Cours 1 15/01/26

Optimisation et applications

Objectifs: transformer un problème réel en problème mathématiques que l'on peut optimiser

Exemple : Une usine fabrique 2 produits · produit A et produit B

Gain par unité : $A \to 3€$, $B \to 2€$ — quelles sont les variables ?

$\begin{cases} x = \text{nombre de prod A} \\ y = \text{nombre de prod B} \end{cases}$

↳ $x \geq 0$, $y \geq 0$

→ x et y sont les variables de décision

→ Contraintes réelles : • temps machine : $A \to 2H$/unité (*)
$B \to 1H$/unité
total dispo machine : 100 H
• matière première : $A \to 1$ ressource (**)
Total: 80 ressources dispo

→ Contraintes math : $\underbrace{2x}_{H} + \underbrace{1y}_{H} \leq \underbrace{100}_{H}$ (*)

$\underbrace{x}_{ress} + \underbrace{y}_{ress} \leq \underbrace{80}_{ress}$ (**)

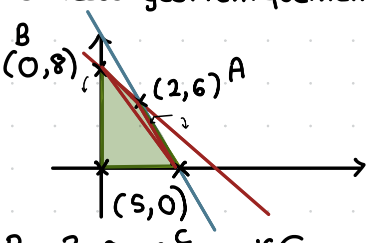
Contraintes $\begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 80 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$] contraites de non négativité

Fonction objectif: gain total : $\underbrace{3x}_{€} + \underbrace{2y}_{€}$ ⇒ il s'agit de la fonction que je souhaite maximiser

Programme linéaire : maximiser $3x + 2y$

sous contraintes $\begin{cases} 2x + y \leq 100 \; * \\ x + y \leq 80 \; * \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

On résout géométriquement pour 2 variables:



$2x + y = 100$
↳ droite
$x + y = 80$
↳ droite

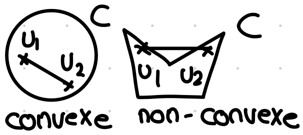
$B = 3 \times 0 + 2 \times 8 = 16€$
$C = 3 \times 2 + 2 \times 6 = 6 + 12 \boxed{= 18€}$ 2 produits A, 6 produits B
$D = 5 \times 3 + 0 \cdot 2 = 15€$

(ou: méthode du gradient)
ou: algorithme du simplexe
↓ polyèdre le plus simple possible
→ triangle en 2D
→ donne des directions de sommet en sommet
(trouve la direction qui maximise la fonction objectif

Vocabulaire / propriétés pour TDO

Def: Soient les vecteurs $U_1, U_2, \text{———}, U_K$ de $\mathbb{R}^n$; on appelle optimisation convexe de ces vecteurs est un vecteur $U = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i U_i$, où $\alpha_i \geqslant 0$ pour $i \in \{1, 2, \text{———}, K\}$ et $\sum_{i=1}^{K} \alpha_i = 1$

Def: Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe, ssi pour toute paire $\{U_1, U_2\}$ de vecteurs de C, toute optimisation convexe de U et U est dans C.



Prop: si C est convexe, toute C.L. convexe de points de C est dans C

Def: Un point U d'un ensemble convexe est appelé un <u>point extrême</u> si il ne peut pas être exprimé comme CL de 2 autres points distincts de C.

Def: Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, on appelle l'enveloppe convexe de S l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes de points de S

Def: Si l'ensemble S comporte un nombre fini de points, l'enveloppe convexe de S est appelé <u>polyèdre convexe</u>. Les points extrêmes de l'enveloppe convexe sont appelés sommets.

Version matricielle d'un prog. linéaire

$$\begin{cases} \max\ C_1x_1 + \text{———} + C_nx_n \\ a_{1,1}x_1 + \text{———} + a_{1,n}x_n \leqslant b_1 \\ \quad | \\ a_{m,1}x_1 + \text{———} + a_{m,n}x_n \leqslant b_m \\ x_1, x_2, \text{———}, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

→ forme matricielle équivalente:

$\max f(x) = c^T x$ sous les contraintes $Ax \leqslant b$

$x \geqslant 0$

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables
- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ | \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteurs des seconds membres
- $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ | \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coeffs de la fonction objectif
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \text{———} & a_{1n} \\ | & & \\ a_{m1} & \text{———} & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice de contraintes

Cours 2 22/01/26

(Suite TD. Exo 3 PB)

Partie A : $A_1, \_\_\_, A_K$ vect lin ind $\overset{\text{associé}}{\Rightarrow}$ x un sommet de P

Partie B :

x sommet de P.

On suppose que les K premières composantes de x sont strictement positives et que les autres sont nulles,

c.à.d. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\_\_\_$, $x_K > 0$ $\quad x_{K+1} = \_\_\_ = x_n = 0$

On veut mq

1) Supposons $A^1, \_\_\_, A^K$ sont linéairement dépendantes.

Mq $\exists d \in \mathbb{R}^n$ non-nul tq $Ad = 0$, $d_j = 0 \ \forall j \in \{K+1, \_\_\_, n\}$

↱ (question examen?)

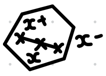
Supposons $A^1 \_\_\_ A^K$ dépendants. Alors, il existe $d_1, \_\_\_, d_K$ non tous nuls

tels que : $\sum_{j=1}^{p} d_j A^j = 0$

On définit $d = (d_1, \_\_\_, d_p, 0, \_\_\_, 0) \in \mathbb{R}^n$

Alors $d \neq 0$, $\quad Ad = \sum_{j=1}^{?} A^j = \sum_{j=1}^{K} d_j A^j = 0$

2) Mq $\exists \varepsilon > 0$ tq $x^+ = x + \varepsilon d$ et $x^- = x - \varepsilon d \quad \in P$



On veut construire 2 points x^+ et x^-.

Pour $\varepsilon > 0$, posons $x^+ = x + \varepsilon d$, $x^- = x - \varepsilon d$

Vérification des contraintes

$Ax^+ = A(x + \varepsilon d)$

$= \underbrace{Ax}_{\leq b} + \underbrace{\varepsilon A d}_{=0}$

car $x \in P$

donc $Ax^+ \leq b$

de m, $Ax^- \leq b$

contrainte de positivité :

Pour $j > K$, on a $x_j = 0$ et $d_j = 0$, donc $x_j^+ = 0$

Pour $1 \leq j \leq K$, on veut $x_j^+ = x_j + \varepsilon d_j \geq 0$

↳ il suffit de choisir $\varepsilon > 0$ tq

$\forall j \leq K$, avec $d_j \neq 0$, $\varepsilon \leq \frac{x_j}{|d_j|}$

(idem pour x^-)

Comme $x_j > 0$, on choisit $\varepsilon \leq \min\limits_{\substack{1 \leq j \leq K \\ d_j \neq 0}} \frac{x_j}{|d_j|}$

(ce qui garantit que $x^+ \geq 0$
et $x^- \geq 0$)

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, x^+ et $x^- \in P$

De plus, $d \neq 0$ implique $x^+ \neq x^-$

3) En déduire que x peut s'écrire comme cc non triviale de x^+ et x^- et mq $A^1, \_\_\_, A^K$ linéairement indep

On a $\frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}x^- = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\varepsilon d + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\varepsilon d = x$

Comme $x^+ \neq x^-$, x ne peut pas être un sommet

↳ x est une combinaison convexe non triviale de 2 points distincts de P. Ce qui contredit la définition d'un sommet.

Conclusion = $A^1 \_\_\_ A^K$ ne peuvent être dépendante (hyp fausse). Donc $A^1 \_\_\_ A^K$ sont lin indépendantes.

Exo 4:

prog linéaire

$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ contraintes $\sum_{j=1}^{n} x_j A^j = 0$; $x_j \geqslant 0$

c_j : coef de la fonction (linéaire)

x_j : coord de la sol

Sol: $X = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$

$A^1, \ldots, A^m$ lin indep

et $A^j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A^i$ $(j = 1, \ldots, n)$ (CL)

on note $z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_j$

z_j : profit marginal

Partie A:

1) Mq $\forall \theta \geqslant 0$

$X' = (x_1 - \theta x_{1j^*}, \ldots, x_m - \theta x_{mj^*}, 0, \ldots, 0, \theta, 0, \ldots, 0)$; $j^* \in \{m+1, \ldots, n\}$

vérifie

$\sum_{k=1}^{n} A^k x_k = b$

1ère coordonnées de x'

les colonnes de A peuvent s'exprimer comme CL des m premières

$$\sum_{j=1}^{n} A^j x'_j = \sum_{i=1}^{m} A^i x_i - \theta A^i x_{ij^*} + \theta A^{j^*}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A_i x_i - \theta \sum_{i=1}^{n} A^i x_{ij^*} + \theta \sum_{i=1}^{m} x_{ij^*} A^i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A^i x_i = b \text{ car } X \in P. \text{ Donc } X' \in P$$

(i.e. X' sol réalisable)

2) En utilisant la fct objectif, mq la valeur associée à X' est $z' = z - \theta(z_{j^*} - c_{j^*})$

valeur de la fonction objectif

$$z' = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i - \theta x_{ij^*}) + c_{j^*} \theta$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i}_{z} - \theta \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij^*}}_{z_{j^*}} + c_{j^*} \theta$$

$$= z - \theta(z_{j^*} - c_{j^*}) = z'$$

↓

si $z_{j^*} - c_{j^*} > 0$

on a trouvé une meilleure valeur pour le minimum

↓

on cherche θ tq les coords de $X' \geqslant 0$

$= \min x_{ij^*}$

3) Mq $\exists \theta > 0$ tq X' soit réalisable

La contrainte d'égalité est déjà satisfaite ✓

La seule chose à assurer est $X' \geqslant 0$

- Pour j^*, on a $x_{j^*} = \theta \geqslant 0$, donc ok
- Pour les variables de base, $x_i' = x_i - \theta x_{ij^*} \geqslant 0$?

si $x_{ij^*} < 0$, $x_i' > 0$

- Si $x_{ij^*} \leqslant 0$, cette inégalité est toujours vraie. ✓
- sinon, on choisit $\theta = \min \left\{ \frac{x_i}{x_{ij^*}} \;\middle|\; x_{ij^*} > 0 \right\}$

4) Supposons $\exists\, j^* \in \{m+1, \ldots, n\}$ tq $\exists$ au moins un $x_{ij^*} > 0$.

$$\theta = \min\left\{ \frac{x_i}{x_{ij^*}} \,\middle|\, x_{ij^*} > 0 \right\} = \frac{x_{i^*}}{x_{i^*j^*}}$$

9c)

$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ → m coord non nulle

$X' = (x_1 - \theta x_{1j^*}, \ldots, \underbrace{x_{i^*} - \theta x_{ij^*}}_{=0}, \ldots, x_m - \theta x_{mj}, 0, \ldots, 0, \theta, 0, \ldots, \theta)$

↑ indice j^*

$$x_{i^*} - \frac{x_{i^*}}{x_{i^*} x_{j^*}} \cdot x_i \cdot x_{j^*} = 0$$

à chaque changement de sommet, on annule une coordonnée, une autre devient non-nul

a) Mq $\sum_{i=1}^{m} A^i x_i = b$ donne une nouvelle écriture de b tq le coef de A^{i^*} est nul (en remplaçant θ par sa valeur)

$$\sum_{i=1}^{m} A^i x_i' = \sum_{i=1}^{m} A^i (x_i - \theta x_{ij^*}) + A^{j^*}\theta$$ (on suppose ici que pour θ le min est atteint en un unique i^*

b) En déduire une nouvelle sol admissible, expression + composantes ≥ 0

$$X' = (x_1 - \theta x_{1j^*}, \ldots, \underbrace{x_{i^*} - \theta x_{i^*j^*}}_{=0}, \ldots, x_m - \theta x_{mj^*}, 0, \ldots, \theta, \theta, 0, \ldots, 0)$$

$$= \left(x_1 - \frac{x_{i^*}}{x_{i^*j^*}} x_{1j^*}, \ldots, x_{i^*} - \frac{x_{i^*}}{x_{i^*} x_{j^*}} x_{i^*j^*} = 0, \ldots, x_m - \frac{x_{i^*}}{x_{i^*} x_{j^*}} x_{mj^*}, 0, \ldots, 0, \frac{x_{i^*}}{x_{i^*} x_{j^*}}, 0 \ldots 0 \right)$$

c) Mq si i^* est unique, cette sol possède exactement m variables strictement pos

5) On considère la sol admissible obtenue.
Mq elle correspond à un sommet de P (demontrer que $A^1, \ldots, A^{i^*-1}, A^{i^*+1}, \ldots, A^m, A^{j^*}$ sont lin indep

↳ Par l'absurde, supposons que ces m vecteurs soient linéairement dépendants ; dans ce cas il existe des scalaires : $y_i \in \{1, 2, \ldots, i^*-1, i^*+1, \ldots, m\}$

$$\text{tq} \sum_{i=1}^{i^*-1} A^i y_i + \sum_{i=i^*+1}^{m} A^i y_i + A^{j^*} y_{j^*} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i^*-1} A^i y_i + \sum_{i=i^*+1}^{m} A^i y_i = - A^{j^*} y_{j^*}$$

Mais $A^1, A^2, \ldots, A^m$ sont indépendantes (cx)
donc A^{j^*} s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs. $\left(A^{j^*} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij^*} A^i\right)$; donc $x_{i^*j^*}$ est nul

↓ or on a choisi $x_{i^*j^*} > 0$

car dans l'expression ci dessus, le coef de A^* est nul

On a choisi $x_{i^*j^*}$ non nul. Donc l'hypothèse de départ est fausse.
Donc $A^1, \ldots, A^{i^*-1}, A^{i^*+1}, \ldots, A^m, A^{j^*}$ sont linéairement indépendants.

Donc X' est un sommet de P (par l'exercice 3)

6) On suppose $z_{j^*} - c_{j^*} > 0$
Mq la nouvelle valeur est meilleure

Par Q2, $z' = z - \underbrace{\theta}_{>0} \underbrace{(z_{j^*} - c_{j^*})}_{>0 \text{ par hypothèse pour ce } j^*}$ profit marginal

Dans ce problème, on a bien $z' < z$, donc X' est une meilleure solution que X dans un problème de minimisation.

Cours 3 29/01/26

Partie B

On suppose que $X = (x_1, x_2, \_\_\_, x_m, 0, \_\_\_, 0)$ est une solution admissible

1) Mq $z_j = c_j \ \forall j \in \{1, \_\_\_, m\}$

2) on suppose que $z_j - c_j \leqslant 0 \ \forall j \in \{m+1, \_\_\_, n\}$
Mq $b = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j' x_{ij} \right) A^i$ + en déduire une nouvelle écriture pour x_i pour $i = 1, \_\_\_, m$

1) $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$

Pour tout $j \in \{1, \_\_\_, m\}$
On a trivialement $A^j = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} A^j = A^j$

ce qui implique $x_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = c_j$$

2) $X' = (x_1', \_\_\_, x_n') \in P$
donc
$$\sum_{j=1}^{n} A^j x_j' = b$$

or on sait que toutes les colonnes de la matrice s'expriment comme CL des m premières colonnes

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j' x_{ij} \right) A^i = b \quad \text{car } X \in B$$

Comme les m 1ères colonnes sont lin. indépendantes, l'écriture de b est unique dans cette base
et $x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' x_{ij} \right)$

3) En déduire que $z' = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' \geqslant z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$

$\forall j \leqslant m, \ z_j = c_j$
$\forall j > m, \ z_j \leqslant c_j$
et $x_j' \geqslant 0$

$$z' = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' \geqslant \sum_{j=1}^{n} z_j x_j' = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_j x_{ij} \right) x_j'$$

(toutes les valeurs seront moins bonnes)

$$= \sum_{i=1}^{m} c_j \left(\sum_{j=1}^{n} x_j' x_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = z$$

4) Conclure que X est une solution optimale

CCL : Toute solution réalisable X' vérifie $z' = c^T X' \geqslant c^T X = z$
Ainsi la solution X est optimale pour le problème de minimisation

+ pdf 'Méthodes'

Cours 4 05/02/26

TD3 :

Exercice :

Une société de conception de réseaux de télécommunication vient de signer un contrat d'équipement en cabines téléphoniques publiques avec un pays de l'Europe de l'Est. Le plan d'équipement doit durer 6 mois et consiste à installer chaque mois un nombre b_i de cabines ($i = 1, \dots, 6$).

i	1	2	3	4	5	6
b_i	200	200	300	700	1000	200

Les cabines sont importées d'un pays d'Asie du Sud-Est et stockées dans un entrepôt central avant d'être installées. L'approvisionnement du stock s'effectue en début de mois, la quantité approvisionnée pouvant correspondre à l'installation de plusieurs mois. Le stock final au terme du plan doit être nul.

Le directeur des achats, précisant que chaque approvisionnement engendre des frais fixes d'un montant $a = 2000$€ (quelle que soit la quantité commandée), préférerait tout approvisionner en début de mois 1.

Le directeur financier, lui, voudrait limiter les stocks qui génèrent des coûts (entretien, location de containers, risque de détérioration, immobilisation,...) et propose d'approvisionner chaque début de mois la quantité à installer. Il a établi que chaque article en stock en début de mois coûte $s = 2$ € pour le mois.

Le directeur général souhaite déterminer une politique d'approvisionnement qui minimise la somme de ces deux coûts (approvisionnement et stock).

Remarque : On notera qu'il n'est pas nécessaire de comptabiliser lors du mois i un coût de stockage pour les cabines à installer durant ce même mois ($i = 1, \dots, 6$).

Modélisation à l'aide d'un programme linéaire

1. Définir précisément les variables de décision. On prendra soin notamment de définir toutes les variables nécessaires à l'expression de la fonction objectif.
2. Écrire les différents types de contraintes.
3. Écrire la fonction objectif.

1) Variables de décision: $\forall i \in [\![1,6]\!]$; a_i : le nombre de cabines à acheter le mois i

$\forall i \in [\![1,6]\!]$; $s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall i \in [\![1,5]\!]$; p_i = quantité de cabines en stock durant le mois i en excluant les cabines à livrer durant le mois i

2) contraintes:

satisfaction de la demande:

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \quad (\Leftrightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2) \\ a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2 + b_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 \end{cases}$$

approvisionner

donner pendant ces 2 mois

avec les p_i:

$$\begin{cases} p_1 = a_1 - b_1 \Leftrightarrow a_1 - p_1 = b_1 \\ a_1 + a_2 - p_2 = b_1 + b_2 \\ \vdots \end{cases}$$

contraintes d'égalité

contraintes de non négativité:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \quad \forall i \in [\![1,6]\!] \\ p_i \geq 0 \quad \forall i \in [\![1,5]\!] \\ s_i = 0 \text{ ou } 1 \quad (i \in [\![1,6]\!]) \end{cases}$$

contrainte fixation des variables S_i : on veut que si $a_i > 0$, $s_i = 1$

$\forall i \in [\![1,6]\!]$, $a_i \leq M s_i$; avec M un majorant de a_i

3) fonction objectif: $\min \sum_{i=1}^{6} 2000 s_i + 2 p_i$

minimiser les frais

si approvisionnement, frais de 2000€

2 euro coût de stockage

version prof :

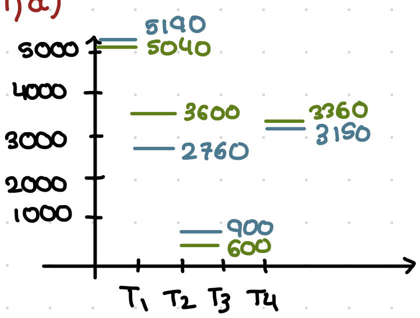
$$\min \underbrace{2 \sum_{i=1}^{5} p_i}_{\text{coût stockage}} + \underbrace{2000 \sum_{i=1}^{6} s_i}_{\text{coût approvisionement}}$$

ou 6 + contrainte $p_6 = 0$

Cours 5 (modelisation - TD6)

Cours 6 (Exo1- TD7)

1) a)



1/01 : 6G + 4P $(6 \times 200 + 4 \times 120) \times 3 = 5040$

1/04 : 0 $6 \times 200 \quad \times 3 = 3600$

1/07 : 1G $200 \quad \times 3 = 600$

1/10 : 1G + 6P $(2 \times 400 + 720) \times 3 = 3360$

G : 200 Tonnes /mois

P : 120 Tonnes /mois

b) coût global : $5000 \times (7 \times 6 + 3) + 3500 (10 \times 3)$ + reste

où reste = $(5190 - 5040 + 900 - 600) \times 35$

$= 15750$

total $= 330\,000 + 15750 = \underline{345750}$

2) Variable de décision

x_{it} : nombre de véhicules de type i engagés au début du trimestre t

$i = (1,2)$: 2 pour petit camion

1 pour grand camion

$t \in \{1, 2, 3, 4\}$

y_t : tonnage à faire livrer par le prestataire au trimestre t

$t \in \{1, 2, 3, 4\}$

contraintes :

$x_{it} \geqslant 0$, $t \in \{1,2,3,4\}$, $i \in \{1,2\}$

$y_t \geqslant 0$

$y_t \leqslant 500$

$x_{it} \leqslant 10$, $t \in \{2,4\}$

$x_{it} \leqslant 9$, $t \in \{1\}$

$x_{it} \leqslant 5$, $t \in 3$

$600 x_{11} + 360 x_{21} + y_1 \geqslant 5190 - 600 = 4590$

$600 x_{12} + 600 x_{11} + 360 x_{22} + y_2 \geqslant 2760$

$600 x_{13} + 600 x_{12} + 360 x_{23} + y_3 \geqslant 900$

$600 x_{14} + 600 x_{13} + 360 x_{24} + y_4 \geqslant 3150$

Objectif: $\min \sum_{t=1}^{3} (5000 \times 600)\, x_{1t} + 15000\, x_{14} + \sum_{t=1}^{4} 10500\, x_{21} + \sum_{t=1}^{4} 35\, y_1$

Cours 7 (Exo 2. TD7)

Cours 8 19/03/26
(Cours : 5, 6, 7 : missing)

(Slides : les méthodes de coupes)

égalité valide : toutes les solutions entières la valide

1) $20x_1 + 24x_2 \leq 108$ invalide

$x_1 = 1,\ x_2 = 4$ la vérifie mais vérifie pas $10x_1 + 12x_2 \leq 59$

2) $x_2 = 0,\ 10x_1 \leq 59$

$\Rightarrow x_1 \leq 5 \ (= \lfloor 5.9 \rfloor)$

donc c'est une égalité valide

redondance : une contrainte est non redondante si $\exists x$ qui satisfait le nouvel ensemble $(\bar{X}')$ des contraintes et pas l'ancien $(\bar{X})$ $(x \in \bar{X}',\ x \notin \bar{X})$

Algo simplexe primal : on part d'une solution réalisable
$\hookrightarrow x_i = b_i \geq 0$
on cherche une solution réal- optimale
on s'arrête quand $c_j \geq 0$ (si c'est un pb de min)
$c_j <$ si max

Algo dual du simplexe

$S = \underbrace{-f_i}_{<0}$

sol optimal (profit marginaux) ok

$c_j \geq 0$ si min
$c_j < 0$ si max
pas réalisable

on cherche à retrouver une solution réalisable

fin
$\forall i,\ b_i \geq 0$

\+ slides coupes de chvatal

Exercice :

(P) : $\max z = x_1 + 2x_2$

s. c. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \text{ (entiers)} \end{cases}$

forme standard : $\max z = 2x_1 + x_2$

s.c. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}, x_3 \in \mathbb{N}, x_4 \in \mathbb{N} \end{cases}$

tableau du simplexe :

max $Z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
Δ	1	2	0	0	0	
x_3	2	1	1	0	3	3/1
x_4	0	$\cancel{1}$	0	1	2	2/1] = min

Δ	1	0	0	-2	-4
x_3	2	0	1	-1	1
x_2	0	1	0	1	2

sol = (0, 2, 1, 0)
z = 4 ✓

Δ	0	0	-1/2	-3/2	$\boxed{-9/2}$
x_1	1	0	1/2	-1/2	$\boxed{1/2}$
x_2	0	1	0	1	$\boxed{2}$

z = -4,5
sol = ($\boxed{1/2}$, 2, 0, 0)
branch & bound
ou coupe
de chvatal

contrainte : $\frac{1}{2} = 1.x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}.x_4$

↳ on retire la partie entière de chaque coef

⚠ partie entières des nb négatifs

$(0+1/2) = (1+0)x_1 + (0+1/2)x_3 + (-1+\frac{1}{2})x_4$

La coupe de Goumory :

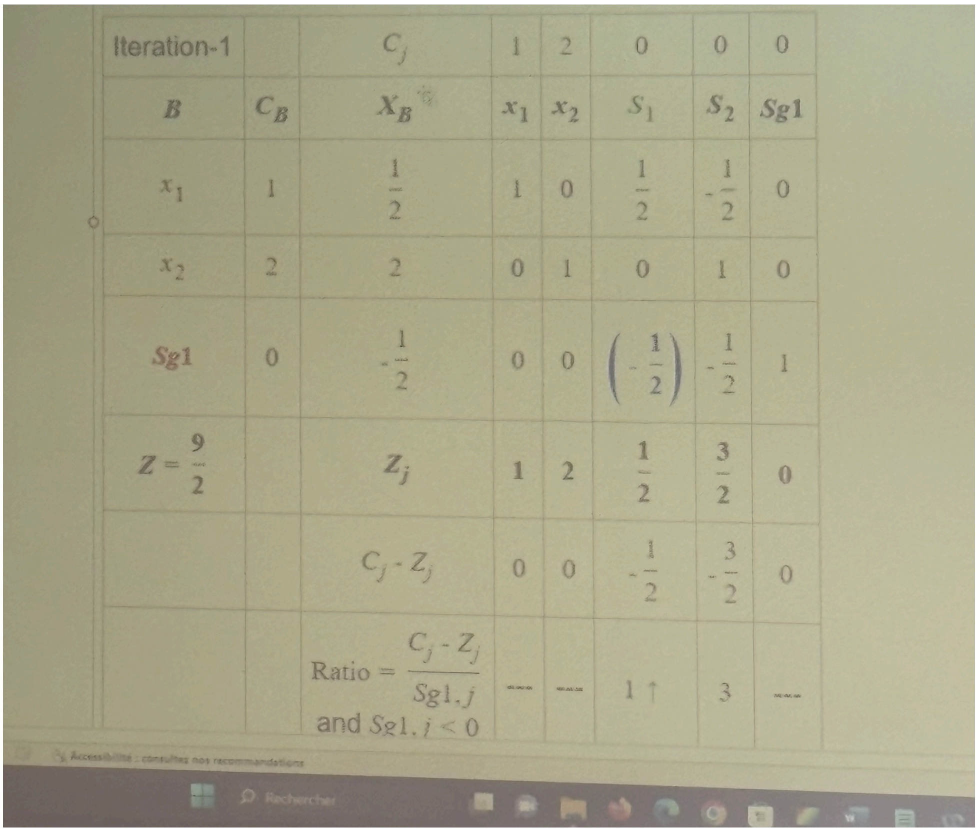
$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4}$$

à rajouter ds le tableau

$\Rightarrow \frac{1}{2} = -s + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} = s - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$x_3 = x_4 = 0$ (hors base)
donc $s = -1/2$
(sol non réalisable)



Iteration-1		C_j	1	2	0	0	0
B	C_B	X_B	x_1	x_2	S_1	S_2	$Sg1$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	2	2	0	1	0	1	0
$Sg1$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	1
$Z = \frac{9}{2}$		Z_j	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
		$C_j - Z_j$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
		Ratio = $\frac{C_j - Z_j}{Sg1,j}$ and $Sg1,j < 0$	---	---	1 ↑	3	---

Cours 9 26/03/26

Cours 9 26/03/26

Notes: [branch & Bound]:

Pb: $\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_1 + 4y_2$

s.c. $y_1 + y_2 \leqslant 1$

$y_1 \leqslant x_1$

$y_2 \leqslant x_2$

$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leqslant 10$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0,1\}$

Pb $\bar{P}$ (relaxation continue de P)

...

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$

et $\max(P) \leqslant \max \bar{P}$ (pour un pb de minimisation: $\min(P) \geqslant \min(\bar{P})$)

* Solution optimale de $(\bar{P})$: $(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right)$

valeur optimale: $z = \frac{33}{2} = 16.5$

brancher sur x_1:

→ $x_1 = 0$

→ $x_1 = 1$