  est **fermé** si son complémentaire  $E \setminus F$  est ouvert.

$\emptyset$  et  $E$  sont à la fois ouverts et fermés.

**Propriété 2.2.** — Une boule ouverte est un ouvert.

- Une boule fermée est un fermé.

**Théorème 2.1** (Propriétés des ouverts et fermés). 1. Une **union quelconque** d'ouverts est un ouvert.

2. Une **intersection finie** d'ouverts est un ouvert.
3. Une **intersection quelconque** de fermés est un fermé.
4. Une **union finie** de fermés est un fermé.

### 2.3 Intérieur, Adhérence, Frontière

**Définition 2.4** (Point intérieur, Intérieur). Soit  $A \subset E$ . Un point  $x_0 \in E$  est **intérieur** à  $A$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subset A$ . L'**intérieur** de  $A$ , noté  $\text{Int}(A)$  ou  $\overset{\circ}{A}$ , est l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .

**Propriété 2.3.**  $\text{Int}(A)$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ .  $A$  est ouvert  $\iff A = \text{Int}(A)$ .

**Définition 2.5** (Point adhérent, Adhérence). Soit  $A \subset E$ . Un point  $x_0 \in E$  est **adhérent** à  $A$  si toute boule ouverte centrée en  $x_0$  rencontre  $A$ , i.e.,  $\forall r > 0, B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ . (Équivalent à  $d(x_0, A) = \inf_{y \in A} d(x_0, y) = 0$ ). L'**adhérence** de  $A$ , notée  $\text{Adh}(A)$  ou  $\bar{A}$ , est l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

**Propriété 2.4.**  $\text{Adh}(A)$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .  $A$  est fermé  $\iff A = \text{Adh}(A)$ .

**Définition 2.6** (Frontière). La **frontière** de  $A$ , notée  $\text{Fr}(A)$  ou  $\partial A$ , est  $\text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$ . C'est aussi  $\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$ .

**Définition 2.7** (Ensemble dense). Soit  $A \subset B \subset E$ . On dit que  $A$  est **dense** dans  $B$  si  $B \subset \text{Adh}(A)$ .  $A$  est dense dans  $E$  si  $\text{Adh}(A) = E$ . Exemple :  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{Q}^d$  est dense dans  $\mathbb{R}^d$ .

### 2.4 Suites dans un Espace Métrique

**Définition 2.8** (Convergence d'une suite). Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  **converge** vers  $x \in E$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ . On note  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ou  $x_n \rightarrow x$ . La limite, si elle existe, est unique.

**Proposition 2.1** (Caractérisations séquentielles). 1. **Adhérence** :  $x \in \text{Adh}(A) \iff$  il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $a_n \rightarrow x$ .

2. **Fermé** :  $A$  est fermé  $\iff$  pour toute suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x \in E$ , on a  $x \in A$ .

**Définition 2.9** (Suite de Cauchy). Une suite  $(x_n)$  dans  $E$  est de **Cauchy** si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$ .

**Propriété 2.5.** — Toute suite convergente est de Cauchy.

— Toute suite de Cauchy est bornée.

**Définition 2.10** (Espace complet). Une espace métrique  $(E, d)$  est **complet** si toute suite de Cauchy dans  $E$  converge dans  $E$ . Un EVN complet est appelé **espace de Banach**.

**Exemple 2.1.**  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance usuelle est complet.  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet.  $]0, 1]$  avec la distance usuelle de  $\mathbb{R}$  n'est pas complet.

## 2.5 Compacité

**Définition 2.11** (Recouvrement ouvert, Sous-recouvrement). Soit  $K \subset E$ . Une famille  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $E$  est un **recouvrement ouvert** de  $K$  si  $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Une sous-famille  $(U_j)_{j \in J}$  (où  $J \subset I$ ) est un **sous-recouvrement** si  $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ .

**Définition 2.12** (Ensemble compact - Définition de Borel-Lebesgue). Une partie  $K \subset E$  est **compacte** si de tout recouvrement ouvert de  $K$ , on peut extraire un sous-recouvrement **fini**.

**Théorème 2.2** (Caractérisation séquentielle de la compacité - Bolzano-Weierstrass). Dans un espace métrique  $(E, d)$ , une partie  $K \subset E$  est compacte  $\iff$  de toute suite d'éléments de  $K$ , on peut extraire une sous-suite qui converge **dans**  $K$ .

**Propriété 2.6** (Propriétés des compacts dans un espace métrique). 1. Un compact est fermé et borné. (La réciproque est fautive en général, mais vraie dans  $\mathbb{R}^d$ ).

2. Une partie fermée d'un compact est compacte.

3. Une intersection quelconque de compacts est compacte.

4. Une union finie de compacts est compacte.

5. Un compact est complet.

**Théorème 2.3** (Compacité dans  $\mathbb{R}^d$ ). Une partie  $K \subset \mathbb{R}^d$  (ou  $\mathbb{C}^d$ ) est compacte  $\iff$   $K$  est fermée et bornée. (Théorème de Borel-Lebesgue).

**Exemple 2.2.** Les intervalles  $[a, b]$  sont compacts dans  $\mathbb{R}$ . Les boules fermées  $B_f(x_0, r)$  sont compactes dans  $\mathbb{R}^d$ .

## 3 Continuité dans les Espaces Métriques

**Définition 3.1** (Continuité en un point). Soient  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  deux espaces métriques,  $f : E_1 \rightarrow E_2$  une application, et  $x_0 \in E_1$ .  $f$  est **continue en**  $x_0$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E_1, (d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

$f$  est **continue sur**  $E_1$  si elle est continue en tout point de  $E_1$ .

**Proposition 3.1** (Caractérisations de la continuité). Soit  $f : (E_1, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue sur  $E_1$ .

2. Pour tout ouvert  $U_2 \subset E_2$ , l'image réciproque  $f^{-1}(U_2)$  est un ouvert de  $E_1$ .

3. Pour tout fermé  $F_2 \subset E_2$ , l'image réciproque  $f^{-1}(F_2)$  est un fermé de  $E_1$ .

4. Pour toute suite  $(x_n)$  de  $E_1$  convergeant vers  $x \in E_1$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x)$  dans  $E_2$ .

**Théorème 3.1** (Continuité et compacité). 1. L'image d'un compact par une application continue est compacte. Si  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est continue et  $K \subset E_1$  est compact, alors  $f(K)$  est compact dans  $E_2$ .

2. (Théorème des bornes atteintes) Si  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $K \subset E_1$  est un compact non vide, alors  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes. (i.e.,  $\exists x_m, x_M \in K$  tels que  $f(x_m) = \inf_{x \in K} f(x)$  et  $f(x_M) = \sup_{x \in K} f(x)$ ).

## 4 Fonctions de Plusieurs Variables : Différentiation

Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

## 4.1 Dérivées Partielles, Différentiabilité

**Définition 4.1** (Dérivée selon un vecteur (directionnelle)). Soit  $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ .  $f$  est dérivable en  $X_0 \in D$  dans la direction  $u$  si la fonction  $\varphi(t) = f(X_0 + tu)$  (définie pour  $t$  dans un voisinage de 0) est dérivable en  $t = 0$ . La dérivée est notée  $D_u f(X_0) = \varphi'(0)$ .

$$D_u f(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + tu) - f(X_0)}{t}$$

**Définition 4.2** (Dérivées partielles (cas  $m = 1$ )). La  $i$ -ème dérivée partielle de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  en  $X_0$  est  $D_{e_i} f(X_0)$ , où  $(e_i)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Notation :  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$  ou  $\partial_i f(X_0)$ .

**Définition 4.3** (Différentiabilité (cas  $m = 1$ )).  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **différentiable** en  $X_0 \in D$  s'il existe une application linéaire  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour  $H \in \mathbb{R}^n$  avec  $X_0 + H \in D$  :

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + L(H) + o(\|H\|) \quad \text{i.e.} \quad f(X_0 + H) = f(X_0) + L(H) + \|H\|\varepsilon(H), \text{ où } \lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$$

Si  $f$  est différentiable en  $X_0$ , alors  $L(H) = \nabla f(X_0) \cdot H$ , où  $\nabla f(X_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right)$  est le **gradient** de  $f$  en  $X_0$ . L'application linéaire  $L$  est la **différentielle** de  $f$  en  $X_0$ , notée  $df_{X_0}$ .

**Propriété 4.1.** Si  $f$  est différentiable en  $X_0$ , alors  $f$  est continue en  $X_0$  et toutes ses dérivées directionnelles (donc partielles) existent en  $X_0$ , et  $D_u f(X_0) = df_{X_0}(u) = \nabla f(X_0) \cdot u$ .

**Théorème 4.1** (Condition suffisante de différentiabilité). Si toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existent sur un voisinage ouvert de  $X_0$  et sont continues en  $X_0$ , alors  $f$  est différentiable en  $X_0$ . Si elles sont continues sur  $D$ ,  $f$  est dite de **classe**  $C^1$  sur  $D$ .

**Définition 4.4** (Différentiabilité (cas général  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ )).  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .  $f$  est différentiable en  $X_0$  si chaque composante  $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$  l'est. La différentielle  $df_{X_0}$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ , dont la matrice dans les bases canoniques est la **matrice Jacobienne**  $J_f(X_0)$  :

$$(J_f(X_0))_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0)$$

Donc  $df_{X_0}(H) = J_f(X_0)H$  (où  $H$  est un vecteur colonne).

## 4.2 Dérivées d'Ordre Supérieur

**Définition 4.5** (Dérivées partielles d'ordre  $k$ ). Les dérivées partielles d'ordre  $k$  sont obtenues en dérivant successivement  $k$  fois par rapport aux variables. Exemple :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ .  $f$  est de **classe**  $C^k$  sur  $D$  si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $D$ .

**Théorème 4.2** (Schwarz/Clairaut). Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  sur  $D$  (i.e., toutes les dérivées partielles secondes existent et sont continues), alors l'ordre de dérivation ne compte pas :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \quad \forall X \in D, \forall i, j$$

**Définition 4.6** (Matrice Hessienne (cas  $m = 1$ )). Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$ , la **matrice Hessienne** de  $f$  en  $X_0 \in D$  est la matrice symétrique (par Schwarz) :

$$H_f(X_0) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

**Théorème 4.3** (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (cas  $m = 1$ )). Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  sur  $D$ , alors pour  $X_0 \in D$  et  $H \in \mathbb{R}^n$  tel que  $X_0 + H \in D$  :

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot H + \frac{1}{2} H^T H_f(X_0) H + o(\|H\|^2)$$

où  $H^T H_f(X_0) H = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) H_i H_j$  est la forme quadratique associée à la Hessienne.

### 4.3 Extrema

**Définition 4.7** (Extremum local). Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $X_0 \in D$  est un **minimum local** (resp. **maximum local**) s'il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  tel que  $f(X_0) \leq f(X)$  (resp.  $f(X_0) \geq f(X)$ ) pour tout  $X \in V \cap D$ . Un extremum est dit **strict** si l'inégalité est stricte pour  $X \neq X_0$ .

**Définition 4.8** (Point critique). Si  $f$  est différentiable sur  $D$ ,  $X_0 \in D$  est un **point critique** (ou stationnaire) si  $\nabla f(X_0) = 0$ .

**Théorème 4.4** (Condition nécessaire d'extremum local (Ordre 1)). Si  $f$  admet un extremum local en  $X_0 \in \text{Int}(D)$  et si  $f$  est différentiable en  $X_0$ , alors  $X_0$  est un point critique ( $\nabla f(X_0) = 0$ ).

**Théorème 4.5** (Condition suffisante d'extremum local (Ordre 2)). Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $D$  et  $X_0 \in \text{Int}(D)$  un point critique. Soit  $q(H) = H^T H_f(X_0) H$  la forme quadratique hessienne.

1. Si  $H_f(X_0)$  est **définie positive** (i.e.,  $q(H) > 0$  pour  $H \neq 0$ , ou toutes ses valeurs propres sont  $> 0$ ),  $X_0$  est un minimum local strict.
2. Si  $H_f(X_0)$  est **définie négative** (i.e.,  $q(H) < 0$  pour  $H \neq 0$ , ou toutes ses valeurs propres sont  $< 0$ ),  $X_0$  est un maximum local strict.
3. Si  $H_f(X_0)$  est **indéfinie** (i.e.,  $q(H)$  prend des valeurs  $> 0$  et  $< 0$ , ou elle a des valeurs propres de signes opposés non nulles),  $X_0$  est un **point selle** (ou col), pas un extremum.
4. Si  $H_f(X_0)$  est semi-définie (positive ou négative) mais pas définie (i.e.,  $q(H) \geq 0$  (ou  $\leq 0$ ) et  $q(H) = 0$  pour certains  $H \neq 0$ , ou au moins une valeur propre est nulle et les autres de même signe ou nulles), on ne peut pas conclure avec ce critère seul (cas douteux).

### 4.4 Règle de Dérivation en Chaîne

**Théorème 4.6** (Théorème de composition). Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^m$  des ouverts. Si  $g : U \rightarrow V$  est différentiable en  $X_0 \in U$ , et  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  est différentiable en  $Y_0 = g(X_0) \in V$ . Alors  $h = f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  est différentiable en  $X_0$ , et sa différentielle est :

$$dh_{X_0} = df_{g(X_0)} \circ dg_{X_0}$$

En termes de matrices Jacobiennes :

$$J_h(X_0) = J_f(g(X_0)) \cdot J_g(X_0)$$

Cas particulier :  $n = 1$ ,  $g(t) = (g_1(t), \dots, g_m(t))$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .  $h(t) = f(g(t))$ .

$$h'(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(t)) \cdot g'_j(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$$

## 5 Espaces Vectoriels Normés : Compléments

### 5.1 Suites et Séries de Fonctions

Soit  $X$  un ensemble,  $E$  un EVN (souvent  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $f_n : X \rightarrow E$ .

**Définition 5.1** (Convergence simple).  $(f_n)$  converge **simplement** vers  $f : X \rightarrow E$  si  $\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0$ .

**Définition 5.2** (Convergence uniforme).  $(f_n)$  converge **uniformément** vers  $f : X \rightarrow E$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0$$

Ceci est la convergence dans l'espace  $B(X, E)$  des fonctions bornées de  $X$  dans  $E$ , muni de la norme  $\sup \|g\|_\infty = \sup_{x \in X} \|g(x)\|_E$ .

**Théorème 5.1** (Continuité et convergence uniforme). Soit  $M$  un espace métrique. Si les  $f_n : M \rightarrow E$  sont continues pour tout  $n$  et  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f : M \rightarrow E$ , alors  $f$  est continue. L'espace  $C_b(M, E)$  des fonctions continues bornées de  $M$  dans  $E$ , muni de  $\|\cdot\|_\infty$ , est un espace de Banach si  $E$  est un espace de Banach.

**Définition 5.3** (Série de fonctions, Convergence normale). Une série de fonctions  $\sum u_n$  (où  $u_n : X \rightarrow E$ ) converge **normalement** si la série numérique  $\sum \|u_n\|_\infty$  converge. (i.e.  $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in X} \|u_n(x)\|_E < \infty$ ).

**Propriété 5.1.** Si  $E$  est un espace de Banach : Convergence normale  $\implies$  Convergence uniforme (et absolue)  $\implies$  Convergence simple.

## 5.2 Applications Linéaires Continues

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux EVN sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire.

**Théorème 5.2** (Continuité des applications linéaires). *Pour une application linéaire  $A : E \rightarrow F$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $A$  est continue (en tout point de  $E$ ).
2.  $A$  est continue en  $0_E$ .
3.  $A$  est bornée :  $\exists C \geq 0$  tel que  $\forall x \in E, \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$ .

**Définition 5.4** (Norme d'opérateur). *Si  $A : E \rightarrow F$  est une application linéaire continue, sa **norme d'opérateur** (ou norme subordonnée) est :*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \in E, x \neq 0_E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$$

$C$ 'est la plus petite constante  $C \geq 0$  telle que  $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$  pour tout  $x \in E$ . L'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  (ou  $B(E, F)$ ) des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  est un EVN. Si  $F$  est un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Propriété 5.2.** *Si  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $BA \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$ .*

**Lemme 5.1** (Dimension finie). *Si  $E$  est de dimension finie, toute application linéaire  $A : E \rightarrow F$  est continue.*

**Théorème 5.3** (Norme matricielle pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ou  $L(\mathbb{C}^n)$ ). *Si la norme sur  $\mathbb{C}^n$  est la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ , alors la norme d'opérateur associée est :*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$$

où  $A^*$  est l'adjointe de  $A$  (transposée conjuguée) et  $\lambda_{\max}(A^*A)$  est la plus grande valeur propre de la matrice hermitienne semi-définie positive  $A^*A$ . (C'est aussi la plus grande valeur singulière de  $A$ ). On a aussi  $\|A\| = \|A^*\|$  et  $\|A\|^2 = \|A^*A\|$  (si la norme est induite par le produit scalaire).

**Propriété 5.3** (Majoration de la norme matricielle). *Norme de Frobenius (Hilbert-Schmidt) :  $\|A\|_{HS} = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{Tr}(A^*A)}$ . On a  $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$  pour la norme d'opérateur induite par  $\|\cdot\|_2$ .*

## 6 Systèmes d'Équations Différentielles Linéaires

Considérons le système  $X'(t) = AX(t) + F(t)$ , où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ),  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $F : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

### 6.1 Exponentielle de Matrice

**Définition 6.1** (Exponentielle de matrice). *Pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , l'exponentielle de  $A$  est définie par la série :*

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

Cette série converge toujours (normalement dans  $M_n(\mathbb{K})$  muni de n'importe quelle norme matricielle, car  $M_n(\mathbb{K})$  est complet).

**Propriété 6.1** (Propriétés de l'exponentielle). 1.  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$  (pour toute norme matricielle subordonnée ou de Frobenius).

2. Si  $AB = BA$ , alors  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

3.  $e^0 = I$ .  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

4.  $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ .

## 6.2 Résolution de Systèmes

**Théorème 6.1** (Solution du système homogène). *Le problème de Cauchy  $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$  admet pour unique solution  $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ . L'ensemble des solutions de  $X'(t) = AX(t)$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .*

**Théorème 6.2** (Solution du système non homogène - Formule de Duhamel / Variation de la constante). *Le problème de Cauchy  $\begin{cases} X'(t) = AX(t) + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ , où  $F$  est continue, admet pour unique solution :*

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}F(s)ds$$

## Annexe : Comment montrer qu'un ensemble est ouvert/fermé

### Pour montrer qu'un ensemble $\mathcal{U} \subset E$ est ouvert

— Utiliser la définition :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}$$

— Montrer que  $E \setminus \mathcal{U}$  est fermé.

— Montrer que  $\mathcal{U}$  est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue  $f : E \rightarrow E'$  (i.e.  $\mathcal{U} = f^{-1}(O)$  avec  $O$  ouvert de  $E'$ ).

— Exprimer  $\mathcal{U}$  comme une boule ouverte (qui est toujours un ouvert).

— Écrire  $\mathcal{U}$  comme :

- une réunion (quelconque) d'ouverts ;
- une intersection finie d'ouverts.

— Montrer que  $\mathcal{U} = \text{Int}(\mathcal{U})$ .

— Si  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ , écrire  $\mathcal{U} = I_1 \times \cdots \times I_N$  où chaque  $I_i \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert.

### Pour montrer qu'un ensemble $V \subset E$ est fermé

— Utiliser la définition :  $E \setminus V$  est ouvert.

— **Caractérisation séquentielle** : Toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $V$  qui converge vers  $x \in E$ , a sa limite  $x$  dans  $V$  ( $x \in V$ ).

— Montrer que  $V$  est l'image réciproque d'un fermé par une application continue  $f : E \rightarrow E'$  (i.e.  $V = f^{-1}(F)$  avec  $F$  fermé de  $E'$ ).

— Montrer que  $V = \text{Adh}(V)$ .

— Écrire  $V$  comme :

- une intersection (quelconque) de fermés ;
- une union finie de fermés.

— Si l'espace ambiant est  $\mathbb{R}^d$ , montrer que  $V$  est compact (car un compact dans  $\mathbb{R}^d$  est fermé et borné). Attention, cela prouve aussi qu'il est borné.

— Si  $V \subset \mathbb{R}^N$ , écrire  $V = I_1 \times \cdots \times I_N$  où chaque  $I_i \subset \mathbb{R}$  est un intervalle fermé.