TD 1 15/01/26

gerald.fahran@universite-paris-saclay.fr

Exo 1:

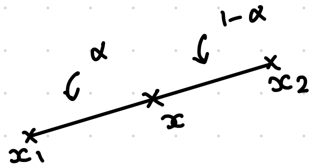
1) Soient x_1, x_2 deux solutions réalisables. Écrire les inégalités qu'elles vérifient

* L'ensemble des solutions réalisables $P = \{ x \in \mathbb{R}^n ; Ax \leqslant b \ ; x \geqslant 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$

$x_1, x_2 \in P$, mq tous les points du segment $[x_1, x_2]$ appartiennent à P, autrement dit que P est convexe.

- $x_i \in P$ alors $Ax_i \leqslant b$ et $x_i \geqslant 0$ pour $i \in \{1,2\}$

2) Soit $\alpha \in [0,1]$. Mq $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ vérifie $Ax \leqslant b$



Comme x_1, x_2 sont des solutions realisables, $Ax_1 \leqslant b$ et $Ax_2 \leqslant b$

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 \leqslant b \underset{\alpha \geqslant 0}{\Longrightarrow} \alpha A x_1 \leqslant \alpha b \\ Ax_2 \leqslant b \underset{1-\alpha \geqslant 0}{\Longrightarrow} (1-\alpha) x_2 \leqslant (1-\alpha) b \end{array}\right] \Rightarrow \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2 \leqslant \alpha b + (1-\alpha) b = b$$

donc $\boxed{Ax \leqslant b}$

3) Montrer que $x \geqslant 0$

$$x = \underbrace{\underset{\geqslant 0}{\alpha} x_1}_{\geqslant 0} + \underbrace{\underset{\geqslant 0}{(1-\alpha)} x_2}_{\geqslant 0}$$

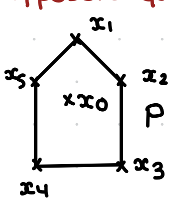
donc $x \geqslant 0$

CCL: On peut conclure que $\boxed{P \text{ est un polyèdre convexe}}$

Exo 2:

On suppose $(x_i)_{i \leqslant p}$ les sommets de P et x_0 une solution réalisable, i.e. $f(x_0) \geqslant f(x) \quad \forall x \in P$

1) Supposons que x_0 n'est pas un sommet. Réécrire x_0 en fonction des sommets de P



On peut écrire x_0 comme CL des sommets

i.e. $\exists (\lambda_i)_i$ tq $x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \_\_\_\_\_ + \lambda_p x_p$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, $\forall i, \lambda_i \geqslant 0$

et puisque x_0 n'est pas sommet, $\forall i, \lambda_i < 1$

2) $f(x_m) = \max \{ f(x_1), \_\_\_\_\_, f(x_p) \}$, mq $f(x_m) \geqslant f(x_0)$

Par linéarité def, on a $f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

Ainsi, puisque $\forall i \in [\![1, p]\!] \ f(x_m) \geqslant f(x_i)$ alors

$\sum \lambda_i f(x_i) \leqslant f(x_m) \sum \lambda_i$

$\leqslant f(x_m)$

donc $\boxed{f(x_0) \leqslant f(x_m)}$ $\left(\sum \lambda_i = 1 \right)$

3) En déduire que la fonction objectif atteint son maximum sur au moins un sommet de P

Par définition de x_m, l'un des sommets renvoie le maximum de f i.e. l'un des sommets est optimal.

Ainsi si x_0 renvoie le max, l'un des sommets le renvoie aussi.

4) Supposons que le max de f sur P soit atteint pour plusieurs sommets $x_1, \_\_\_\_, x_q$.

Montrer que toute combinaison convexe de ces sommets est également optimale.

Supposons que $f(x_m) = \max_{i \leqslant p} f(x_i) = f(x_j)$; $x_j \leqslant q$

Soient $\alpha_1, \_\_\_\_, \alpha_q$ des scalaires de $[0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$

Posons $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{q} x_i \alpha_i$

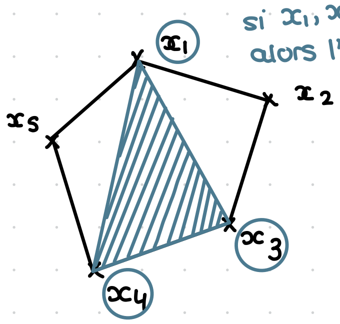
On a $f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{q} f(x_i)\alpha_i$, par linéarité de f

Or $f(x_i) = f(x_m)$ pour $i \in [\![1, q]\!]$

D'où $f(\tilde{x}) = f(x_m) \underbrace{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i}_{=1}$

Enfin, $f(\tilde{x}) = f(x_m)$

Donc $\tilde{x}$ est une solution optimale



si x_1, x_3, x_4 sont optimaux alors l'aire ▨ est optimale

(bijection sommets + colonnes de la matrice des contraintes

Exo 3.

$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A^j$; $A^1, \_\_\_\_, A^n$ les colonnes de A

P polyèdre

Partie A:

Supposons $\exists v_1, \_\_\_\_, v_K$ et $A^{v_1}, \_\_\_\_, A^{v_K}$ soient linéairement indépendantes

$b = \sum_{i=1}^{K} x_{v_i} A^{v_i}$; $x_{v_i} \geqslant 0$ (les autres composantes de x étant nulles)

1) Donner les coordonnées de x dans ce cas

$x_i = \begin{cases} x_{v_j} & \text{si } i = v_j \text{ pour } j \in [\![1, K]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Rq: $[x \geqslant 0$ et $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A^i \quad \sum_{i=1}^{K} x_{v_i} A^{v_i} = b]$

2) On suppose que x n'est pas un sommet

Écrire x comme CL de deux points distincts y et z de P

x n'est pas un sommet de P mais appartient à P

donc $\exists y, z$ deux points de P distincts tq $\exists \alpha \in]0,1[$, $x = \alpha y + (1-\alpha) z$

3) b en fonction de A^j et y puis z

On remplace x par son équation $x = \alpha y + (1-\alpha) y$

d'où $b = Ax = \alpha Ay + (1-\alpha) Az$

linéarité

or $y, z \in P$ donc $Ay \leqslant b$, $Az \leqslant b$

Puisque $\alpha, 1-\alpha \in]0,1[$ on a nécessairement $Ay = Az = b$

On a $\forall i \neq v_j \quad y_i = 0$ et $z_i = 0$

On a donc

$$Ay = \sum_{i=1}^{K} y_{v_i} A^{v_i} = b = \sum_{i=1}^{K} z_{v_i} A^{v_i}$$

4) Que peut on en déduire sur y, z et x?

Les $(A^{v_i})_i$ sont indépendants

donc $\forall i \quad y_{v_i} = z_{v_i}$

Autrement dit $y = z \leftarrow$ contradiction

c.à.d. x est un sommet de P

Partie B:

x sommet de P.
On suppose que les K premières composantes de x sont strictement positives et que les autres sont nulles, c.à.d. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ———, $x_K > 0$ x_{K+1} = ——— $= x_n = 0$
On veut mq

1) Supposons A^1, ———, A^K sont linéairement dépendantes.
Mq $\exists d \in \mathbb{R}^n$ non-nul tq $Ad = 0$, $d_j = 0$ $\forall j \in \{K+1, ———, n\}$

Supposons x un sommet de P et $\forall i \leq K$, $x_i > 0$
$i > K$ $x_i = 0$
Si A^1, ———, A^K sont dépendantes, $\exists$ une CL nulle
i.e. $\exists (\lambda) \neq 0_K$ tq $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i A^i = 0$

On défini alors $d = (\lambda_1, \lambda_2, ———, \lambda_K, 0, ———, 0) \neq 0_K$
et on vérifie $Ad = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i A^i + \sum_{i=K+1}^{n} 0_i A^i$
$= 0$

2) Mq $\exists \varepsilon > 0$ tq $x^+ = x + \varepsilon d$ et $x^- = x - \varepsilon d$ $\in P$
Posons $x^+ = x + \varepsilon d$ et $x^- = x - \varepsilon d$ avec $\varepsilon > 0$, mq $Ax^+ \leq b$ et $x^+ \geq 0$
$Ax^+ = Ax + \underbrace{\varepsilon Ad}_{=0} = Ax \leq b$

$x^+ \geq 0 \Leftrightarrow (x_1, ———, x_K, \underbrace{0, ———, 0}_{\text{pas de problème}}) + (\varepsilon\lambda_1, \varepsilon\lambda_2, ———, \varepsilon\lambda_K, 0, ———, 0) \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall i \leq K$ $x_i + \varepsilon\lambda_i \geq 0$ avec $x_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$
1er cas: $\lambda_i = 0$ $\rightsquigarrow$ c'est bon

2e cas: $\lambda_i \geq 0$ $x_i + \varepsilon\lambda_i > 0 \rightsquigarrow$ ok
donc $x^+ \in P$

de m, $Ax^- \leq b$
$x^- \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \leq K$ $x_i - \varepsilon\lambda_i \geq 0$
1er cas: $\lambda_i = 0 \rightsquigarrow$ ok
2e cas: $\lambda_i > 0 \rightsquigarrow$ on défini $\varepsilon \leq \frac{x_i}{\lambda_i}$

En posant $\varepsilon = \min_{\substack{i \text{ avec} \\ \lambda_i > 0}} \left(\frac{x_i}{\lambda_i}\right)$, on a bien x^+ et $x^- \in P$.

3) En déduire que x peut s'écrire comme cc non triviale de x^+ et x^- et mq A^1, ———, A^K linéairement indep

TD 2 29/01/26

Exercice 1

	A	B	C	D	E
P_1	0	1.5	2	3	3
P_2	3	4	3	2	0
dispo totale	39	60	57	70	57

$M_1 = 1700$ €, $M_2 = 3200$ €

a) programme linéaire correspondant :

On note x_1 (resp x_2) les quantités de pièces 1 (resp 2)

contraintes :

$$\begin{cases} 3x_2 \leqslant 39 & (1) \\ 3x_1 + 8x_2 \leqslant 120 & (2) \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 57 & (3) \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 70 & (4) \\ 3x_1 \leqslant 57 & (5) \end{cases}$$

et $\forall i,\ x_i \geqslant 0$ (6)

(1) $\Leftrightarrow x_2 \leqslant 13$

(5) $\Leftrightarrow x_1 \leqslant 19$

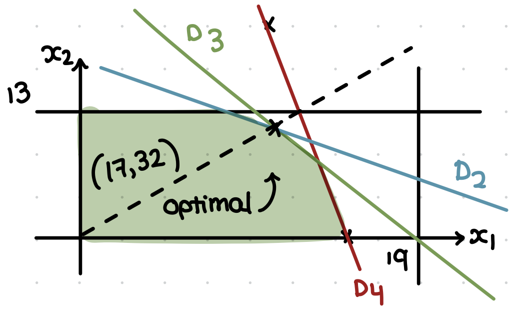
but : maximiser $1700x_1 + 3200x_2$

b) Graphiquement :

$D_2 : 3x_1 + 8x_2 = 120 \longrightarrow (0;15)$ et $(40;0) \in D_2$ et $(13.33\,;10)$

$D_3 : 2x_1 + 3x_2 = 57 \longrightarrow (0;19)$ et $(28{,}5;0) \in D_3$ et $(10;12{,}33)$

$D_4 : 3x_1 + 2x_2 = 70 \longrightarrow (0;35)$ et $(23{,}33;0) \in D_4$ et $(10,20)$



Graphiquement, on trace le vecteur gradient et on cherche le sommet du polyèdre le plus éloigné de (0, 0), perpendiculairement au gradient.

Ici, le sommet optimal a pour coordonnées (13.71, 9.86)

2) a)

	F_1	F_2	F_3
P_1	0	12	8
P_2	5	36	0
unités	Kg	m^3	m^2
stock dispo	55	432	136

prog linéaire
+ élimination des contraintes redondantes

On ajoute au système les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 5x_2 \leqslant 55 & (7) \\ 12x_1 + 36x_2 \leqslant 432 & (8) \\ 8x_1 \leqslant 136 & (9) \end{cases}$$

(7) $\Leftrightarrow x_2 \leqslant 11$ ⇝ cette contrainte est plus forte que (1)

(8) $\Leftrightarrow x_1 + 3x_2 \leqslant 36$ ⇝ ——————— (5)

(9) $\Leftrightarrow x_1 \leqslant 17$

rq : (8) $\Leftrightarrow 3x_1 + 9x_2 \leqslant 108$
+ (6) $x_2 \geqslant 0$) ces deux contraintes sont plus restrictive que (2)

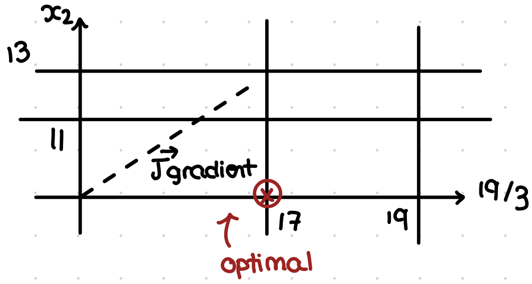
(7) + (8) $\Rightarrow 2x_1 + 3x_2 \leqslant x_1 + 17 = 53$) plus restrictif que (3)

(8) + 2(9) $\Rightarrow 3x_1 + 3x_2 \leqslant 70$ + (6) ⇝ plus restrictif que (4)

Finalement, on a les contraintes $\begin{cases} \forall i,\ x_i \geq 0 \\ x_1 \leq 17 \\ x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 36 \end{cases}$

On cherche à maximiser $1700x_1 + 3200x_2$

On trouve l'optimal à $(17, 19/3)$



Exercice 2 :

prod brut	orge	arachicles	sésame	% requis
% protéines	12 %	52 %	42 %	22 %
% de graisse	2 %	2 %	10 %	3.6 %
coût / tonne	25	41	39	

1) modélisation (les x_i sont les fractions de tonne de prod brut$_j$)

contraintes : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ \forall i,\ x_i \geq 0 & (2) \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 & (3) \\ 20x_1 + 20x_2 + 100x_3 \geq 36 & (4) \end{cases}$

simplification :
(3) $\Leftrightarrow 6x_1 + 26x_2 + 21x_3 \geq 11$
(4) $\Leftrightarrow 5x_1 + 5x_2 + 25x_3 \geq 9$

but : minimiser $25x_1 + 41x_2 + 39x_3$

2) réduction de la taille du problème

(1) $\Leftrightarrow x_3 = 1 - x_2 - x_1$

donc

(1) + (3) $\Rightarrow -30x_1 + 10x_2 \geq -20$

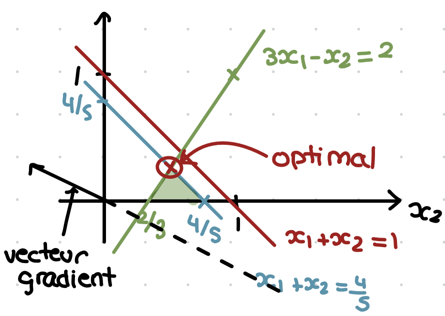
(1) + (4) $\Rightarrow -80x_1 - 80x_2 \geq -64$

$\Leftrightarrow 5x_1 + 5x_2 \leq 4$

D'où le problème réduit : $\begin{cases} x_j \geq 0 \quad \forall j \\ 30x_1 - 10x_2 \leq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 4 \end{cases}$

but : minimiser $f(x_1, x_2) = 39 - 14x_1 + 2x_2$

3) résoudre graphiquement



on revient à notre problème initial, l'optimal est atteint pour $(x_1, x_2, x_3) = (0.7, 0.1, 0.2)$

Exercice 3:

A_1: 35 o/h
A_2: 45 o/h
A_3: 20 o/h

max: 4900 /mois A_1
5400 / mois A_2
2000 / mois A_3

vérification: 3 techniciens, 170h /mois
A_1: 4 min A_3: 2 min
A_2: 3 min

machine: 200 h/mois
bénéfices: A_1: 60€/o
A_2: 40€/o
A_3: 80€/o

1) prog linéaire

but: maximiser $60x_1 + 40x_2 + 80x_3$

contraintes:

$$\begin{cases} \forall i \quad x_i \geq 0 & (1) \\ x_1 \leq 4900 & (2) \\ x_2 \leq 5400 & (3) \\ x_3 \leq 2000 & (4) \\ \frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{45} + \frac{x_3}{20} \leq 200 & (5) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq \underset{(170 \times 3 \times 60)}{30600} & (6) \end{cases}$$

dispo de la machine (5)

dispo des techniciens (6)

(5) et (6) ~> redondantes

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ \times 7 \\ \times 9 \\ 4 \\ \hline 1260 \end{array}$$

2) contrainte redondante + interpretation géométric

(5) $\Leftrightarrow 36x_1 + 28x_2 + 63x_3 \leq 252\,000$

(6) x 9 $\Leftrightarrow 36x_1 + 27x_2 + 18x_3 \leq 275\,400$

(5) + (1) est plus restrictif que (6), i.e. (6) est redondant avec les contraintes (5) et (1)

TD 3 29/01/26

Feuille 1, Exo4

contraintes:
$$\begin{cases} x_1 \leqslant 17 \\ x_2 \leqslant 11 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 36 \\ \forall i,\ x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

but: minimiser $1700x_1 + 3200x_2$

(rappel: l'optimal a été trouvé graphiquement et vaut $(x_1,x_2) = (17, 19/3)$)

Résolution à l'aide du simplexe

Sous forme de tableau, le problème s'écrit avec les variables d'écart ainsi:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 = 17 \\ \quad x_2 + x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 36 \\ \forall i, x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

but: minimiser $1700x_1 + 3200x_2$

On peut l'écrire sous forme de tableau

/	/	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B	
C_B	C_x	1700	3200	0	0	0	0	L_0
0	x_3	1	0	1	0	0	17	L_1
0	x_4	0	1	0	1	0	11	L_2
0	x_5	1	3	0	0	1	36	L_3

$L_0 \leftarrow L_0 - 3200L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$
$L_1 \leftarrow L_1$
$L_2 \leftarrow L_2$

Cb	Δ	1700	0	0	-3200	0	-35200
0	x_3	1	0	1	0	0	17
3200	x_2	0	1	0	1	0	11
0	x_5	1	0	0	-3	1	3

$L_0 \leftarrow L_0 - 1700L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$L_2 \leftarrow L_2$
$L_3 \leftarrow L_3$

Cb	Δ	0	0	0	1900	-1700	-40300
0	x_3	0	0	1	3	-1	14
3200	x_2	0	1	0	1	0	11
1700	x_1	1	0	0	-3	1	3

$L_0 \leftarrow L_0 - L_1 \cdot \frac{1900}{3}$
$L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

Cb	Δ	0	0	$-1900/3$	0	$-3200/3$	$-147500/3$ ← gain
1900	x_4	0	0	$1/3$	1	$-1/3$	$14/3$
3200	x_2	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	$19/3$
1700	x_1	1	0	1	0	0	17

L'optimal est atteint pour $\boxed{(x_1,x_2) = (17, 19/3)}$ pour un gain de: $\frac{147500}{3} \approx 4900$

Feuille 2, exo 1:

$\max\ z = 50x_1 + 6x_2$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ 9x_1 + 4x_2 \leqslant 36 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

On introduit les variables d'écart:

$\max\ z = 50x_1 + 60x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$\forall i,\ x_i \geqslant 0$

→ On dresse le tableau pour appliquer méthode du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B	
Δ	50	30	0	0	0	0	L_0
x_3	1	2	1	0	0	0	L_1
x_4	1	1	0	1	0	5	L_2
x_5	9	4	0	0	1	36	L
Δ	20	0	-30	0	0	-240	
x_2	1/2	1	1/2	0	0	4	
x_4	1/2	0	-1/2	1	0	1	
x_5	7	0	-2	0	1	20	
Δ	0	0	-10	-40	0	-280	
x_2	0	1	1	-1	0	3	
x_1	1	0	-1	2	0	2	
x_5	0	0	5	-14	1	6	

L'optimal est atteint pour $(x_1, x_2) = (2,3)$ et un max de 280.

Exo2 :

$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_5$

sc : $2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 7$

$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 \leq 1$

TD 4 05/02/26

prog linéaire :
$$\begin{cases} \max z = -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ sc \quad x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) écrire sous forme standard

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0 \quad x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0\ x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

2) Pq $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow$ pas de sol de base réalisable

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on aurait $x_4 = -2$
$x_5 = -6$
$x_6 = 3$

Ce qui contredit les contraintes de positivité sur x_4 et x_5

3) Ajouter les variables x_7 et x_8 au système

Le programme devient :

$$\begin{cases} \max z = -6x_1 + 8x_2 + 6x_3 \\ \min y = x_7 + x_8 \\ \text{contraintes :} \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_8 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0 \quad x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0\ x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\min y = x_7 + x_8 \Leftrightarrow \max -x_7 - x_8$
$\Leftrightarrow \max 3x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 - 8$

4) écrire le programme linéaire pour la première phase

5) Compléter le tableau pour la première phase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_B	
Δ_{II}	−6	5	6	0	0	0	0	0	0	
Δ_I	3	0	2	−1	−1	0	0	0	8	
x_7	1	1	1	-1	0	0	1	0	2	$\to 2/1$
x_8	2	-1	1	0	-1	0	0	1	6	$\to 6/2$
x_6	-1	1	2	0	0	1	0	0	3	
Δ_{II}	0	11	12	-6	0	0	6	0	12	$\Delta_{II} + 6L_1$
Δ_I	0	-3	-1	2	-1	0	-3	0	2	$\Delta_I - 3L_1$
x_1	1	1	1	-1	0	0	1	0	2	L_1
x_8	0	-3	-1	2	-1	0	-2	1	2	$L_1 - 2L_1$
x_6	0	2	3	-1	0	1	1	0	5	$L_3 + L_1$
Δ_{II}	0	2	9	0	-3	0	0	3	18	$\Delta_{II} + 3L_2$
Δ_I	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	$\Delta_I - L_2$
x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	0	-1/2	3	$L_1 + L_2/2$
x_4	0	-3/2	-1/2	1	-1/2	0	-1	1/2	1	$L_2 \leftarrow 2/L_2$
x_6	0	1/2	5/2	0	-1/2	1	0	1/2	6	$L_3 + L_2/2$

6) Donner la solution de base réalisable

On a pour solution de base réalisable $(x_1, x_4, x_5) = (3, 1, 6)$.

On débute le simplexe phase II sur le tableau sans la ligne Δ_I et les colonnes x_7 et x_8

7)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B	
Δ_{II}	0	2	9	0	-3	0	18	
x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	3	6
x_4	0	-3/2	-1/2	1	-1/2	0	1	
x_6	0	1/2	5/2	0	-1/2	1	6	11/5
Δ_{II}	0	1/5	0	0	-6/5	-18/5	-18/5	$\Delta_{II} - \frac{18}{5} L_3$
x_1	1	-3/5	0	0	-2/5	-1/5	9/5	$L_1 = L_1 - \frac{1}{5} L_3$
x_4	0	-7/5	0	1	-3/5	1/5	11/5	$L_2 + \frac{1}{5} L_3$
x_3	0	1/5	1	0	-1/5	2/5	12/5	$L_3 = 2/5 L_3$
Δ_{II}	0	0	-1	0	-1	-4	-6	$\Delta_{II} - L_3$
x_1	1	0	3	0	-1	1	9	$L_1 + 3L_3$
x_4	0	0	7	1	-2	3	19	$L_2 + 7L_3$
x_2	0	1	5	0	-1	2	12	$5L_3$

8) donner la solution optimale

Nous avons le maximum valant 6 atteint pour $(x_1, x_2, x_3) = (9, 12, 0)$

Exo 2 :

Résoudre avec la méthode du simplexe en deux phases.

$$\begin{cases} \max z = -8x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ \text{s.c.} \quad x_1 + x_2 = 12 \\ x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_3 = 6 \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

→ puisque $(0,0,0,0)$ n'est pas une solution de base réalisable, on ajoute des variables artificielles et nous effectuons un simplexe en deux phases.

Notre problème "artificialisé"

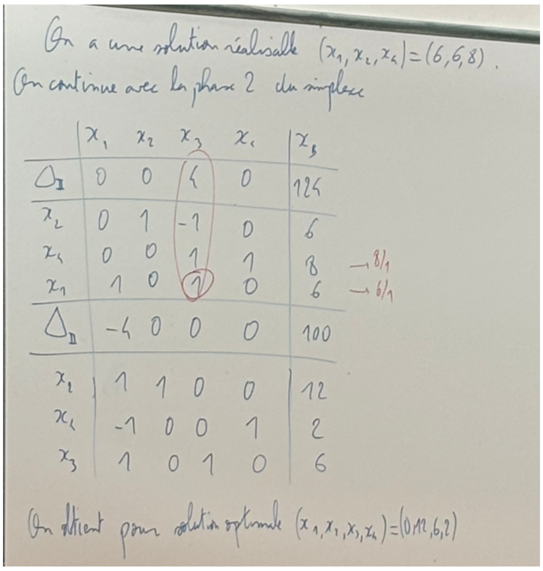
$$\begin{cases} \max z = -8x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ \max -x_5 - x_6 - x_7 \\ \text{contraintes :} \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_3 + x_4 + x_6 = 8 \\ x_1 + x_3 + x_7 = 6 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$$

et $\max -x_5 - x_6 - x_7 \Leftrightarrow \max 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 26$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Δ_I	-8	-6	-3	-5	0	0	0	0
Δ_{II}	2	1	2	1	0	0	0	26
x_5	1	1	0	0	1	0	0	12
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_7	1	0	1	0	0	0	1	6
Δ_{II}	0	-6	5	-5	0	0	8	48
Δ_I	0	1	0	1	0	0	-2	14
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Δ_I	0	0	-1	-5	6	0	2	84
Δ_{II}	0	0	1	1	-1	0	-1	8
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_7	1	0	1	0	0	0	1	6
Δ_{II}	0	0	4	0	6	5	2	126
Δ_I	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6

On a une solution réalisable $(x_1, x_2, x_4) = (6, 6, 8)$
→ on continue avec la phase 2 du simplexe



On a une solution réalisable $(x_1, x_2, x_4) = (6,6,8)$.
On continue avec la phase 2 du simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B	
Δ_I	0	0	4	0	124	
x_2	0	1	-1	0	6	
x_4	0	0	1	1	8	→ 8/1
x_1	1	0	1	0	6	→ 6/1
Δ_{II}	-4	0	0	0	100	
x_2	1	1	0	0	12	
x_4	-1	0	0	1	2	
x_3	1	0	1	0	6	

On obtient pour solution optimale $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 12, 6, 2)$

TD 5

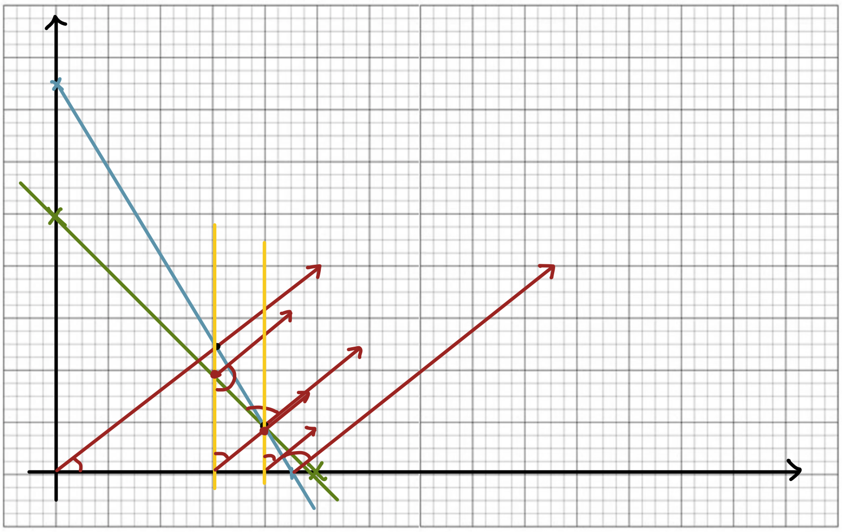
Exo 1 :

$\max f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$

sc. $x_1 + x_2 \leq 5$ (1)

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$ (2)

$x_1, x_2 \geq 0$ entiers



$(1) \Rightarrow x_1 = 5 - x_2$

$(2) \Rightarrow 50 - 10x_2 + 6x_2 = 45$

$\Rightarrow -4x_2 = -50 + 45$

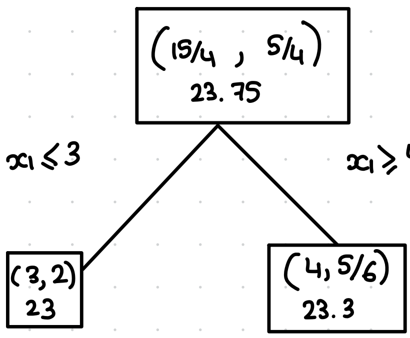
$\Rightarrow -4x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = 5/4$

$x_1 = 5 - 5/4 = 15/4$

solution continue réalisable : $(15/4, 5/4)$ de valeur 23.75

On a donc $LB \leq z\text{-int} \leq UB$

$\Rightarrow 19 \leq z\text{-int} \leq 23$ $(3, 1)$ est une sol entière réalisable, de valeur 19



on s'arrête ici

La solution entière est donc atteinte pour $(x_1, x_2) = (3,2)$ et vaut 23.

Exo2 :

p_i ; $i = 1, \text{——}, n$ poids de l'objet

u_i : note d'utilité

1) variables de décision (x_i)

x_i vaut 1 si on prend l'objet, 0 sinon

2) contraintes :

la valise ne doit pas peser plus de β kg

$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq \beta$

il ne va pas être possible d'emporter les n objets : $\sum x_i \leq n$

+ positivité : $x_i \geq 0$

objectif : maximiser l'unité globale de la valise, fonction objectif : $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i$

3) $\beta = 17$ Kg,

4 objets de poid : $p_1 = 3$, $p_2 = 7$ $p_3 = 9$, $p_4 = 6$ $u_1 = 8$, $u_2 = 18$, $u_3 = 20$, $u_4 = 11$

écrire le programme linéaire :

$$\max z = 8x_1 + 18x_2 + 20x_3 + 11x_4$$

méthode de Fayard et Plateau : (1978)

1. On trie les ratios qt/poids (u_i/p_i) par ordre décroissant

Selon l'ordre, on met les objets dans le sac jusqu'à ce que l'on dépasse β

2. Le premier objet qui dépasse β est mis fractionnaire de façon à compléter le poids de la valise

ratios : $8/3 > 18/7 > 20/9 > 11/6$

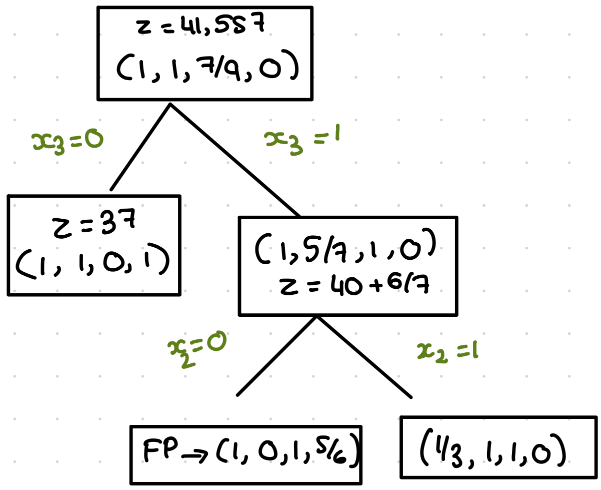
on met x_1, x_2 : $3 + 7 = 10$

il reste 7Kg. p_3 vaut 9 donc on met $7/9\, x_3$

poids vaut 17

opti z : $f(1, 1, 7/9, 0) = 41.55$

5) résoudre

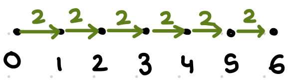


TD 7 12/03/2025
(Missing : TD5 & TD6)

Feuille TD6 exo2 :

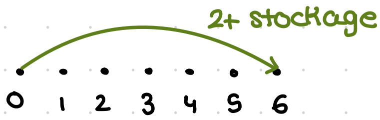
Données : 6 mois
demandes mensuelles
$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = (200, 200, 300, 700, 1000, 200)$, soit un total de 2600 cabines à installer
$a = 2000€$ coût d'approvisionnement.
$s = 2€$ / cabine / mois coût de stockage
stocke final imposé : 0

directeur d'achat :
principe : tout approvisionner le début de mois 1



L'approvisionnement chaque mois engendre un coût de 12K €

directeur financier : approvisionner chaque début de mois la quantité à installer



Si on fait un seul approvisionnement, on aurait un coût de :
- 1x approvisionnement
- 200 articles à garder 1 mois : 2x200

  +300 ———— 2 mois : 4x300

  +700 ———— 3 mois : 6x700

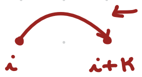
  +1000 ———— 4 mois : 8x1000

  +200 ———— 5 mois : 10x200

Ce qui ferait un total de 17 800€

1) Le coût de stockage des cabines installées dans le mois n'est pas influencé par la stratégie de stockage (car toutes les cabines du mois doivent etre en notre posession), ce qui est inconnu mais fixe, et on ne pourra pas l'améliorer.

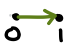
2) cf. décroissement de l'enoncé.
3) $G = (X, U)$
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



← on peut approvisionner et stocker en début du mois $i+1$ les cabines necessaires aux installations des mois $i+1$, $i+2$, ———, $i+K$

Un chemin de 0 à 6 représente une solution admissible au problème (une stratégie de stockage)
C'est le poids du chemin qui nous servira pour choisir le meilleur chemin

e.g. le chemin (0, 2, 5, 6), signifie
- au moment de signer, j'achète et stocke pour les 2 premiers mois (400 cabines)
- à la fin du 2^{e} mois, j'achète et stocke pour installer les cabines jusqu'au 5^{e} mois (2000 cabines)
- à la fin du 5^{e} mois, j'achète et stocke pour installer les cabines du 6^{e} mois (200 cabines)

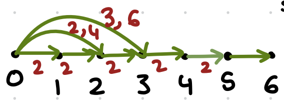
4)a) $v(0,1)$:  2000€

$v(0,2)$:  $2000 + 2 \cdot 200 = 2400€$

2€ stockage ↑ ↑ 200 cabines

• $v(0,3)$:  $2000 + 2 \cdot 200$
$+ 4 \cdot 300 = 3600€$

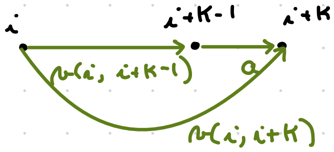
↑ il faut stocker 2 mois ↑ mois 3

rq : 

le chemin $(0,3)$ est moins cher que $(0,1,2,3)$

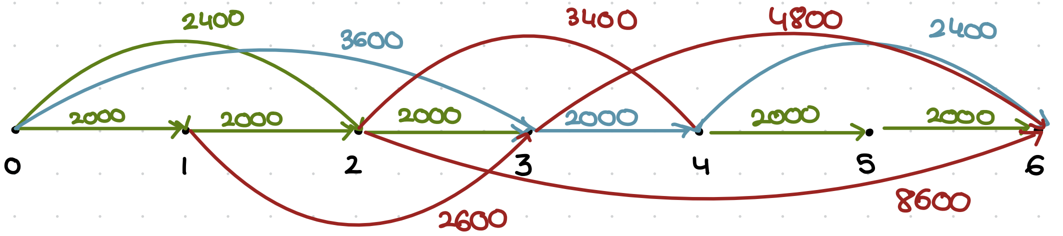
b) $v(i, i+k) = v(i, i+k-1) + \underbrace{s(k-1)}_{\text{stockage pendant } k-1 \text{ mois}} \cdot b_{i+k}$

↑ on n'a pas acheté / stocké les cabines du $i+k$ème mois

c) 

Pour aller de i à k, on peut suivre le chemin $(i, i+k)$ de coût $v(i, i+k)$
ou le chemin $(i, i+k-1, i+k)$ de coût $v(i, i+k-1) + a$
On cherche le minimum des deux, on ne choisit pas $(i, i+k)$ lorsque $v(i, i+k) > v(i, i+k-1) + a$
$\Leftrightarrow \boxed{s(k-1)\, b_{i+k} > a}$

On ne trace donc pas cet arc.

5) 

1	200
2	200
3	300
4	700
5	1000
6	200

doit on calculer :

$v(0,4)$? : → non car $2 \cdot (4-1) \cdot 700 > 2000$
$v(1,3)$: $= 2000 + 2 \cdot 300 = 2600$
$v(1,4)$: non car $2 \cdot (3-1) \cdot 700 > 2000$
$v(1,5)$: $= 2600 + 2 \cdot 2 \cdot 700 + 2 \cdot 3 \cdot 1000 = 11400$ ×
$v(1,6)$: $= 11400 + 2 \cdot 5 \cdot 200 = 13400$
$v(2,4)$: $= 2000 + 2 \cdot 700 = 3400$
$v(2,5)$: non car $2 \cdot (3-1) \cdot 1000 > 2000$
$v(2,6)$: $= 3400 + 2 \cdot 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 3 \cdot 200 = 8600$
$v(3,5)$: non car $2 \cdot (2-1) \cdot 1000 \geq 2000$
$v(3,6)$: $2000 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 2 \cdot 200 = 4800$
$v(4,6)$: $2000 + 2 \cdot 200 = 2400$

rq : on aurait pu ne pas les écrire, en notant qu'il faut ajouter 4000 € pour finir le chemin de 0 à 6 ce qui dépasserait la solution de base à 12K€.

6) Meilleur parcours $(0,3,4,6)$ avec un coût total de 8000€

TD 8 19/03/2025

Exo1:

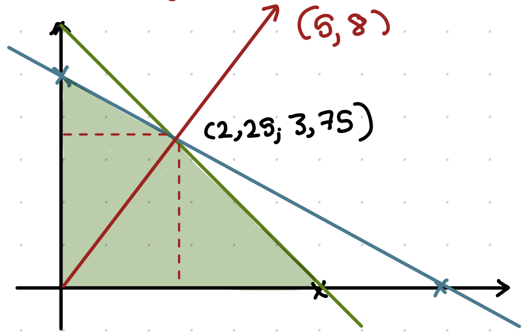
(P) : $\max z = 5x_1 + 8x_2$

s.c : $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$ <u>et entier</u>

1) Résoudre graphiquement



$x_1 = 6 - x_2$

$\Rightarrow 30 + 4x_2 = 45$

$\Rightarrow x_2 = 15/4$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 9/4 \\ x_2 = 15/4 \end{array}}$$

2) <u>Forme standard:</u>

$(P) = \max z = 5x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4$

s.c. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ (1)

$5x_1 + 9x_2 + x_4 = 45$ (2)

$x_1, x_2 \geq 0$

<u>Algorithme primal du simplexe:</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Δ	5	8	0	0	0
x_3	1	1	1	0	6
x_4	5	9	0	1	45
Δ	5/9	0	0	-8/9	-40
x_3	4/9	0	1	-1/9	1
x_2	5/9	1	0	1/9	5
Δ	0	0	-5/4	-3/4	-165/4
x_1	1	0	9/4	-1/4	9/4
x_2	0	1	-5/4	1/4	15/4

≈ -41.25

3) Calculer la coupe de Gomory à partir de la deuxième ligne : + en déduire la contrainte $8x_1 + 12x_2 \leq 60$

Sol. $(9/4, 15/4, 0, 0)$

$x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{15}{4}$

$\Rightarrow (1+0)x_2 + \left(\frac{3}{4} - 2\right)x_3 + \left(0 + 1/4\right)x_4 \geq 3 + 3/4$

$1x_1 - 2x_2 \leq 3$ (3) $\qquad \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq 3/4$ (4)

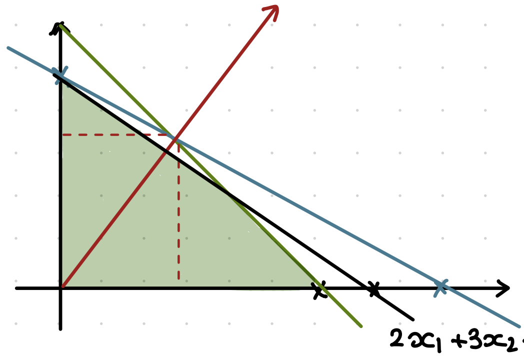
On cherche la contrainte $8x_1+12x_2 \leq 60$ i.e. $2x_1+3x_2 \leq 15$
(2) + (1) + (3) $\Leftrightarrow 2(x_1+x_2+x_3) + (x_1-2x_3) \leq 2+6+3$
$\Leftrightarrow 2x_1+3x_2 \leq 15$

même chose avec les parties fractionnaires:
$\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{3}{4}$

d'où $x_3 \geq \frac{3-x_4}{3} = 1 - \frac{x_1}{3}$

de là, $x_1+x_2+x_3=6$ devient $x_1+x_2+1-\frac{x_4}{3} \leq 6$
d'où $x_4 \geq 3x_1+3x_2-15$
$5x_1+9x_2+x_4=45$ devient $5x_1+9x_2+3x_1+3x_2-15 \leq 45$
soit $8x_1+12x_2 \leq 60 \Leftrightarrow 2x_1+3x_2 \leq 15$

4) Graphiquement,



Le dernier couple entier determiné à l'aide d'une perpendiculaire au gradient est (0, 5)
Pour $(x_1,x_2)=(0,5)$ on obtient $z=40$

5) on ajoute au tableau du simplexe la contrainte fractionnaire:
$\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq 3/4$
$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq -\frac{3}{4}$

qui s'écrit avec une variable d'écart s:
$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + s = -\frac{3}{4}$

Soit le tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	s	b
Δ	0	0	-5/4	-3/4	0	-40-1/4
x_1	1	0	9/4	-1/4	0	9/4
x_2	0	1	-5/4	1/4	0	15/4
s	0	0	-3/4	-1/4	1	-3/4

6) La solution est non réalisable car normalement $s \geq 0$.

Pour faire sortir s, on calcule les coûts marginaux $\frac{c_j}{a_{ij}}$ et on prend le minimum
Ici, on a deux coûts marginaux: $\frac{-5/4}{-3/4} = 5/3$

$\frac{-3/4}{-1/4} = 3$

donc on fait entrer x_3,

	x_1	x_2	x_3	x_4	s	b
Δ	0	0	0	-1/3	-5/3	-40
x_1	1	0	0	-1	3	$\boxed{0}$
x_2	0	1	0	2/3	-5/3	$\boxed{5}$
s	0	0	1	1/9	-1/3	1

La solution est entière et vaut $(x_1,x_2)=(0,5)$ pour $z=40$

Exo2: similaire (x_1 et x_2 sont intervertis, sol (5, 0))
le max de z deviendra max $-z$ dans dans le dual.

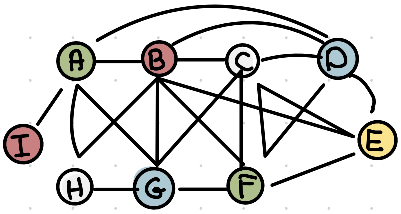
TD 9 (TP- 26/03/26)

Exo 0.

$\chi(\mathcal{G})$: nb chromatique = le nombre de couleurs minimal pour colorier le graphe $\mathcal{G}$ sans avoir deux sommets contigüe de m̄ couleur

On a : $1 \leq \max\limits_{\substack{\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G} \\ \text{et } \mathcal{G}' \\ \text{complet}}} |\mathcal{G}'| \leq \chi(\mathcal{G}) \leq |\mathcal{G}|$

Algo de Welsh & Powell :

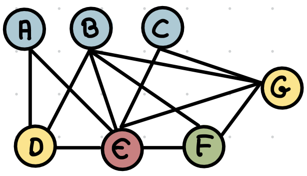


Étape 1 : (classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré = nb de sommets adjacents)

sommet	B	A	F	G	C	D	E	H	I
degré	7	5	5	5	4	4	4	3	1
couleur									

rq : le sousgraphe composé des sommets B, C, F, G est complet d'ordre 4 donc $4 \leq \chi(\mathcal{G})$
ω-P donne $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$

Exo 1 :

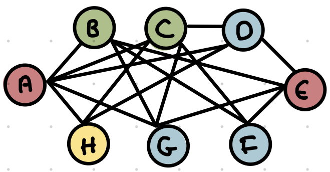


sommet	E	B	G	D	F	A	C
degré	6	4	4	3	3	2	2
couleur							

Ainsi : ω-P précise que $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$

Le sous-graphe composé des sommets B, E, F, G est complet d'ordre 4 donc $4 \leq \chi(\mathcal{G})$
On peut conclure que $\boxed{\chi(\mathcal{G}) = 4}$

Exo 2 :



a) modélisation : les sommets représentant les poissons
les couleurs ———— les aquariums
les arêtes ———— l'incomptabilité des poissons

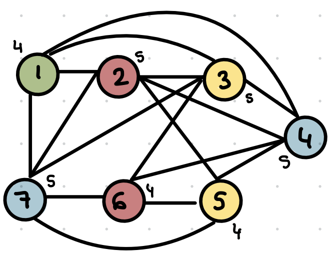
b)

sommet	A	C	B	D	E	G	F	H
degré	5	5	4	4	4	4	3	3
couleur								

donc $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$

c) Sous graphe complet d'ordre ACDH donc
$4 \leq \chi(\mathcal{G})$

Exo 3 :

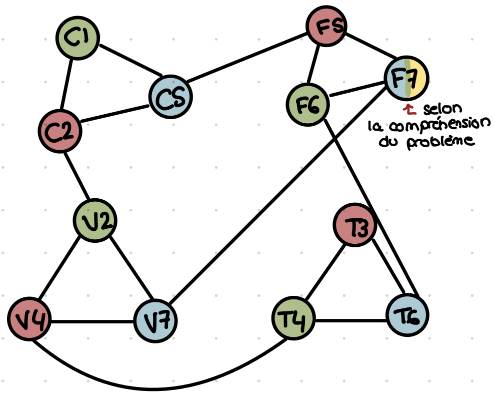


a) modélisation : sommet = examen
couleur = horaire, arête = paire avec étudiants communs

sommet	2	3	4	7	1	5	6
degré	5	5	5	5	4	4	4
couleur							

2 3 4 7 1 5 6
5 5 5 5 4 4 4
r r x x x x x r
v v v x x x
b v x x
g v v

Exo 4:



On suppose qu'une visite dure une journée

modélisation:

sommet = paire (lien / agence)

couleur = jour

arête = incompatibilité m̄ lien ou m̄ agence

4 jours:

- 1e : C_1, V_2, T_4, F_6
- 2e : C_2, V_4, T_3, F_5
- 3e : C_5, V_7, T_6
- 4e : F_7

3 jours:

- 1e : C_1, V_7, T_4, F_6
- 2e : C_2, V_4, T_3, F_5
- 3e : C_5, V_2, T_6, F_7