

* $\mathcal{E}(\lambda)$: $\lambda > 0$, densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x > 0}$

$$\mathbb{E}: 1/\lambda, \text{V}: 1/\lambda^2$$

* Gamma(a, λ) ; $a > 0 ; \lambda > 0$, densité $x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x > 0}$

$$\text{où } \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} (\forall k \in \mathbb{N}^*, \Gamma(k) = (k-1)!)$$

prop: $X_1 \sim \text{Gamma}(a_1, \lambda)$
 $X_2 \sim \text{Gamma}(a_2, \lambda)$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}(a_1 + a_2, \lambda) \\ \text{si } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \end{array} \right\} X_1, \dots, X_n ; X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow$
 $X_1 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
 $(X_i \perp\!\!\!\perp X_j \forall i \neq j)$

* Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$; $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$

* Loi du chi-deux $\chi^2(k)$; $k \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté, densité $\frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$

$$\mathbb{E}: k \quad \text{V}: 2k$$

Prop: La loi χ^2 est la loi de la somme des carrés de k lois normales centrées réduites indépendantes (**)

Ex. 1.

$X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \sim \text{Unif}([0, 1])$

$$U_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

Loi de $Z_1 = -\ln(X_1)$? de $Z_n = -\ln U_n$?

1) Fonction de répartition: $F_{Z_1}(t) = \mathbb{P}(Z_1 \leq t)$
 $= \mathbb{P}(-\ln(X_1) \leq t)$
 $= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-t})$
 $= 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-t})$
 $= 1 - e^{-t}$

$f_{Z_1}(t) = F'_{Z_1}(t) = e^{-t}$ ← densité de la loi Exponentielle, $\lambda = 1$

$$Z_1 \sim \mathcal{E}(1)$$

2) $Z_n = -\ln(U_n) = -\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$
 $= -\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right)$
 or $\ln(X_i) \sim \mathcal{E}(1)$ et les X_i i.i.d.
 Donc $Z_n \sim \text{Gamma}(n, 1)$

↑ La somme de n v.a. $\sim \exp(\lambda)$ indep suit une loi $\text{Gamma}(n, \lambda)$ (*)

Exo2:

X_1, \dots, X_n échantillon i.i.d. densité $f(x) = 2x \exp(-x^2) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

1) Loi de X_1^2 ?

Méthode fonction muette:

Soit h une fonction continue bornée:

$$\mathbb{E}[h(X_1^2)] = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) f_{X_1}(x) dx = \int_0^{+\infty} h(x^2) 2x e^{-x^2} dx \stackrel{\substack{d\mu = 2x dx \\ \mu = x^2}}{=} \int_0^{+\infty} h(\mu) e^{-\mu} d\mu$$

X_1^2 a pour densité $f_{X_1^2}(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Donc $X_1^2 \sim \mathcal{E}(1)$

2) Loi de V_n

Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Donc $V_n = \frac{1}{n} S_n$ où $S_n \sim \text{Gamma}(n, 1)$ (*)

↳ (X_i i.i.d. $\Rightarrow X_i^2$ aussi puisque $x \mapsto x^2$ mesurable)

Soit h fct mesurable bornée

$$\mathbb{E}[h(V_n)] = \mathbb{E}\left[h\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} h\left(\frac{s}{n}\right) \frac{1}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-s} ds \stackrel{\substack{V = s/n \\ \Leftrightarrow s = nV \Rightarrow ds = n dV}}{=} \int_0^{+\infty} h(v) \frac{1}{\Gamma(n)} (nv)^{n-1} e^{-nv} n dv$$

$$= \int_0^{+\infty} h(v) \frac{n^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} e^{-nv} dv$$

On reconnaît la densité d'une loi $\text{Gamma}(n, n)$

Donc $V_n \sim \text{Gamma}(n, n)$

3) Étudier la convergence en probas de V_n et $1/V_n$

$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est la moyenne empirique de n v.a. i.i.d.

Comme ces v.a. sont intégrables ($\mathbb{E}(X_i^2) = 1 < +\infty$), la loi forte des grands nombres assure que:

$$V_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X_1^2) = 1$$

La cv p.s. implique la cv $\mathbb{P}(\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|V_n - 1| > \varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Considérons $g: x \mapsto 1/x$. Elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Comme $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le lemme de l'application continue (continuous Mapping Theorem)

$$\text{Alors: } g(V_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(1) \iff \frac{1}{V_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$$

Exo 3:

n -échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ n. v.a. iid $\sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; m supposé connu, $\sigma^2 > 0$ inconnu

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

1) Pourquoi V_n^2 est un estimateur?

V_n^2 est un estimateur de σ^2 si:

- $V_n = \phi(X_1, \dots, X_n)$ où ϕ est mesurable
- ne dépend pas de σ^2
- utilise seulement des quantités connues

2) Loi de V_n^2 + biais + risque quadratique

On sait que $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Posons $Z_i = \frac{X_i - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma Z_i)^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \iff \frac{n}{\sigma^2} V_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

or, la somme des carrés de n v.a. iid $\mathcal{N}(0, 1)$ suit une loi $\chi^2(n)$ (**)

$$\frac{n}{\sigma^2} V_n^2 \sim \chi^2(n)$$

• Sans-biais:

Calculons l'espérance de V_n^2 $\mathbb{E}(V_n^2) = \mathbb{E}\left(\frac{\sigma^2}{n} Y\right) = \frac{\sigma^2}{n} \mathbb{E}(Y) = \sigma^2$ (où $Y = \frac{n}{\sigma^2} V_n^2 \sim \chi^2(n)$)

Le biais de l'estimateur est défini par $B(V_n^2, \sigma^2) = \mathbb{E}[V_n^2] - \sigma^2 = 0$

Donc l'estimateur est sans biais

• Risque quadratique:

$$\begin{aligned} \text{Il est défini par } \mathcal{R}(V_n^2, \sigma^2) &= \text{Var}(V_n^2) + B(V_n^2, \sigma^2) \\ &= \text{Var}(V_n^2) \\ &= \text{Var}\left(\frac{\sigma^2}{n} Y\right) = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{n}$$

3) Mq V_n^2 est un estimateur consistant

Méthode 1 [canonique]

$$\mathcal{R}(V_n^2, \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{cours : } V_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$$

Méthode 2: (LGN forte)

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i ; \omega_i = (X_i - m)^2$$

Les ω_i sont iid intégrables donc $V_n^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(V_1) = \mathbb{E}[(X_1 - m)^2] = \sigma^2$

$$\text{Donc } V_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$$

Donc V_n^2 est un estimateur consistant.

Exo 4:

$(X_n; n \geq 0)$ iid $\sim \text{Unif}([0, 1])$ $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$

$$1) \text{ Mq } M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|1 - M_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ ?})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 - M_n \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(M_n \leq 1 - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq 1 - \varepsilon\}\right) \\ &\stackrel{X_i \text{ i.i.d.}}{=} \left[\mathbb{P}(X_1 \leq 1 - \varepsilon)\right]^n = (1 - \varepsilon)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Exo 1:

 (X_1, \dots, X_n) n -échantillons $\sim \mathcal{U}^{\otimes n}[0, \theta]; \theta > 0$

[Rappel: si $U \sim \mathcal{U}[a, b]$ alors $\mathbb{E}[U] = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{E}[U^2] = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$ et $\text{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$]

(Méthode:) $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{U}^{\otimes n}[0, \theta]$ i.i.d.
↑ on veut estimer

1) Exprimer $\theta = f(\mathbb{E}[X_1^n])$ 2) Remplacer le moment théorique ($\mathbb{E}[X^n]$) par moment empirique ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^n$)

↳ satisfaction LFGV ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^n \xrightarrow{\text{P.S.}} \mathbb{E}[X^n]$)

1) Déterminer l'estimateur des moments du param θ

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\mathbb{E}[X_1]$$

M.M. $\hookrightarrow \hat{\theta}_M = 2\bar{X}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

2) Estimateur du maximum de vraisemblance de θ Méthode:1. Chercher θ de façon à maximiser $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x_2) \dots \mathbb{P}(X_n=x_n)$$

$$\hookrightarrow \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

La densité d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$: $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq \theta\}}$ La fonction de vraisemblance: $\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{x_i \in [0, \theta]\}}$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{x_i \in [0, \theta]\}}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{0 \leq \max(x_1, \dots, x_n) \leq \theta\}}$$

On remarque que $\mathcal{L}(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n)$. De plus, $\theta \mapsto \frac{1}{\theta^n} \searrow$.Donc $\hat{\theta}_{MV} = \arg\max_{\theta} \mathcal{L}(\theta) = \max(x_1, \dots, x_n)$

3) Comparer les risques des deux estimateurs

$$\bullet \hat{\theta}_M = 2\bar{X}_n$$

Biais: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_M] = 2\mathbb{E}[\bar{X}_n] = 2\mathbb{E}[X_1] = \theta$

$$b(\hat{\theta}_M, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_M] - \theta = 0$$

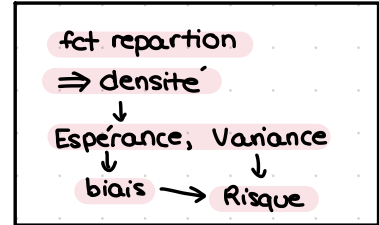
Risque quadratique: $\mathcal{R}(\hat{\theta}_M, \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}_M) + b(\hat{\theta}_M, \theta)$

$$= \text{Var}(\hat{\theta}_M)$$

$$= 4\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{4}{n} \text{Var}(X_1) = \frac{\theta^2}{3n}$$

• $\hat{\theta}_{MV}$

Fonction repartition: $F(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$
 $\hat{\theta}_{MV} = \prod_{i=1}^n (\mathbb{P}(X_i \leq x))$
 $= \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{x \in [0, \theta]}$



\hookrightarrow Densité de proba: $f_{\hat{\theta}_{MV}}(x) = \frac{F'(x)}{\hat{\theta}_{MV}} = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{x \in [0, \theta]}$

\hookrightarrow Espérance: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n\theta}{n+1}$

\hookrightarrow Biais: $B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \theta = \frac{-\theta}{n+1}$

Variance: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n\theta^2}{n+2}$

donc $\text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] - (\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}])^2$

$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

Risque quadratique: $R(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

\leftarrow bien qu'il soit biaisé, le risque converge plus rapidement que $\hat{\theta}_n$

Exo2:

X v.a. \sim Géom(p); $p \in]0, 1[$ i.e. $\forall x \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1}$
 (X_1, \dots, X_n) n-échantillon $\stackrel{d}{=} X$. $\mathbb{E}[X] = 1/p$.

1) Estimateur des moments du param p

$\mathbb{E}[X] = 1/p \Leftrightarrow p = 1/\mathbb{E}[X]$

donc $\hat{p}_M = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$

2) Estimateur du maximum de vraisemblance de p

On cherche à maximiser $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$

$L(p) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{x_i-1}$
 $= p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}$

Pour maximiser $L(p)$, on maximise $\ell(p) = \ln(L(p))$

$\ell(p) = n \ln(p) + \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\right) \ln(1-p)$

On dérive $\ell(p)$: $\ell'(p) = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{1-p}$

En posant $l'(\rho) = 0$

$$\frac{n}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{1-\rho} \Leftrightarrow n(1-\rho) = \rho \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \right)$$

$$\Leftrightarrow n = \rho \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} \Leftrightarrow \hat{\rho}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

On vérifie que $\hat{\rho}_{MV}$ est un maximum global:

$$l''(\rho) = -\frac{n}{\rho^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{(1-\rho)^2}$$

$-\frac{n}{\rho^2} < 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho \in]0, 1[$

Le support d'une loi géométrique est \mathbb{N}^* . Donc $\forall i, X_i \geq 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \geq \sum_{i=1}^n 1 = n \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i - n \geq 0$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{(1-\rho)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{(1-\rho)^2} \leq 0$$

On en déduit que $l''(\rho) < 0$ et donc l concave

$\hat{\rho}_{MV}$ est un max global

3) Mq consistant

$$\hat{\rho}_M = \hat{\rho}_{MV}$$

Par LGN, $\bar{X}_n = \frac{1}{\rho} > 0$

lemme de l'application continue

On applique LAC à $x \mapsto 1/x$ en $1/\rho$.

On obtient

$$\hat{\rho}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L.P} \frac{1}{1/\rho} = \rho$$

Exo3:

(X_1, \dots, X_n) n-échantillon $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1) Estimateur du maximum de vraisemblance de (μ, σ^2)

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right)$$

$$l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

• dérivée selon μ

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(X_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i - \mu$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$= \bar{X}_n =: \hat{\mu}$$

• dérivée selon σ^2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} &= \frac{-n}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \left(\frac{-1}{2(\sigma^2)^2} \right) \\ &= \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2}\end{aligned}$$

On cherche à annuler $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2}$ en $\hat{\mu}$, c.à.d. $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} \Big|_{\hat{\mu} = \bar{x}_n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (x_i - \hat{\mu})^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 = \hat{\sigma}^2$$

Les équations n'admettent qu'une unique solution $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (\bar{x}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2)$

On veut vérifier que $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ est le max global. On calcule le Hessien $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$

[..]

$$H(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} \Big|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \Big|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)} \\ \text{"} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} \Big|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{-n}{(2\hat{\sigma}^2)^2} \end{pmatrix}$$

CCL: La matrice Hessienne est définie positive en $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$. Le pt est un max local. Par unicité, il est global.

Exo: _____

Soit un n - échantillon X_1, \dots, X_n de densité $f(x) = \exp(\theta - x) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x)$ 1) Vérifier que f définit une densité, $\mathbb{P}(X_1 \leq x)$, $\mathbb{E}[X_1]$, $\text{Var}(X_1)$ • f densité: $f \geq 0$; $\exp \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} \exp(\theta - x) dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{+\infty} \exp(-x) dx$$

$$= e^{\theta} [-e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} = e^{\theta}(0 + e^{-\theta})$$

$$= 1$$

• $\mathbb{P}(X_1 \leq x)$:si $x < \theta$, $\mathbb{P}(X_1 \leq x) = 0$ car le support de f est $[\theta, +\infty[$

$$\text{si } \theta \leq x: \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{\theta}^x \exp(\theta - t) dt = e^{\theta} \int_{\theta}^x e^{-t} dt = e^{\theta} (-e^{-x} + e^{-\theta})$$

$$= 1 - \exp(\theta - x)$$

$$\text{Donc, } \mathbb{P}(X_1 \leq x) = (1 - \exp(\theta - x)) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x)$$

$$\bullet \text{ } \underline{\mathbb{E}[X_1]}: \int_{\theta}^{+\infty} x e^{(\theta - x)} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} e^{\theta} \left([-x e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} e^{-x} dx \right)$$

$$= e^{\theta} \left(0 + \theta e^{-\theta} + [-e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} \right)$$

$$= e^{\theta} (0 + \theta e^{-\theta} + e^{-\theta}) = \theta + 1$$

• $\text{Var}(X_1)$:* calculons l'espérance de X_1^2

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \exp(\theta - x) dx = e^{\theta} \left([-x^2 e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} + 2 \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-x} dx \right)$$

$$= e^{\theta} (\theta^2 e^{-\theta}) + 2(\theta + 1)$$

$$= \theta^2 + 2\theta + 2$$

$$\text{donc } \text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}^2[X_1] = 1$$

2) Donner l'estimateur des moments de θ ($\hat{\theta}$) + biais + varianceModèle de rédaction:On a vu dans la question précédente que $\mathbb{E}[X_1] = \theta + 1$ La méthode des moments consiste à exprimer le paramètre d'intérêt θ en fonction du moment théorique $\mathbb{E}[X_1]$

$$\theta = \mathbb{E}[X_1] - 1$$

On remplace le moment théorique par son homologue empirique \bar{X}_n pour obtenir l'estimateur des moments $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \bar{X}_n - 1$$

* biés + risque:

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta = \mathbb{E}[\bar{X}_n - 1] - \theta = \theta + 1 - 1 - \theta = 0$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\bar{X}_n - 1) = \text{Var}(\bar{X}_n)$$

$$= \frac{1}{n} \text{Var}(X_1) = 1/n$$

$$\text{donc } \mathcal{R}(\hat{\theta}, \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \mathcal{B}^2(\hat{\theta}, \theta) = 1/n$$

3) a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ($\hat{\theta}_{MV}$)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^n \exp(\theta - x_i) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x_i)$$

↳ si l'un des $x_i \notin [\theta, +\infty[$
le produit = 0, donc il faut que
tous les $x_i \in [\theta, +\infty[$, soit $\min x_i \in [\theta, +\infty[$

$$= \exp\left(n\theta - \sum_{i=1}^n x_i\right) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}\left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i\right)$$

* si $\theta > \min x_i$, $L(\theta) = 0$, sinon > 0

* si $\theta < \min x_i$, $\theta \mapsto L(\theta)$ est strictement croissante

Ainsi, $\min x_i = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta) = \hat{\theta}_{MV}$ (généralement, max si la fonction $L(\theta)$ est décroissante)

b) Fct de répartition de $\hat{\theta}_{MV}$ + densité ($g(z)$)

• Pour $z > \theta$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{\theta}_{MV} \leq z) &= 1 - \mathbb{P}(\hat{\theta}_{MV} > z) \\ &= 1 - \mathbb{P}(x_1 > z, \dots, x_n > z) \quad (x_i \text{ iid}) \\ &= 1 - \mathbb{P}^n(x_1 > z) \\ &= 1 - \exp^n(\theta - z) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z) = 1 - \exp(n(\theta - z)) \end{aligned}$$

• si $z < \theta$, $\mathbb{P}(\hat{\theta}_{MV} \leq z) = 1 - \mathbb{P}(\hat{\theta}_{MV} > z) = 1$

= 0 dans ce cas

$$\text{Donc } F_{\hat{\theta}_{MV}}(z) = \left(1 - \exp(n(\theta - z))\right) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)$$

densité: $f_{\hat{\theta}_{MV}}(z) = \frac{\partial F_{\hat{\theta}_{MV}}(z)}{\partial z} = n \exp(n(\theta - z)) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)$

c) Espérance + risque $\hat{\theta}_{MV}$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = \int_{\mathbb{R}} z n \exp(n(\theta - z)) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z) dz = \int_{\theta}^{+\infty} z n \exp(n(\theta - z)) dz$$

$$= n \exp(n\theta) \int_{\theta}^{+\infty} \exp(-nz) dz$$

$$= n \exp(n\theta) \left(\left[-\frac{z}{n} \exp(-nz) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \exp(-nz) dz \right)$$

$$= n \exp(n\theta) \left(\frac{\theta}{n} \exp(-n\theta) + \frac{1}{n^2} \exp(-n\theta) \right) = \theta + \frac{1}{n}$$

• biais:

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \theta = \frac{1}{n}$$

• risque:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) &= \mathbb{E}[(\hat{\theta}_{MV} - \theta)^2] \\ &= \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] - 2\theta \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] + \theta^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] = n \exp(n\theta) \int_{\theta}^{+\infty} z^2 \exp(-nz) dz = n \exp(n\theta) \left(\frac{\theta^2}{n} \exp(-n\theta) + \frac{2\theta}{n^2} \exp(-n\theta) + \frac{2}{n^3} \exp(-n\theta) \right)$$

$$= \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2}$$

donc $\mathcal{R}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} - 2\theta(\theta + \frac{1}{n}) + \theta^2 = \frac{2}{n^2}$ (tend vers 0 plus rapidement que $1/n$)

↳ variance = $\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} = \mathcal{B}(\hat{\theta}_{MV}, \theta)^2$

d) Proposer un estimateur sans biais pour θ ($\hat{\theta}_{MVC}$)

Puisque $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = \theta + \frac{1}{n}$, on pose $\hat{\theta}_{MVC} = \hat{\theta}_{MV} - \frac{1}{n} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{1}{n}$ (on retire le biais)

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MVC}] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \frac{1}{n} = \theta$$

Donc $\hat{\theta}_{MVC}$ est bien sans biais

De plus, $\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{MVC}) = \operatorname{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \mathcal{R}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \frac{2}{n^2}$ (invariant par translation)

$\hat{\theta}_{MVC}$ est consistant ($\mathcal{R}(\hat{\theta}_{MVC}, \theta) = \frac{1}{n^2}$)

4) Comparer les 3 estimateurs

Pour $n \gg 2$, $R(\hat{\theta}_{MVC}, \theta) < R(\hat{\theta}_{MV}, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n}$$

Exo 2. [pas fait en TD]

X_1, \dots, X_n densité $f(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right)$; $\theta > 0$

1) Calculer $\mathbb{E}[X_i]$ ($\mathbb{E}[X_i^2] = 2\theta^2$)

La densité est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|-x|}{\theta}\right) = f(x)$$

donc X_i suit une loi symétrique autour de 0, donc $\mathbb{E}[X_i] = 0$

2) $\hat{\theta}$ estimateur de type moment

Le moment d'ordre 1 ne permet pas d'estimer θ

θ en fonction des moments théoriques:

$$\theta = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{2}}$$

on remplace les moments théoriques par les moments empiriques:

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}}$$

3) consistance de $\hat{\theta}$

(X_1, \dots, X_n) iid admettant un moment d'ordre 1

donc par LGN:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i^2]$$

La fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$ est continue

donc par le LAC:

$$\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{\frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{2}} = \sqrt{\frac{2\theta^2}{2}} = \theta$$

4) EMV ($\hat{\theta}_{MV}$)

• vraisemblance

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|X_i|}{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{(2\theta)^n} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |X_i|\right) \end{aligned}$$

• log-vraisemblance:

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = -n \ln(2\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

• trouver le max ($\ell'(\theta) = 0$)

$$\ell(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |X_i| = 0$$

$$\Leftrightarrow -n\theta + \sum_{i=1}^n |X_i| = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n}$$

• vérification que c'est un max global

$$\ell''(\theta) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

pour $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| = \hat{\theta}_{MV}$

$$\ell''(\theta) = \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}^2} - \frac{2n}{\hat{\theta}_{MV}^3} = \frac{-n}{\hat{\theta}_{MV}^3} < 0 \quad \text{donc } \ell(\theta) \text{ est concave}$$

donc c'est bien un maximum global

EMV: $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$

5) biais et risque de $\hat{\theta}_{MV}$

• biais: $B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \theta$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right] - \theta$$

$$= \mathbb{E}[|X_1|] - \theta$$

↳ calcul de $\mathbb{E}[|X_1|]$

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} x e^{-x/\theta} = \frac{1}{\theta} \left(\left[-\theta x e^{-x/\theta} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \theta e^{-x/\theta} \right)$$

$$= \left[-\theta e^{-x/\theta} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \theta$$

donc $B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = 0$

• risque

$$R(\hat{\theta}_{MV}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) + B^2(\hat{\theta}_{MV}, \theta)$$

$$= \text{Var}(\hat{\theta}_{MV})$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n |X_i|\right) = \frac{1}{n} \text{Var}(|X_1|) \stackrel{X_i \text{ iid}}{=} \frac{\theta^2}{n}$$

↳ calcul de $\text{Var}(X_1)$

$$\text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2$$

$$= 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

↳ admis dans l'énoncé

6) consistance de $\hat{\theta}_{MV}$

Le risque $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $\hat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} \theta$

Exo1:

 $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \theta); \theta > 0$ $\mathbb{E}[X_i^2] = \theta, \mathbb{E}[X_i^4] = 3\theta^2$ 1) log vraisemblance + EMV = $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

$$f_{\theta}(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-x^2/2\theta^2}$$

$$\text{VS: } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = (2\pi\theta)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

$$\text{log-Vs: } \ell(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\text{dérivée } \ell'(\theta): \frac{-n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{n}{2\theta^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \theta) \right)$$

on résoud (par rapport à θ)

$$\ell'(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\text{On pose } T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Vérification qu'il s'agit d'un max global:

$$\ell''(\theta) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\ell''(T) = \frac{n}{2T^2} - \frac{1}{T^3} n \cdot T = \frac{n}{2T^2} - \frac{n}{T^2} = \frac{-n}{2T^2} < 0$$

donc c'est bien l'EMV de θ .2) Mq T est un estimateur consistant de θ + biais(note: $\mathbb{E}[X_i^2] = \theta$ (admis), donc par MM, $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est un estimateur consistant par construction)

$$\text{LGN: } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i^2] = \theta$$

Donc θ est consistant

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] = \theta$$

Donc θ est sans biais.3) Information de Fisher + T estimateur efficace de θ

$$1 - \text{Var}(T) \xrightarrow{\ell'(\theta)} \text{Var}(S(\theta)) \rightarrow I_n(\theta) \rightarrow \text{BCR}(\theta)$$

$$[\text{Rappels de cours: } \frac{\partial}{\partial \theta} \log L_n(\theta) = S_n(\theta)]$$

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_{\theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log L_n(\theta) \right)^2 \right] = \text{Var}_{\theta} \left[\frac{\partial \log L_n(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

$$I_n(\theta) = n I(\theta)]$$

$$\begin{aligned}
I_n(\theta) &= \text{Var}(S(\theta)) = \text{Var}(\ell'(\theta)) \\
&= \text{Var}\left(\frac{n}{2\theta^2} (T - \theta)\right) \\
&= \left(\frac{n}{2\theta^2}\right)^2 \text{Var}(T) \\
&= \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i^2)\right) \\
&= \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[X_i^4] - \mathbb{E}[X_i^2]^2)\right) \\
&= \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (3\theta^2 - \theta^2)\right) = \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \frac{2\theta^2}{n} = \frac{n}{2\theta^2}
\end{aligned}$$

Cours:
Soit $g(\theta)$ le paramètre d'intérêt où $g: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$

PROP: Sous les hypothèses d'un modèle régulier, si pour tout θ , $I(\theta) > 0$
alors pour tout estimateur $T = T(X_1, \dots, X_n)$ sans biais, $\mathbb{E}_\theta T^2 < +\infty$
On a $\forall \theta \in \Theta$, $\text{Var}_\theta(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$

DEF: si T réalise l'égalité, alors T est dit efficace

La borne de Cramer-Rao pour tout estimateur sans biais de θ est:

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{2\theta^2}{n}$$

or $\text{Test sans biais et } \text{Var}(T) = \text{BCR}(\theta)$

Donc T est un estimateur efficace de θ

Exo 2:

$\theta > 0$ (X_1, \dots, X_n) échantillon de densité $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{si } \theta < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) EMV $\hat{\theta}$ de θ

Supposons $\forall i, X_i \in]0, 1[$

$$\begin{aligned}
\text{VS: } L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} X_i^{\frac{1}{\theta}-1} \\
&= \theta^{-n} \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{\theta}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{log-VS: } \ell(\theta) &= -n \ln(\theta) + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \\
&= -n \ln(\theta) + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \sum_{i=1}^n \ln(X_i)
\end{aligned}$$

$$\ell'(\theta) = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = -\frac{1}{\theta^2} \left(n\theta + \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right)$$

Point critique: on résoud $\ell'(\theta) = 0$

$$n\theta + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \geq 0$$

$$\text{On pose } \hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \geq 0$$

$X_i \in]0, 1[\Rightarrow \ln(X_i) < 0$

Vérification max global:

$$\begin{aligned}
\ell''(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) \\
&= \frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \\
&= \frac{1}{\theta^3} \left(n\theta + 2 \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) \\
\ell''(\hat{\theta}) &= \frac{1}{\hat{\theta}^3} \left(n\hat{\theta}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) = \frac{1}{\hat{\theta}^3} \underbrace{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}_{\leq 0} < 0
\end{aligned}$$

Donc $\hat{\theta}$ est bien l'EMV de θ

2) estimateur biaisé ?

$$(ind. loi de $Y_i = -\frac{1}{\theta} \log(X_i)$, $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$)$$

Loi des Y_i :

fonction de répartition des Y_i :

$$F_{Y_i}(x) = \mathbb{P}(Y_i \leq x) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\theta} \ln(X_i) \leq y\right) = \mathbb{P}(\ln(X_i) \geq -\theta y) \\ = \mathbb{P}(X_i \geq e^{-\theta y}) \\ = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq e^{-\theta y})$$

or, pour $x \in]0, 1[$,

$$F_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} t^{-1/\theta-1} dt = \frac{1}{\theta} \left[\frac{t^{1/\theta}}{1/\theta} \right]_0^x = x^{1/\theta}$$

Ainsi, puisque $e^{-\theta y} \in]0, 1[$,

$$F_{Y_i}(x) = 1 - e^{-y}$$

ce qui donne $f_{Y_i}(y) = F'_{Y_i}(y) = e^{-y}$. Donc $Y_i \sim \mathcal{E}(1)$.

Loi de Z :

Les X_i sont indépendants donc les Y_i le sont aussi

$$\text{Donc } Z = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \Gamma(n, 1)$$

$$\text{De plus } z = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = \frac{n}{\theta} \hat{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\theta}{n} \cdot z$$

$$\text{Biais: } \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{\theta}{n} \mathbb{E}[z] = \theta$$

Donc $\hat{\theta}$ est sans biais

3) Variance de $\hat{\theta}$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \text{Var}(Z) = \frac{\theta^2}{n}$$

$$4) \text{Mq } \ell'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} (\hat{\theta} - \theta)$$

$$\ell'(\theta) = \frac{-n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$$

$$= \frac{n}{\theta^2} \left(-\theta - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) = \frac{n}{\theta^2} (\hat{\theta} - \theta)$$

5) En déduire que l'estimateur atteint la borne de Cramer-Rao

$$I_n(\theta) = \text{Var}(\mathcal{L}(\theta)) = \left(\frac{n}{\theta^2}\right)^2 \cdot \text{Var}(\theta)$$

$$= \frac{n^2}{\theta^4} \cdot \frac{\theta^2}{n} = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = \text{Var}(\hat{\theta})$$

$\hat{\theta}$ est donc efficace.

Exo 3:

$$f_{\theta}(x) = \theta^2 x e^{-x/\theta} \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ sinon } \theta > 0$$

1) Maq $\mathbb{E}[X_1] = 2\theta$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 6\theta^2$ (fonction génératrice des moments: $\Psi(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{1}{(1-\theta t)^2}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{tX_1}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{\theta}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tx} \theta^2 x e^{-x/\theta} dx \\ &= \theta^2 \int_0^{+\infty} x \exp(-x(\frac{1}{\theta} - t)) dx\end{aligned}$$

On suppose $t < 1/\theta$ sinon ça diverge

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \theta^{-2} \left[\frac{1}{\theta^{-1}-t} x \exp(-x(\theta^{-1}-t)) \right]_0^{+\infty} + \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1}-t} \int_0^{+\infty} \exp(-x(\theta^{-1}-t)) dx \\ &= \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1}-t} \int_0^{+\infty} \exp(-x(\theta^{-1}-t)) dx \\ &= \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1}-t} \left[\frac{-1}{\theta^{-1}-t} \exp(-x(\theta^{-1}-t)) \right]_0^{+\infty} \\ &= \end{aligned}$$

Exo 1:

Echantillon de loi de Laplace, $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\mathbb{E}[|X_i|] = \theta$, $\mathbb{E}[X_i^2] = 2\theta^2$

1) Mq $\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$ est asymptotiquement normal

DEF: $(\hat{\theta}_n)$ est un estimateur asymptotiquement normal ssi
 vitesse de convergence en \sqrt{n}
 convergence en loi
 la limite est la loi normale
 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$

Posons $Y_i = |X_i|$. Les Y_i sont iid

Calcul des moments de Y_i :

$\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[|X_i|] = \theta$

$\text{Var}(Y_i) = \mathbb{E}[Y_i^2] - (\mathbb{E}[Y_i])^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \theta^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$

On a $\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ qui est la moyenne empirique des Y_i , d'espérance θ et variance $\theta^2 < +\infty$

Par le TCL appliqué à la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$, on a $\sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$

2) a) $\hat{\Theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$

On admet: $\mathbb{E}[X_i^4] = 4! \theta^4 = 24\theta^4$

Mq $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ as. normal.

On pose $Z_i = X_i^2$. Les Z_i sont iid

$\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}[X_i^2] = 2\theta^2$

$\text{V}(Z_i) = \mathbb{E}[X_i^4] - (\mathbb{E}[X_i^2])^2 = 24\theta^4 - 4\theta^4 = 20\theta^4$

\hat{m}_2 est la moyenne empirique des Z_i d'espérance $2\theta^2$ et de variance $20\theta^4 < +\infty$

TCL: $\sqrt{n}(\hat{m}_2 - 2\theta^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W \sim \mathcal{N}(0, 20\theta^4)$

$\Rightarrow \hat{m}_2$ est asymptotiquement normal

b) Application de la δ -méthode: déduire que $\sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{5}{4}\theta^2)$

On cherche ψ tq $\psi(\hat{m}_2) = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}$

On doit vérifier:

- ψ est définie et dérivable
- $\psi'(\mathbb{E}[\hat{m}_2]) \neq 0$
- $\psi'(2\theta^2) = \frac{1}{2\sqrt{4\theta^2}} = \frac{1}{4|\theta|} = \frac{1}{4\theta} > 0$

LEMME: [méthode δ].
 Soit Z_n une suite de v.a. réelles tq $\sqrt{n}(Z_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
 Soit g une fonction dérivable en μ $g'(\mu) \neq 0$
 Sous ces hypothèses, on a $\sqrt{n}(g(Z_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2 \sigma^2)$
 $g(x) = g(\mu) + g'(\mu)(x - \mu) + (x - \mu)R(x - \mu)$ où $R(y) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0$

On peut appliquer la méthode δ de ce:

$\sqrt{n}(\psi(\hat{m}_2) - \psi(2\theta^2)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \psi'(2\theta^2)^2 \times 20\theta^4)$

$\sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{5\theta^2}{4})$

$\hat{\Theta}_n$ est asymptotiquement normal.

Exo 2:

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon $\sim \mathcal{G}(q)$ sur \mathbb{N} , $q \in]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_q(X=k) = (1-q)q^k$$

$$\text{On admet que } \mathbb{E}[X] = \frac{q}{1-q} \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{q}{(1-q)^2}$$

(fonction génératrice des moments: $G(t) = \frac{1-q}{1-qt}$)

1) estimateur des moments \hat{q} de q

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{q}{1-q}$$

$$\Rightarrow \mu(1-q) = q \Leftrightarrow \mu = q(1+\mu) \Leftrightarrow q = h(\mu), \quad h: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{1+x}$$

$$\text{Ainsi, } \hat{q}_n = h(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X}_n}{1 + \bar{X}_n}$$

2) consistance ?

Les variables X_i sont i.i.d. intégrables ($\mathbb{E}[X_i] = \mu < +\infty$)

$$\text{LGN} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

La fonction h est continue sur \mathbb{R}^+

$$\text{LAC: } h(\bar{X}_n) = \hat{q}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} h(\mu) = q$$

Donc \hat{q}_n est consistant.

3) méthode δ , variance de la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{q} - q)$

a) TCL sur \bar{X}_n

$$\text{b) méthode } \delta \text{ avec } h: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{1+x}$$

a) Les variables $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d. d'espérance $\mu = \frac{q}{1-q}$ et de variance $\frac{1}{(1-q)^2} < +\infty$

On applique le TCL :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(1-q)^2}\right)$$

b) Vérifions les hypothèses de la méthode δ pour h :

- h est dérivable sur \mathbb{R}^+

$$- h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

$$\Rightarrow h'(\mu) \neq 0$$

On peut appliquer la méthode

$$(h(\bar{X}_n) - h(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, (h'(\mu))^2 \frac{1}{(1-\mu)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}(\hat{q}_n - q) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, q(1-q)^2\right) \quad \left((h'(\mu))^2 \frac{1}{(1-\mu)^2} = (1-q)^4 \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = q(1-q)^2 \right)$$

La variance de la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{q}_n - q)$ est $q(1-q)^2$

4) Information de Fisher du modèle + comparer les résultats

Soit $L(q)$ la vraisemblance de X_i .

$$L(q) = (1-q)q^{X_i}$$

$$\ell_i(q) = \ln(1-q) + X_i \ln(q)$$

$$\ell'_i(q) = \frac{-1}{1-q} + \frac{X_i}{q} = \frac{X_i}{q} - \frac{1}{1-q}$$

Soit $I_i(q)$ l'information de Fisher d'une seule des (X_i) .

$$I_i(q) = \mathbb{V}(\ell'_i(q)) = \mathbb{V}\left(\frac{X_i}{q} - \frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{q^2} \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{q(1-q)^2}$$

$$I_n(q) = \sum_{i=1}^n I_i(q) = nI_i(q) = \frac{n}{q(1-q)^2}$$

• La borne de Cramer-Rao est de $BCR = \frac{1}{I_n(q)} = \frac{q(1-q)^2}{n}$

Or, d'après la question précédente, la loi asymptotique de \hat{q}_n est $\mathcal{N}\left(q, \frac{q(1-q)^2}{n}\right)$.

La variance de cette loi atteint la borne de Cramer-Rao ; \hat{q}_n est asymptotiquement efficace

Exo 1:

Rappel: l'inverse généralisée

$$\forall \mu \in [0, 1], F^{-1}(\mu) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq \mu\}$$

conventions: $\inf \mathbb{R} = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

1) Mq $\forall \mu \in [0, 1], F(x) \geq \mu \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(\mu)$

$$\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq \mu\} = A(\mu)$$

(\Rightarrow) On suppose que $F(x) \geq \mu$

alors $x \in A(\mu)$

$$\text{et } \inf A(\mu) \leq x$$

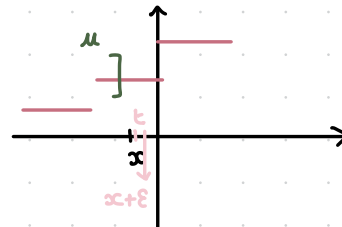
$$= F^{-1}(\mu)$$

(\Leftarrow) On suppose que $F^{-1}(\mu) \leq x$

On prend $\varepsilon > 0$ tq $F^{-1}(\mu) < x + \varepsilon$

$\exists t$ tq $F^{-1}(\mu) \leq t < x + \varepsilon$

En particulier, on a que $\mu \leq F(t)$ ($t \in A(\mu)$)



Comme F est croissante (car c'est une f.d.R), $F(t) \leq F(x + \varepsilon)$

$$\text{et } \mu \leq F(t) \leq F(x + \varepsilon)$$

$$\text{et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) = F(x) \geq \mu$$

2) $U \sim \text{Unif}([0, 1])$, mq $X = F^{-1}(U)$ a pour f.r.f

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \quad \downarrow \text{par q.1}$$

$$= F(x) \text{ car } U \sim \text{Unif}([0, 1])$$

3) Comment générer une réalisation d'une variable X selon $\mathcal{E}(\lambda)$ à partir d'une réalisation de U

$$\text{Si } X \sim \mathcal{E}(\lambda), F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu = F(x) \text{ pour } \mu \neq 1$$

$$\Rightarrow \mu = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - \mu$$

$$\Rightarrow -\lambda x = \ln(1 - \mu)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - \mu)$$

$$\text{mais } \mathbb{P}(\mu = 1) = 0$$

$$\text{On a trouvé } F^{-1}(\mu) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - \mu) \text{ pour } \mu \neq 1$$

En appliquant Q2, on a que $F^{-1}(U) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et on peut générer une observation d'une variable aléatoire exponentielle.

Exo 2:

$X_1, \dots, X_n \sim U[0, \theta]; \theta > 0$ f.f.r.

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i, \hat{\theta}_3 = 2\hat{m} \text{ où } \hat{m} = \hat{F}_n^{-1}(1/2) \text{ médiane empirique}$$

F_n^{-1} : inverse généralisée de la f.r. empirique des X_i .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

1) Mq $\theta = 2F^{-1}(1/2)$ et donc que $\hat{\theta}_3$ estimateur empirique de θ

On sait que $F(m) = 1/2$ et $F(m) = \frac{m}{\theta}$ pour $m \in [0, \theta]$

$$\text{donc } \frac{m}{\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \theta = 2m$$

donc $\theta = 2F^{-1}(1/2)$ et $\hat{\theta}_3$ est un estimateur empirique de θ

2) Déterminer les lois limites de chaque estimateur

(pour $\hat{\theta}_3$, on admet que $\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)^2}\right)$)

$\hat{\theta}_1$: les X_1, \dots, X_n i.i.d. de moyenne fini et de variance fini donc on peut appliquer le TCL:

$$\sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right) \quad \begin{matrix} \text{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12} \\ \mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{2} \end{matrix}$$

$$\text{et } \sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$$

il faut utiliser la bonne normalisation

(TCL concerne les moyennes)

$\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$: \rightarrow on ne peut pas appliquer le TCL

On rappelle que $P(\hat{\theta}_2 \leq t) = P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq t) = F(t)^n$

$$\begin{aligned} P(\sqrt{n}(\theta - \hat{\theta}_2) > t) &= P\left(\hat{\theta}_2 > \theta - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - F\left(\theta - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}\theta}\right)^n \end{aligned}$$

pas de convergence avec \sqrt{n} , mais en remplaçant $\sqrt{n}\theta$ par n on a:

$$\begin{aligned} P(n(\theta - \hat{\theta}_2) > t) &= 1 - \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - e^{-t/\theta} \end{aligned}$$

et donc asymptotiquement $\hat{\theta}_2$ suit une loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$\hat{\theta}_3 = 2\hat{m}$

On admet que pour un quantile empirique α , on a

$$\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)^2}\right)$$

On a que $f(q_\alpha) = \frac{1}{\theta}$ (car loi uniforme donc sa densité vaut $\frac{1}{\theta}$ si $q_\alpha \in [0, \theta]$)

$$\text{donc } \sqrt{n}\left(\hat{m} - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\theta^2\right)$$

$$\text{et } \sqrt{n}(2\hat{m} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right)$$

3) Comparer la performance asymptotique des 3 estimateurs

$\hat{\theta}_2$ a la meilleure convergence ($\frac{1}{n}$), donc on le préfère aux autres

et $\hat{\theta}_1$ a une variance asymptotique plus faible que $\hat{\theta}_2$, donc on le préfère

Exo 3:

$$x \neq y, \text{ mq } \text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n}(F(\min(x, y)) - F(x)F(y))$$

$$\text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = -\mathbb{E}[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] + \mathbb{E}[\hat{F}_n(x)] \mathbb{E}[\hat{F}_n(y)]$$

$$\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_1 \leq x}] \text{ car i.i.d.}$$

$$= F(x)$$

$$\mathbb{E}[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x; X_j \leq y\}}]$$

On regarde $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x; X_j \leq y\}}]$

→ si $i=j$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \min(x,y)\}}] = F(\min(x,y))$

→ si $i \neq j$ on a par indépendance

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x; X_j \leq y\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}] \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_j \leq y\}}]$$

$$= F(x) F(y)$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] = \frac{1}{n^2} (n F(\min(x,y)) + n(n-1) F(x) F(y))$$

$$= \frac{1}{n} F(\min(x,y)) + \frac{n-1}{n} F(x) F(y)$$

$$\text{et } \text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n} F(\min(x,y)) + \frac{n-1}{n} F(x) F(y) - F(x) F(y)$$

$$= \frac{1}{n} F(\min(x,y)) - \frac{1}{n} F(x) F(y)$$

Exo 2:

$$(X_1, \dots, X_n), f_{\theta}(x) = \frac{3}{\theta} x^2 \exp\left(-\frac{x^3}{\theta}\right) \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

1) Loi de $Y = X^3$

Soit $Y = X^3$. Pour $y > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^3 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y^{1/3}) \\ &= \int_0^{y^{1/3}} f_{\theta}(x) dx = \int_0^{y^{1/3}} \frac{3}{\theta} x^2 \exp\left(-\frac{x^3}{\theta}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{u = x^3 \\ du = 3x^2 dx}}{=} \int_0^y \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{u}{\theta}\right) du = \left[-\exp\left(-\frac{u}{\theta}\right)\right]_0^y = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) \end{aligned}$$

donc $Y = X^3$ suit la loi exponentielle de paramètre $(1/\theta)$, d'espérance θ et de variance θ^2 .

2) EMV + consistance

vraisemblance:
$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{3}{\theta} X_i^2 \exp\left(-\frac{X_i^3}{\theta}\right)$$

$$= \frac{3^n}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^n X_i^2 \right) \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i^3\right)$$

log-vraisemblance:
$$\ell_n(\theta) = n \ln 3 - n \ln \theta + 2 \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i^3$$

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \theta}(\theta) = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i^3$$

\hookrightarrow s'annule en $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3$.

max global:
$$\frac{\partial^2 \ell_n}{\partial \theta^2}(\theta) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n X_i^3 < 0$$
 en ce point, donc c'est bien un maximum.

EMV:
$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{où } Y_i = X_i^3 \sim \mathcal{E}(\theta)$$

consistance:

Les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d. d'espérance $\mathbb{E}[Y_i] = \theta < \infty$.

D'après la loi des grands nombres,

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \theta \quad \text{donc } \hat{\theta}_n \text{ est consistant.}$$

3) Mq $\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2/n}}$ a pour loi asymptotique $\mathcal{N}(0,1)$. En déduire un I.C. niveau $1-\alpha$.

Les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d. d'espérance $\mathbb{E}[Y_i] = \theta$ et $\text{Var}(Y_i) = \theta^2 < \infty$

TCL:
$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

soit:
$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Slutskey: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \theta > 0$ (Q2)

LAC: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$
on a $\frac{1}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{\theta}$

On peut alors écrire:

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n} = \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{\hat{\theta}_n} = \left[\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta} \right] \times \left[\frac{\theta}{\hat{\theta}_n} \right]$$

D'après le lemme de Slutsky: $\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{N}(0,1) \times 1 = \mathcal{N}(0,1)$
i.e. $\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2/n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{N}(0,1)$

Intervalle de confiance:

Soient $q_{\frac{\alpha}{2}}$ et $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ les quantiles d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On a:

$$\mathbb{P}\left(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2/n}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1-\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{or } q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2/n}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}} \leq \hat{\theta}_n - \theta \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \hat{\theta}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n - q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Un IC de niveau $1-\alpha$:

$$IC_1 = \left[\hat{\theta}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n - q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

4) IC_2 à partir de $\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta^2/n}}$. Lequel est le plus court?

$$\text{Q3: } \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{Soit } \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta^2/n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{On a: } \mathbb{P}\left(q_2 \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta^2/n}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1-\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{or } q_2 \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta^2/n}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \hat{\theta}_n - \theta \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \hat{\theta}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n - q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_n \leq \theta \left(1 - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } \theta \left(1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \leq \hat{\theta}_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}}$$

$$IC_2 = \left[\frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}}, \frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}} \right]$$

Comparaison de longueurs,

$$IC_1: L_1 = (q_{1-\frac{\alpha}{2}} - q_{\frac{\alpha}{2}}) \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}}$$

$$IC_2: L_2 = \hat{\theta}_n \left(\frac{1}{1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{1 - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}} \right) = \hat{\theta}_n \frac{(q_{\frac{\alpha}{2}} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}) / \sqrt{n}}{\left(1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \left(1 - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{(q_{1-\frac{\alpha}{2}} - q_{\frac{\alpha}{2}}) \hat{\theta}_n / \sqrt{n}}{\underbrace{\left(1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \left(1 - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)}_{\approx 1 \text{ pour } n \text{ grand}}}$$

Donc $L_2 \approx L_1$

$L_2 > L_1$ (denom < 1)

donc IC_1 est plus court de IC_2 (à niveau égal)

5) Mg $\frac{2X^3}{\theta} \sim \chi^2(2)$ et

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{k/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$$

En déduire IC de niveau exact $1-\alpha$

Montrons que $\frac{2X^3}{\theta} \sim \chi^2(2)$:

$Y = X^3 \sim \mathcal{E}(\theta)$, donc $\frac{Y}{\theta} \sim \mathcal{E}(1)$

si $Z \sim \mathcal{E}(1)$, alors $\frac{2Z}{\theta} \sim \chi^2(2)$

$$\text{car } f_{2Z}(x) = \frac{1}{2} f_Z\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \mathbb{1}_{x>0} = \frac{1}{2^{2/2} \Gamma(1)} x^{2/2-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{x>0}$$

$$\text{Donc } \frac{2X^3}{\theta} = \frac{2Y}{\theta} \sim \chi^2(2)$$

densité de $\chi^2(2)$

$$\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^3}{\theta} \sim \chi^2(2n)$$

De plus, les $\left(\frac{2X_i^3}{\theta}\right)_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d. $\chi^2(2)$.

La somme de n variables i.i.d. suit une loi $\chi^2(2n)$.

$$\text{Donc } \frac{2\sum_{i=1}^n X_i^3}{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{2X_i^3}{\theta} \sim \chi^2(2n)$$

IC de niveau exact $1-\alpha$:

Soient c_1, c_2 les quantiles d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\chi^2(2n)$.

On a:

$$P\left(c_1 \leq \frac{2\sum_{i=1}^n X_i^3}{\theta} \leq c_2\right) = 1-\alpha$$

$$\text{Or } c_1 \leq \frac{2\sum_{i=1}^n X_i^3}{\theta} \leq c_2 \Leftrightarrow c_1 \leq \frac{2n\hat{\theta}_n}{\theta} \leq c_2 \Leftrightarrow \frac{2n\hat{\theta}_n}{c_2} \leq \theta \leq \frac{2n\hat{\theta}_n}{c_1}$$

$$IC_{\text{exact}} = \left[\frac{2n\hat{\theta}_n}{c_2}, \frac{2n\hat{\theta}_n}{c_1} \right]$$

Rappels: Soient $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

THM: Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- \bar{X} et $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ sont des variables indépendantes
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{n\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ← si on veut estimer σ^2
- $\frac{\bar{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim \text{Student}(n-1)$
 ↑ contient μ
 (si on veut estimer la moyenne)

Exo1:

piles: durée de vie: 170h

100 piles, durée de 158 h moyenne

écart type 30h

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1) Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0.99

Soit n le nombre de piles et X_i la durée de vie en heures de la pile.

Les X_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

↳ statistique pivotale

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_n} \sim \text{Student}(n-1)$$

Notons $t_\alpha(n-1)$ le quantile d'ordre α de la loi Student $(n-1)$

Par définition des quantiles, $\mathbb{P}(t_{\alpha/2}(n-1) \leq T \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$

On a les équivalences suivantes:

(on cherche un intervalle où μ apparaît avec proba grande)

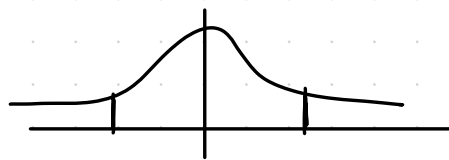
$$t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_n} \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Notons } I_\alpha = \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$$

On a obtenu $\mathbb{P}(\mu \in I_\alpha) = 1-\alpha$

↳ on obtient des intervalles qu'on connaît calculer (loi normale / du Chi-deux...)



($t_{\alpha/2}(n-1) = -t_{1-\alpha/2}(n-1)$)
(car Student symétrique)

(on aurait aussi pu prendre $\alpha/3$ par ex et $\frac{2\alpha}{3}$ cette réponse n'est pas unique)

Application numérique: $n=100, \bar{X}=158, S_n=30$

Soit $\alpha=0.01$ (voir annexe)

On relève $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 2,62$ $I_{0,01} \approx [150,1 ; 165,9]$

Exo2:

X_1, \dots, X_{15} 15 mesures de la température. X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Construire un intervalle de confiance pour σ^2 de niveau de confiance 0.95 dans ces deux cas:

1) θ constante = 20°C ($\mu=20$) $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 270$

2) $\bar{x}=20, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 270$

cas 1:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \right]$$

$$\text{Posons } Z_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

Soit $q_\alpha(n)$ le quantile d'ordre α de $\chi^2(n)$

$$P(q_{\alpha/2}(n) \leq Z_1 \leq q_{1-\alpha/2}(n)) = 1-\alpha$$

$$\cdot q_{\alpha/2}(n) \leq \frac{\sum (X_i - m)^2}{\sigma^2} \leq q_{1-\alpha/2}(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum (X_i - m)^2}{q_{1-\alpha/2}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}{q_{\alpha/2}(n)}$$

$$\text{Posons } I = \left[\frac{\sum (X_i - m)^2}{q_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}{q_{\alpha/2}(n)} \right]$$

A.n: $n = 15, m = 20$

$$q_{\frac{\alpha}{2}}(n) = q_{0.025}(15) \approx 6.26$$

$$q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) = q_{0.975}(15) \approx 27.48$$

$$\text{Donc } I = [9, 82; 43, 13]$$

$$\text{cas 2: } Z_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$I_2 = \left[\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \right]$$

$$I_2 \approx [10, 34; 47, 96]$$

← élargi l'intervalle
le modèle prend en compte
que c'est un estimateur

Exo 3:

c.a. = 2000 €

$s_{30} = 300$ € écart-typé

$X_i \sim \mathcal{N}(n, \theta^2)$, X_i c'est le c.a. du jour i .

1) $\sigma^2 = 300^2$. I. c. pour μ de niveau 0.95

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\theta^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\Rightarrow P(-\mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq \mu_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \text{ où } \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ quantile d'ordre } 1-\frac{\alpha}{2} \text{ de } \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - \frac{\mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\theta^2}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\theta^2}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

App numérique: $n = 30, \bar{X} = 2000, \sqrt{\theta^2} = \theta = 300, \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 1,959$

$$I_{0,05} \approx [1893, 2107]$$

$$(\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum X_i \text{ où } X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \theta^2) \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\theta^2}{n}))$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\theta^2}{n})$$

$$\rightarrow (\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{n})$$

$$\rightarrow \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\theta^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

2) σ^2 inconnu

$$\text{On pose } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 300^2$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2}} \sim \text{Student}(n-1)$$

(rappels)

App numérique :

$$\bar{x} = 2000, n = 30, s^2 = 300^2, q_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,04$$

$$I_{0,05} = [1888, 2112]$$

Méthode IC: (pour IC classiques, pas automatique
marche pour ce TD)

Pour moyenne :

$$- T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\theta^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

↳ si θ^2 pas connu :

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2}} \sim \text{Student}(n-1)$$

Pour variance :

$$T = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi(n)$$

Si μ pas connu

$$T = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi(n-1)$$

Exo1:

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; σ^2 connue

1) $n = 100$

a) Construire un test de niveau $\alpha = 0.10$, $H_0: \mu = 0$ contre $H_1: \mu = 1.5$

Rappels de cours:

R une région. Si T (une v.a.) $\in R$, on rejette H_0

$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(T \in R)$ erreur de première espèce.

$\beta = \mathbb{P}_{H_1}(T \notin R)$ erreur de seconde espèce

Puissance de test: $1 - \beta = \mathbb{P}_{H_1}(T \in R)$ (probabilité qu'on se trompe)

On pose $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1.5$ et

$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ (sous H_0 , $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$)

La statistique de test T prend une plus grande valeur sous H_1 que sous H_0

On peut choisir une région de rejet de la forme $R = \{T > c\}$

Déterminer c tq: $\mathbb{P}_{H_0}(T > c) = \alpha = 0.1$

$1 - \mathbb{P}(T \leq c) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(T \leq c) = 1 - \alpha$

Donc $c = \mu_{1-\alpha}$, où μ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$

CCL: On rejette H_0 ssi $T > \mu_{1-\alpha} \approx 1.28$

b) $\bar{x} = 1$. Quelle est la décision du test?

$\bar{x} = 1, T = \frac{1 - 0}{\sqrt{100/25}} = 0.5 \leq \mu_{0.90} \approx 1.28$ On conserve H_0
(1 est plus proche de 1.5 mais on conserve quand-même H_0 . ce qui est logique car la variance est très grande ($n=100$))

c) erreur de seconde espèce?

On cherche $\mathbb{P}_{H_1}(T \leq \mu_{1-\alpha})$ ($H_1 = \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$)

$\Leftrightarrow \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \mu_{1-\alpha}\right)$

on cherche à mettre μ_1 au lieu de μ_0 dans T (on a fait $+\mu_1 - \mu_0$, puis isoler)

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \mu_{1-\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)$

on peut calculer α partir des données. f.r. de la loi normale

A.N: $F\left(1.28 - \frac{1.5 - 0}{\sqrt{100/25}}\right) = F\left(1.28 - \frac{1.5}{2}\right) = F(1.28 - 0.75) = F(0.53) \approx 0.70$

proba d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie

2) $n = 9$

résultat ne dépend pas de n

on garde $R = \{T > 1.28\}$ $F\left(1.28 - \frac{1.5 - 0}{\sqrt{9/25}}\right) = F(-1.22) = 0.11$
 $T = \frac{1 - 0}{\sqrt{9/25}} = 1.67 > 1.28$ donc on rejette H_0

3) Modifier le test si l'alternative devient:

- a) $H_1 = "m = 3"$ on garde le même test
 b) " $m > 0$ " (T prend une valeur plus grande sous H_1 que sous H_0)
 c) " $m = -1.5$ "
 $R = \{T < c\}$ (T prend une valeur plus petite sous H_1 que sous H_0 dans ce cas)
 $P(T \leq c)$
 $\uparrow = -\mu_{1-\alpha}$

Exo2:

$(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{M}([0, \theta])$; $\theta > 0$. $Y := \max(X_1, \dots, X_n)$
 f.r: $F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n & \text{si } y \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } y > \theta \end{cases}$

$H_0 = " \theta = 2 "$, $H_1 = " \theta > 2 "$

i) déterminer c pour que le test soit de niveau α

- statistique de test: Y
- région de rejet: Y prend de + grandes valeurs sous H_1

$$R = \{Y > c\}$$

trouver c: On cherche c tq $P_{H_0}(Y > c) = \alpha$; $0 < \alpha < 1 \Rightarrow c \in [0, \theta]$
 $\Leftrightarrow P_{H_0}(Y \leq c) = 1 - \alpha$

$\leftarrow \begin{cases} c \in [0, \theta] \\ \text{si } c > \theta, \alpha = 0 \\ \text{si } c < 0, \alpha = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - P_{H_0}(Y \leq c)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - F(c)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - \left(\frac{c}{2}\right)^n \leftarrow \text{on est sous } H_0$$

$$\Leftrightarrow c = 2(1 - \alpha)^{1/n}$$

2) $n=5$, $Y=1.98$, $\alpha=0.1$. Décision de test?

A.N. $c = 2\left(\frac{9}{10}\right)^{1/5} \approx 1.96$

$Y = 1.98 > c$ donc on rejette H_0

3) $Y = 1.92$

$Y = 1.92 < c$ donc on accepte H_0

Erreur non calculable: $P_{H_1}(Y \leq c)$ dépend de θ non connu

4) Risque de seconde espèce?

On considère $\theta > 2$ (H_1)

$\beta:]2, +\infty[\rightarrow]0, 1[$

$$\theta \mapsto \beta(\theta) = P_{H_1}(Y \leq c) = F(c)$$

or $c = 2(1 - \alpha)^{1/n}$ et $\alpha \in]0, 1[$. Donc $0 < c < 2 < \theta$

On en conclut

$$\beta(\theta) = F(c) = \left(\frac{c}{\theta}\right)^n$$

Exo1:

$(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Ber}(p)$; $p \in]0, 1[$

$p_0 \in]0, 1[$. $H_0 = "p = p_0"$ contre $H_1: "p > p_0"$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

1) Loi de S_n sous H_0 ? sous H_1 ? + forme de région de rejet

S_n est une somme de v. a. i.i.d $\sim B(p_0)$

$\Rightarrow S_n \sim B(n, p_0)$ sous H_0

// sous $H_1: S_n \sim B(n, p)$; $p > p_0$

région de rejet: L'espérance de X est p , qui \uparrow sous H_1 (par rapport à H_0). On cherche donc un c tq $P(S_n > c) \leq \alpha$
 $\uparrow \Delta!$ loi discrète

2) Trouver c de niveau α

On cherche c tq $P_{H_0}(S_n > c) \leq \alpha$

$\Leftrightarrow P_{H_0}(S_n \leq c) \geq 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow F_{B(n, p_0)}(c) \geq 1 - \alpha$

$F_{\mu}(1 - \alpha) = \alpha$

3) $n = 10$, $p_0 = 0.3$, $\alpha = 0.05$ + niveau réel du test

		n = 10										
k \ p	0.005	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	
0	0.9511	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	
1	0.9989	0.9957	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	
2	1.0000	0.9999	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	
3	1.0000	1.0000	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	
4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	

On cherche le plus grand c tq :

$F_{B(10, 0.3)}(c) \geq 0.95$

$F_{B(10, 0.3)}(5) < 0.95$

(table): $F_{B(10, 0.3)}(5) > 0.95$

Donc $c = 5$

Le vrai niveau du test est $P_{H_0}(S_n > 5) \approx 0.0473 < 0.05$
 $(1 - 0.9527 = 0.0473)$

4) $n = 100$. Refaire le test en utilisant l'approximation Gaussienne

TCL: Sous H_0 :

S_n est une somme de v.a. i.i.d. d'espérance np_0 et de variance $np_0(1-p_0) < +\infty$

On peut appliquer le TCL :

$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np_0, np_0(1-p))$

$\Leftrightarrow \bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{X}_n - p}{(p_0(1-p_0)/n)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

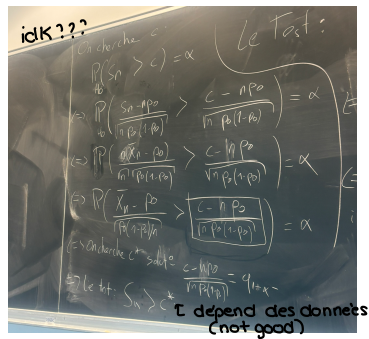
on se ramène à une v. a. centrée réduite

On cherche c tq $\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > c\right) = \alpha$
 (car \bar{X}_n num)
 $>$ sous H_1

$$\Leftrightarrow \mathbb{P} \left(\frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \leq c \right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow c \approx q_{1-\alpha} \quad (\text{celui de } \mathcal{N}(0,1))$$

i.e. on rejette H_0 ssi $\frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > q_{1-\alpha}$
 si $\alpha = 0.05$, $\frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > 1.645$



A.N: $p = 0.3$, $n = 100$

$$\frac{\bar{X}_n - 0.3}{\sqrt{0.3(1-0.3)/100}} > 1.96$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}_n > 0.3753 \quad \Leftrightarrow S_n > 37.53$$

Exo 2:

$(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}(1/\theta); \theta > 0$

1) Proposer un estimateur $\hat{\theta}$ de θ . Mq as normal + approximation asymptotique de sa loi

On prend l'estimateur des moments $\hat{\theta} = \bar{X}_n$

a.s. normal: Les X_i sont i.i.d., $\mathbb{E}[X_i] = \theta$, $\mathbb{V}(X_i) = \theta^2 < +\infty$

TCL: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

2) $H_0 = ' \theta = \theta_0 '$, $H_1 = ' \theta < \theta_0 '$, niveau α

Donner la forme de la région de rejet

Sous H_1 , $\hat{\theta}$ sera en moyenne plus petit que sous H_0

Ainsi, on rejette H_0 quand $\hat{\theta}$ est petit.

On a une région de rejet de la forme $\{ \hat{\theta} < c_\alpha \}$

3) donner T version centrée, réduite basée sur $\hat{\theta}$

justifier que T statistique de test (i.e. T est calculable à partir des données) et sa loi sous H_0 ne dépend pas de θ inconnu + trouver c_α

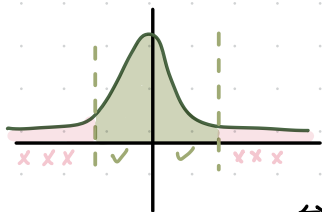
Sous H_0 , $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\theta_0, \frac{\theta_0^2}{n})$ Ne dépend que des données et de θ_0

calcul du seuil:

$\mathbb{P}_{H_0}(T < c) = \alpha$. Asymptotiquement, $c = q_\alpha$

Ainsi, on rejette H_0 ssi $T < q_\alpha \Leftrightarrow \hat{\theta} < \theta_0 + q_\alpha \frac{\theta_0}{\sqrt{n}}$ donc $c_\alpha = \theta_0 + q_\alpha \frac{\theta_0}{\sqrt{n}}$

4) déterminer \mathcal{R} dans le cas où $H_1: ' \theta \neq \theta_0 '$ (test bilatère)



La région de rejet est de la forme:

$$\{ \hat{\theta} < c_1 \} \cup \{ \hat{\theta} > c_2 \}$$

Pour déterminer c_1 et c_2 :

$$\mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta} < c_1 \vee \hat{\theta} > c_2) = \mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta} < c_1) + \mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta} > c_2) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta} < c_1) = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta} > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \downarrow \text{centrer, réduire...}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \theta_0 + q_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad c_2 = \theta_0 + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta_0}{\sqrt{n}}$$

On rejette H_0 ssi $\hat{\theta} < c_1$ ou $\hat{\theta} > c_2 \Leftrightarrow T < q_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $T > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow T < q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $T > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow |T| > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

ex: si $\alpha = 0.05$, $q_{0.975} \approx 1.96$. On rejette H_0 ssi $|T| > 1.96$.

Cours: pour chaque test:

- ① préciser le modèle
- ② donner les hypothèses en fonction des paramètres du modèle
- ③ déterminer la statistique de test et sa loi (ou du moins une approximation) sous H_0
- ④ donner la règle de décision
- ⑤ conclure numériquement et répondre par une phrase à la question posée

Exo 1:

comprimés: poids moyen 500 mg

contrôle: poids moyen d'un échantillon de 20 comprimés

↳ moyenne: 503mg, écart type ~ 10 mg

1) test de niveau α

modèle: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on pose X_i la masse du i -ème comprimé (mg)

On suppose que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $n=20$, $X_n = 503$, $S^2 = 10$

hypothèses: $H_0 = \mu = \mu_0 = 500$ $H_1 = \mu \neq \mu_0$ $R = \{|T| > c\}$ (test bilatère)

Comme la variance est inconnue, on pose $T = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{S^2/n}}$ avec $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2$

Sous H_0 , $T \sim \mathcal{T}(n-1)$

On cherche c tq $\mathbb{P}_{H_0}(|T| > c) = \alpha = \mathbb{P}(T < -c \vee T > c) = \mathbb{P}(T > c) + \mathbb{P}(T < -c)$
 $\stackrel{T \text{ symm}}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(T \leq -c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $= \frac{\alpha}{2}$ $= \frac{\alpha}{2}$

donc $c = q_{1 - \frac{\alpha}{2}} = q_{0.995}(19) = 2,861$ et on rejettera H_0 si $|T| > c$

On calcule $T_{\text{obs}} = \frac{(503 - 500)\sqrt{20}}{10} \approx 1,342 \leq 2,861$: on conserve H_0

2) p-valeur + retrouver la décision

La p-valeur est définie par:

$p\text{-valeur} = \mathbb{P}_{H_0}(|T| > |T_{\text{obs}}|)$
 $= 2 \mathbb{P}_{H_0}(T > |T_{\text{obs}}|)$ (symétrie loi de student)

*Notes:

si p-valeur $< \alpha$, rejet de H_0
 $> \alpha$, on conserve H_0

$$= 2(1 - \mathbb{P}_{H_0}(T \leq |T_{\text{obs}}|))$$

$$= 2(1 - F_{\mathcal{T}(n-1)}(|T_{\text{obs}}|))$$

numériquement, $p_c \approx 0.195 > 0.01$, on conserve H_0

↳ cubien, dans le tableau,
 ligne 19: 1,32, $p=0.9$

Exo 3:

variance: 0.06 mg/L. seuil: 5 mg/L

dosage: 16 prélèvements. moyenne: 4.61 mg/L, écart type: 0.224 mg/L (nouvelle méthode)

1) $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \theta^2)$, $n = 15$

Hypotheses: On suppose le niveau test au moins aussi bon que celui de Briggs

$H_0 = "\theta^2 = \theta_0^2"$, $H_1 = "\theta^2 < \theta_0^2"$ la méthode est mieux

On considère $T = \frac{n-1}{\theta_0^2} s^2$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

On cherche c tq $\mathbb{P}_{H_0}(T < c) = \alpha \Leftrightarrow c = q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)$

Numériquement :

$T_{\text{obs}} = \frac{14 \times 0.224^2}{0.06} \approx 11.71$

$q_{\chi^2(14)}(0.05) \approx 6.5706$

Donc $T_{\text{obs}} > c$; on conserve H_0 .

2) La p -valeur est:

$p_c = \mathbb{P}_{H_0}(T \leq T_{\text{obs}})$

$= F_{\chi^2(n-1)}(T_{\text{obs}})$

$p_c \approx F_{\chi^2(14)}(11.71) \approx 0.37 > 0.05$

Donc on conserve aussi H_0 au seuil 5%.