COURS:

Équation différentielle : Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ intervalle

(1) $y' = f(t,y)$

Résoudre (1) sur $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, c'est trouver tous les couples (J,y) constitué d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 tels que :

i) $\forall t \in J, y(t) \in \mathcal{U}$

ii) $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$

DEF: (1) est une équation linéaire lorsque $x \longmapsto f(t,x)$ est affine $(f(t,x) = a(t)x + b(t))$

en général, $I = \mathbb{R}$ (ou $I \subset \mathbb{R}$), $U = \mathbb{R}$

Exo 1:

1) Ecrire sous la forme $y' = f(t,y)$

2) $g(x) := f(t,x) - f(t,0)$, résoudre $y' = g(y)$

3) résoudre en utilisant la solution trouvée en 2 comme facteur intégrant

a) $y' + 2y = e^t$

"$y' = -2y + e^t = f(t,y)$"

avec $f : (t,x) \longmapsto e^t - 2x$

$\in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

On cherche (J,y) tq $\forall t \in J$, $y'(t) = \underbrace{e^t - 2y(t)}_{= f(t,y(t)) \in \mathbb{R}}$ (1)

① $g(x) = f(t,x) - f(t,0) = -2x$

$y'(t) = g(y(t)) = -2y(t)$ (2)

On dit que (2) est l'équation homogène associée à (1)

② On veut résoudre (2) $y' = -2y$

L'ensemble des solutions maximales de cette équation est $S_H = \{t \longmapsto Ce^{-2t} ; c \in \mathbb{R}\}$

③ Utiliser l'information sur S_H pour résoudre (1)

Soit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1

Soit $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $w(t) = e^{2t} y(t)$

changer de fonction inconnue

On a $w'(t) = e^{2t} y'(t) + 2e^{2t} y(t)$

$= e^{2t}(y'(t) + 2y(t))$

Donc $(\mathbb{R}, y)$ est une solution de (1) ssi $w'(t) = e^{2t} \cdot e^t = e^{3t}$

Or, les solutions de $w'(t) = e^{3t}$ sont les fonctions $w(t) = \int_0^t e^{3s} ds + c$; $c \in \mathbb{R}$ quelconque

$$= \left[\frac{e^{3s}}{3}\right]_0^t = \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} + c, \ c \in \mathbb{R}$$

D'où $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $w(t) = \frac{e^{3t}}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Donc $(\mathbb{R}, y)$ est une solution de (1) ssi $y(t) = e^{-2t}\omega(t)$ avec $\omega(t) = \frac{e^{3t}}{3} + c$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \{(\mathbb{R}, t \longmapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}), c \in \mathbb{R}\}}$

Note : $y' = -2y$

$\rightsquigarrow \frac{y'}{y} = -2$

$\rightsquigarrow \ln|y| = -2t + c$

$|y| = \underline{Ke^{-2t}}$

$\rightsquigarrow \omega = e^{2t}y(t)$

b) $y' - 5y = t$

. $f(t, x) = t + 5x$

* $y' - 5y = 0$

$\frac{y'}{y} = 5 \rightsquigarrow \ln|y| = 5t + c \rightsquigarrow |y| = Ke^{5t}$

Soit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1

Soit $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\omega(t) = e^{-5t}y(t)$

On a $\omega'(t) = -5e^{-5t}y(t) + e^{-5t}y'(t)$

$= e^{-5t}\left(y'(t) - 5y(t)\right)$

Donc y est solution de b ssi $y'(t) - 5y(t) = t$

$\Leftrightarrow \omega'(t) = te^{-5t}$

$\Leftrightarrow \omega(t) = \int_0^t se^{-5s}ds + c ; c \in \mathbb{R}$

or $\int_0^t se^{-5s}ds = \left[s\frac{e^{-5s}}{-5}\right]_0^t - \int_0^t 1.\frac{e^{-5s}}{-5}ds$

$= \frac{-te^{-5t}}{5} + \frac{1}{5}\left[\frac{e^{-5s}}{-5}\right]_0^t$

$= \frac{-t}{5}e^{-5t} - \frac{1}{25}(e^{-5t} - 1)$

D'où y est solution de (b) ssi $y(t) = \frac{-t}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25}e^{5t} + Ce^{5t}$

$= C_1e^{5t} - \frac{t}{5} - \frac{1}{25}$ pour un $C_1 \in \mathbb{R}$

[+fin exo 1]

Exo 1.2 :

a) $y' - ty = t^3$

$y' - ty = 0$

$f(t, x) = t^3 - ty$

* $y' - ty = 0$

$\frac{y'}{y} = t$ $\ln|y| = \frac{t^2}{2} + c$

$|y| = K.e^{t^2/2}$

Soit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1

Soit $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\omega(t) = e^{-t^2/2}y(t)$

$\omega'(t) = -te^{-t^2/2}y(t) + e^{-t^2/2}y'(t)$

$= e^{-t^2/2}\left(-ty(t) + y'(t)\right)$

Donc y est solution ssi $-ty(t) + y'(t) = t^3$

$\Leftrightarrow \omega'(t) = t^3e^{-t^2/2}$

Ou encore $\omega(t) = \int_0^t s^3e^{-s^2/2}ds + c$

IPP

$= \int_0^t s^2.se^{-s^2/2}ds + c = \left[s^2(-e^{-s^2/2})\right]_0^t - \int_0^t 2s(-e^{-s^2/2})ds + c$

$= -t^2e^{-t^2/2} + 2\left[-e^{-s^2/2}\right]_0^t + c$

$= -t^2e^{-t^2/2} - 2e^{-t^2/2} + 2 + c$

D'où $y(t) = \left(-t^2 e^{-t^2/2} - 2e^{-t^2/2} + 2 + c\right) e^{-t^2/2}$

$= -t^2 - 2 + (2+c)e^{-t^2/2}$

$\boxed{= -t^2 - 2 + C e^{-t^2/2} \quad ; C \in \mathbb{R}}$

2) a) $y' + \frac{1}{t} y = 3\cos(2t)$; $I =]0, +\infty[$ (a)

(a) s'écrit $y' = f(t,y)$ où $f(t,x) \longmapsto 3\cos(2-) - \frac{x}{t}$; $f \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$

$y' + \frac{1}{t} y = 0$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{t}$

$\rightsquigarrow \ln|y| = -\ln|t| + c \rightsquigarrow y = \frac{K}{t}$; $K \in \mathbb{R}$

Soit $y \in C^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\omega(t) = t y(t)$.

On a $\omega'(t) = t y'(t) + y(t)$

$= t y'(t) + \frac{1}{t} y(t)$

Donc y est solution de (a) ssi $\omega'(t) = 3\cos(2t)$

Or $\int_0^t s\cos(2s)\,ds = \left[s \cdot \frac{\sin 2s}{2} \right]_0^t - \int_0^t 1 \cdot \frac{\sin 2s}{2}\,ds$

$= \frac{t \sin 2t}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2s}{2} \right]_0^t = \frac{t\sin 2t}{t} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}$

Donc les solutions de (a) sont les $y : t \longmapsto \frac{C}{t} + \frac{3t\sin(2t)}{2t} + \frac{1}{4t}\cos(2t) - \frac{1}{4t}$

$\frac{C'}{t} + \frac{3\sin(2t)}{2} + \frac{3\cos(2t)}{4t}$

Exo3.

1) Trouver les sol de l'equa diff sur $]1,+\infty[$

(E) $y' - \frac{2}{1-x^2}y = 1$

On s'intéresse à l'ED : $y' = f(t,y)$ où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t,x) = \frac{2}{1-t^2}x + 1$
qui est bien continue sur $I \times \mathbb{R}$.

Une primitive $t \mapsto \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1-t)}$

- $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$

  $\to a = \frac{1}{(1-t^2)} \times (1-t) \Big|_{t=1} = 1/2$

  $\to b = \frac{1}{1-t^2} \times (1+t) \Big|_{t=-1} = 1/2$

  CCL: $\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$

décomposition en facteurs simples

- Soit $t > 1$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{2}{1-s^2}ds = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1-s}ds + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s}ds$$
$$= [-\ln(1-s)]_{t_0}^{t} + [\ln(1+s)]_{t_0}^{t}$$
$$= \ln(1+t) - \ln(1-t) + c$$
$$= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + c \text{ pour un } c \in \mathbb{R}.$$

[$\to y'(t) = a(t)y + b(t)$

$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$

eq homogène associée : $y(t) = Ce^{A(t)}$

equas complètes : $C(t) = \omega(t) = e^{-A(t)}y(t)$]

$\to$ calculer $\omega'(t)$:

- $\omega'(t) = -A'(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}y'(t)$
  $= e^{-A(t)}(y'(t) - a(t)y(t))$
  $= e^{-At}$ (y est sol de (E) ssi $\omega(t) = e^{-A(t)}$)
- $\omega(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}ds + C ; C \in \mathbb{R}$
  $= \int_{t_0}^{t} \frac{1-s}{s+1}ds + C$

$\int_{t_0}^{t} \frac{1-s}{s+1} = \int_{t_0}^{t} \frac{-1-s+2}{1+s} = \frac{2}{1+s} - 1$

$= 2\ln(1+t) - t + C ; C \in \mathbb{R}$

- $\omega(t) = e^{-A(t)}y(t) \Rightarrow y(t) = \omega(t)e^{-A(t)}$
  $y(t) = \omega(t) \cdot \frac{1+t}{1-t}$

$$\boxed{y(t) = 2\ln(1+t) \times \frac{1+t}{1-t} - t \times \frac{1+t}{1-t} + C \times \frac{1+t}{1-t}}$$

2) étudier l'existance de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

On connait les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$

→ si y est une sol C^1 sur $\mathbb{R}$ de (E), alors la restriction $y|_I$ est aussi solution de (E)

Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $y|_I(t) = 2\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\ln(1+t) + (c-t)\,\frac{1+t}{1-t}$

En particulier, $\lim\limits_{t\to 1^+} y|_I(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} \frac{1}{1-t}(\_\_\_\_\_\_)$

or $\frac{1}{1-t}(\_\_\_\_\_) \sim \frac{1}{1-t}(4\ln(2)+c-1)$

si $4\ln(2)+c-1 \neq 0$, alors $|y|_I(t)| \xrightarrow[t\to 1^+]{} +\infty$

Dans ce cas, $\lim\limits_{t\to 1^+}|y(t)| = \lim\limits_{t\to 1^+}(y|_I(t)) = +\infty$

ce qui est absurde car : $y \in C^0(\mathbb{R})$

Exos :

Mq l'ensemble des solutions de l'équation $tx' - 2x = 0$ $(E)^{(*)}$ sur $\mathbb{R}$
est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dim 2

Ce n'est pas une eq. diff sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle s'écrit $y' = f(t,y)$ avec $f(t,x) = 2x/t$ et cette fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Mais

- si $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifie $ty'(t) - 2y(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Alors $\begin{cases} y_+ = y_{]0,+\infty[} \text{ vérifie } y_+' = \frac{2}{t}y \\ y_- = y_{]-\infty,0[} \text{ vérifie } y_-' = \frac{2}{t}y \end{cases}$

Calcul de $y(t)$

On sait que $y(t) = Ce^{A(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$, et $A(t) = \int_1^t \frac{2}{s}\,ds = 2\ln(t)$

Donc $y_+(t) = C_+ t^2$, $C_+ \in \mathbb{R}$

de même, $y_-(t) = C_- t^2$; $c_- \in \mathbb{R}$

Donc $y|_{\mathbb{R}^*}(t) = C_+ t^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty[} + C_- t^2 \mathbb{1}_{]-\infty,0[}$

→ de plus, y continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en $t=0$

$t=0$: $y(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t)$

→ Finalement, $y(t) = t^2(C_+ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) + C_- \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t))$ avec $C_+, C_- \in \mathbb{R}$

↳ L'ensemble des sols est :

$S = \{t \mapsto t^2(C_+ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) + C_- \mathbb{1}_{]-\infty,0[}) ; C_+, C_- \in \mathbb{R}\}$

* contient la fonction nulle
* est stable par CL

donc S est un sev de $C^1(\mathbb{R})$

Par ailleurs,

$\varphi_+ = t \longmapsto t^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty[}$

$\varphi_- = t \longmapsto t^2 \mathbb{1}_{]-\infty,0[}$ est une famille génératrice de S

- c'est aussi une famille libre:

si $\lambda_+\varphi_+ + \lambda_-\varphi_- = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$

$\lambda_+\varphi_+(t) + \lambda_-\varphi_-(t) = 0$ pour $t=1$, $\lambda_+ = 0$; $t=-1$ $\lambda_- = 0$

$\leadsto$ toute CL linéaire de solution est une solution aussi

Exo 11. *

1) $t_0, a \in \mathbb{R}$ et $\phi, g : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ C^0 ; $g \geq 0$

tq $\forall t \geq t_0$, $\phi(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} g(s)\phi(s)\,ds$

mq $\forall t \geq t_0$, $\phi(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right)$ (on peut considérer $h(t) = a + \int_{t_0}^{t} g(s)\phi(s)\,ds$)

- $a=0$? $\phi(t) \geq 0$ $\forall t \geq t_0$? $\varphi(t) \leq a + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds$

on obtient $h'(t) \leq g(t)h(t)$

Soit $G(t)$ une primitive de g

On a $\left(e^{-G(t)}h(t)\right)' = -g(t)e^{-G(t)}h(t) + e^{-G(t)}h'(t) = e^{-G(t)}\left(h'(t) - g(t)h(t)\right) \leq 0$

CCL: $\forall t \geq 0$ $e^{-G(t)}h(t) \leq e^{-G(0)}h(0)$

donc $h(t) \leq a e^{\int_0^t g(s)ds}$

or $\varphi(t) \leq h(t)$

donc $\varphi(t) \leq a e^{\int_0^t g(s)ds}$

Feuille 1, Exo 1.11 :
(suite)

2) a) $y'' + qy = 0$, $\int_0^t qyy'dx \leqslant K$?

On a : $qyy' = -y''y'$

donc $\int_0^t qyy'dx = -\int_0^t y'y''dx = -\frac{1}{2}[y'^2(x)]_0^t$

$$= \frac{1}{2}(y'(0)^2 - y'(t)^2) \leqslant \frac{1}{2}y'(0)^2$$

Donc pour $K = \frac{1}{2}y'(0)^2$, on a $\int_0^t qyy'dx \leqslant K$

b) Mq y est bornée. $\varphi(t) := q(t)y(t)^2$ + Gronwall

$\longrightarrow \varphi'(t) = q'(t)y^2(t) + 2q(t)y(t)y'(t)$

$\longrightarrow \int_0^t \varphi'(s)ds = \varphi(t) - \varphi(0) \leqslant \int_0^t q'(s)y(s)^2 ds + 2K$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leqslant \varphi(0) + 2K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y^2(s)ds$$

$$\leqslant \varphi(0) + 2K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y^2(s)ds$$

$$\leqslant \underbrace{\varphi(0) + 2K}_{a} + \int_0^t \underbrace{\frac{q'(s)}{q(s)}}_{g(s)} \varphi(s)ds$$

D'après Gronwall, on a

$$\varphi(t) \leqslant a e^{\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}ds} \leqslant a e^{\ln \frac{|q(t)|}{|q(s)|}} \leqslant a \frac{q(t)}{q(0)}$$

Finalement, $q(t)y^2(t) \leqslant a\frac{q(t)}{q(0)} \Rightarrow y^2(t) \leqslant \frac{a}{q(0)}$

Exo 2.1

$I =]0, +\infty[$

$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$

1) Pour quelle valeur de $a > 0$ $y : x \longmapsto ax$ est-elle sol de (1) sur I ? (y_0)

si $y(x) = a(x)$ est solution de (1), alors

$y'(x) = a$ $\frac{y(x)}{x} = a$ $y^2(x) = a^2x^2$

on remplace ds (1) :

$a - a - a^2x^2 = -9x^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ car $a > 0$

donc $y_0 : x \longmapsto 3x$

2) Soit $J \subset I$ un intervalle et $z : J \to \mathbb{R}$ C^1 $\neq 0$ sur J

$\forall x \in J$, $y(x) := y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$

Mq (J, y) sol sur J de l'équation $z'(x) + (6x + \frac{1}{x}) z(x) = 1$

$y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$; $x \in J$

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z(x)^2}$$

or y est solution de (1)

ssi $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2$

→ on remplace :

$$3 + \frac{z'(x)}{z(x)^2} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{z(x)x} - \left(y_0(x)^2 - \frac{2y_0}{z(x)} + \frac{1}{z(x)^2}\right) = -9x^2$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{6x}{z} - \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2}\left(z' + \frac{z}{x} + 6xz - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow z' + \left(\frac{1}{x} + 6x\right)z = 1$$

3) (2) : $z'(x) + \underbrace{(6x + \frac{1}{x})}_{a(x)} z(x) = 1$

Soit $A(x) = -\int^x \left(\frac{1}{t} + 6t\right) dt$

$$= -[\ln(t) + 3t^2]^x$$
$$= -\ln x - 3x^2 + c$$

je choisi $c = 0$

Soit $z \in C^1$ et $\omega(x) = e^{-A(x)} z(x)$

On a $\omega'(x) = -a(x)e^{-A(x)}z(x) + e^{-A(x)}z'(x)$
$$= e^{-A(x)}\left(z'(x) - a(x)z(x)\right)$$

↳ Donc (J, z) est solution de (2) ssi $\omega'(x) = e^{-A(x)}$

$$\Leftrightarrow \omega(x) = \int^x e^{-A(s)} ds$$
$$= \int^x e^{\ln s} e^{3s^2} ds$$
$$= \int^x s e^{3s^2} ds$$
$$= \frac{e^{3x^2}}{6} + c ; c \in \mathbb{R}$$

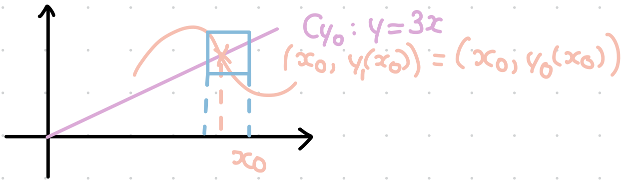
$$\Leftrightarrow z(x) = e^{A(x)}\left(\frac{e^{3x^2}}{6} + c\right)$$
$$= \frac{1}{x} e^{-3x^2}\left(\frac{e^{3x^2}}{6} + C\right) = \frac{1}{6x} + \frac{Ce^{-3x^2}}{x}$$

eq linéaires, les sol maximales sont globales

4) Eq (1)

a) (J_1, y) sol maximale de (1) autre que (I, y_0)

$y(x) \underset{?}{\geq} 3x \ \forall x \in J_1$ ou $y(x) \underset{?}{\leq} 3x \ \forall x \in J_1$



Soit (J_1, y_1) une autre solution de l'équation (1).

Par l'absurde : Supposons qu'il existe $x_0 \in J_1 \subset]0, +\infty[$ tq $y_1(x_0) = y_0(x_0)$

Dans ce cas, y et y_0 sont deux solutions du pb de Cauchy. $\begin{cases} (1) \\ y(x_0) = 3x_0 \end{cases}$

D'après le thm de CL (unicité), cela entraîne que $y_0 = y_1$, ce qui est absurde

↳ ou bien $y_1(x) > 3x \ \forall x \in J_1$

ou bien $y_1(x) < 3x \ \forall x \in J_1$

Suite exo 2.1 :

b) Mq on ne peut pas avoir $y(x) > 3x$ $\forall x \in J$

Pour $x \in]0,+\infty[$

$z(x) = \frac{c}{x} e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}$; $c \in \mathbb{R}$ (Q3)

D'après Q2, (J, y) est solution de (1) ssi (J, z) est solution de (2)
avec pour $x \in J$, $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$

D'après Q3) $J = I =]0,+\infty[$, et pour $x \in I$
$$z(x) = \frac{c}{x} e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}$$

Donc pour $x > 0$, $y(x) = 3x - \frac{1}{\frac{c}{x} e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}}$

$$= 3x - \frac{6x}{6ce^{-3x^2}+1}$$

$$= 3x\left(1 - \frac{2}{6Ce^{-3x^2}+1}\right)$$

On a $e^{-3x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc il existe $x_0 > 0$ tel que $6Ce^{-3x_0^2}+1 > 0$
donc $1 - \frac{2}{6Ce^{-3x_0^2}+1} < 1$

Ainsi, d'après a), pour tout $x > 0$, $y(x) < 3x$

c) En déduire l'ensemble des solutions maximales de (1)

D'après (b), les solutions de (1) sont de la forme (I, y) avec pour $x \in I$,
$y(x) = 3x - \underbrace{\frac{6x}{6Ce^{-3x^2}+1}}_{1/z(x)}$; $c \in \mathbb{R}$
avec $\forall x \in I$, $y(x) < 3x$
$\Leftrightarrow \forall x \in I, z(x) > 0$
Si $c < 0$, $6Ce^{-3x^2}+1 > 0$
$\Rightarrow e^{-3x^2} < \frac{-1}{6C} (>0)$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$ $-3x^2 < \ln\left(\frac{-1}{6C}\right)$
$\Leftrightarrow \forall x \in I$ $x^2 > \frac{-1}{3}\ln\left(\frac{-1}{6C}\right)$

si $\ln\left(\frac{-1}{6C}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{6C} < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{6} > C$

Alors il existe $x_0 > 0$ tel que $x_0^2 > \frac{-1}{3}\ln\left(\frac{-1}{6C}\right)$. Donc $C \geq -1/6$

($c \geq -1/6$
$6Ce^{-3x^2} \geq -e^{-3x^2}$
> -1
$6Ce^{-3x^2}+1 > 0 \rightsquigarrow z(x) > 0$)

Ainsi, les solutions sont de la forme (I, y) avec $c \geq -1/6$
ou (I, y_0)

Exo 3 :

$y'' - 4y' + 3y = (2t+1)e^{-t}$

1) pour quelles valeurs de r, $y : t \mapsto e^{rt}$ solution de l'équation homogène associée ?

(*) $y'' - 4y' + 3y = 0$ (E_h)

$y(t) = e^{rt}$
$y'(t) = re^{rt}$
$y''(t) = r^2 e^{rt}$

y solution de (*)
$\Leftrightarrow r^2 - 4r + 3 = 0$
$\Leftrightarrow r = 3$ ou $r = 1$

b) $z := e^{-rt}y$ mq $S_{E_H} = \{ y : t \mapsto \alpha e^{3t} + \beta e^{t} \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = e^{-3t} y(t)$

Donc $y(t) = z(t)e^{3t}$

$y'(t) = z'(t)e^{3t} + 3z(t)e^{3t}$

$y''(t) = z''(t)e^{3t} + 6z'(t)e^{3t} + 9z(t)e^{3t}$

y est solution de (E_H)

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{3t}\left(z''(t) + 6z'(t) + 9z(t) - z'(t) - 12z(t) + 3z(t)\right) = 0$

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $z''(t) + 2z'(t) = 0$

On pose $u = z'$

u est solution de $u' + 2u = 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = C.e^{-2t}$; $C \in \mathbb{R}$

Donc pour $t \in \mathbb{R}$ $z(t) = \alpha e^{-2t} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{3t}}$

$y(t) = \alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}$

$y'(t)$
$= 3e^{3t}\alpha(t) + \underbrace{\alpha'(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t} + \beta'(t)e^{t}}_{=0}$
$= 3e^{3t}\alpha(t) + \beta(t)e^{t}$

$y'' = 3e^{3t}\alpha'(t) + 9e^{3t}\alpha(t) + \beta(t)e^{t} + \beta'(t)e^{t}$

donc y solution ssi

$3e^{3t}\alpha'(t) + 9e^{3t}\alpha(t) + \beta(t)e^{t} + \beta'(t)e^{t}$
$-4\left(3e^{3t}\alpha(t) + \beta(t)e^{t}\right)$
$+ 3\alpha(t)e^{2t} + 3\beta(t)e^{t} = (2t+1)e^{-t}$
$= e^{3t}3\alpha'(t) + e^{t}(\beta'(t) = (2t+1)e^{-t}$

3) Déterminer une solution de l'équation complète, de la forme $y(t) = \alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}$
(On pourra supposer que $\alpha'(t)e^{3t} + \beta'(t)e^{t} = 0$ $\forall t$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}$

$y'(t) = \alpha'(t)e^{3t} + 3\alpha(t)e^{3t} + \beta'(t)e^{t} + \beta(t)e^{t}$

$y''(t) = 3\alpha'(t)e^{3t} + 9\alpha(t)e^{3t} + \beta'(t)e^{t} + \beta(t)e^{t}$

y est solution de (E)

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $(3\alpha'(t) + 9\alpha(t))e^{3t} + (\beta'(t) + \beta(t))e^{t} - 4(3\alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}) + 3(\alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^{t}) = (2t+1)e^{-t}$

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{3t}3\alpha'(t) + e^{t}\beta'(t) = (2t+1)e^{-t}$

Donc α et β sont solution du système pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3e^{3t}\alpha'(t) + e^{t}\beta'(t) = (2t+1)e^{-t} \\ e^{3t}\alpha'(t) + e^{t}\beta'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{3t}\alpha'(t) = (2t+1)e^{-t} \\ \beta'(t) = -e^{2t}\alpha'(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'(t) = \frac{1}{2}(2t+1)e^{-4t} \\ \beta'(t) = -\frac{1}{2}(2t+1)e^{-2t} \end{cases}$$

$+(C = 0)$

donc $\alpha(t) = \frac{1}{2}\int^{t}(2s+1)e^{-4s}ds = \frac{1}{2}(2t+1)\frac{e^{-4t}}{-4} - \frac{1}{2}\int^{t}\frac{2e^{-4s}}{-4}ds$

$= \frac{-1}{8}(2t+1)e^{-4t} + \frac{1}{4}\frac{e^{-4t}}{-4} = -\left(\frac{t}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{-4t}$

et $\beta(t) = \frac{-1}{2}\int^{t}(2s+1)e^{-2s}ds$

$= \frac{-1}{2}(2t+1)\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\int^{t}2\frac{e^{-2s}}{-2}ds = \frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} - \frac{1}{2}\frac{e^{-2t}}{-2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-2t}$

Donc une solution particulière de $(\mathcal{E})$ est

$$y_p(t) = -\left(\frac{t}{4}+\frac{3}{16}\right)e^{-t} + \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-t}$$
$$= \left(\frac{t}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-t}$$

Donc les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme $(\mathbb{R}, y)$ avec, pour $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \boxed{\left(\frac{t}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-t} + \alpha e^{t} + \beta e^{3t}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exo 2.4 :

3) $y'' + 4y = \tan(t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

$(\mathcal{E}_H)$: $y'' + 4y = 0$

On résout l'équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$

On pose pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z(x) = e^{-2ix}y(x)$ (E_h)

$\Leftrightarrow y(x) = e^{2ix}z(x)$

Donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y'(x) = 2iz(x)e^{2ix} + z'(x)e^{2ix}$

$y''(x) = -4z(x)e^{2ix} + 4iz'(x)e^{2ix} + z''(x)e^{2ix}$

étapes:
1) résoudre l'équation carac
2) poser $z := e^{-rt}y$
$(y = e^{rt}z)$
calculer y', y'' et remplacer dans l'équation
3) résoudre pour z' puis z

Donc y est solution de $(\mathcal{E}_H)$ <u>ssi</u> pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$e^{i2x}\left(z''(x) + 4iz'(x)\right) = 0$

ssi $z'' + 4iz' = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z'(x) = Ce^{-4ix}$, $C \in \mathbb{C}$

$\hookrightarrow z(x) = \alpha e^{-4ix} + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

Donc les solutions de $(\mathcal{E}_H)$ sont de la forme $y(x) = C_- e^{-2ix} + C_+ e^{2ix}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $C_+, C_- \in \mathbb{C}$

On cherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$

On pose, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y(x) = C_-(x)e^{-2ix} + C_+(x)e^{2ix}$

$y'(x) = C_-'(x)e^{-2ix} - 2iC_-(x)e^{-2ix} + C_+'(x)e^{2ix} + 2iC_+(x)e^{2ix}$

On suppose $C_-'(x)e^{-2ix} + C_+'(x)e^{2ix} = 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

donc $y'(x) = -2iC_- e^{-2ix} + 2iC_+ e^{2ix}$

$y''(x) = -2iC_-'(x)e^{-2ix} - 4C_-(x)e^{-2ix} + 2iC_+'(x)e^{2ix} - 4C_+(x)e^{2ix}$

étapes
(sol particulière)
$\alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$
et supposer
$\alpha'(t)e^{r_1 t} + \beta'(t)e^{r_2 t} = 0$
$\rightsquigarrow$ résoudre le système
+primitives)

Donc y sol de $(\mathcal{E})$ <u>ssi</u>

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $-2iC_-'(x)e^{-2ix} - 4C_-(x)e^{-2ix} + 2iC_+'(x)e^{2ix} - 4C_+(x)e^{2ix}$
$+ 4C_-(x)e^{-2ix} + 4C_+(x)e^{2ix} = \tan(x)$

<u>ssi</u> $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $2i\left(C_+'(x)e^{2ix} - C_-'(x)e^{-2ix}\right) = \tan(x)$

résolution du système

Donc (C_+', C_-') est solution du système pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{cases} 2iC_+'(x)e^{2ix} - 2iC_-'(x)e^{-2ix} = \tan(x) \\ C_+'(x)e^{2ix} + C_-'(x)e^{-2ix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4iC_+' e^{2ix} = \tan(x) \\ C_-'(x) = C_+'(x)e^{4ix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_+'(x) = \frac{-i}{4}e^{2ix}\tan(x) \\ C_-'(x) = \frac{i}{4}e^{2ix}\tan(x) \end{cases}$$

Exo 2.5 et 2.6

Exo 2.5 :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 8y_2 + e^t \\ y_2' = y_2' = 2y_1 + y_2 + e^{-3t} \end{cases}$$

1) $Y' = AY + B(t)$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ $B : \mathbb{R} \to M_{2,1}(\mathbb{R})$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

Le système s'écrit bien $Y' = AY + B(t)$

2) Mq $\exists P$ inversible et D diagonale tq $A = PDP^{-1}$

valeurs propres:

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 16$$
$$= ((\lambda-1)-4)((\lambda-1)+4) = (\lambda+3)(\lambda-5)$$

$\to$ deux valeurs propres distinctes : $\lambda = 5$ et $\lambda = -3$

Donc A est diagonalisable

vecteurs propres: $\operatorname{Ker}(A - 5I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1}{=} \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A + 3I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

matrice P:

On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array}$

Je calcule P^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $Z := P^{-1}Y$. Mq Y sol ssi Z sol d'un autre système facile à résoudre

$Z(t)$: $\quad Z'(t) = P^{-1}Y'(t)$

$$= P^{-1}(AY(t) + B(t)) = P^{-1}APZ(t) + P^{-1}B(t)$$
$$= DZ(t) + P^{-1}B(t)$$

équation homogène associée : $Z'(t) = DZ(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) = 5 z_1(t) \\ z_2'(t) = -3 z_2(t)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1(t) = C_1 e^{5t} \\ z_2(t) = C_2 e^{-3t}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix} = e^{tD}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

équation complète :

Soit $Z \in C^1$ et $\omega(t) = e^{-tD}Z(t)$

$$\omega'(t) = -De^{tD}Z(t) + e^{-tD}Z'(t)$$
$$= -De^{-tD}Z(t) + e^{-tD}\left(\cancel{DZ(t)} + P^{-1}B(t)\right)$$

Donc $\omega'(t) = e^{-tD}P^{-1}B(t)$

et $\omega(t) = \int_0^t e^{-sD}P^{-1}B(s)\,ds + C$

Finalement, $Y(t) = PZ(t) = Pe^{tD}\omega(t)$

$$= Pe^{td}\int_0^t e^{-sD}P^{-1}B(s)\,ds + Pe^{tD}C$$

↳ $e^{(t-s)D} = \begin{pmatrix} e^{5(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-3(t-s)}\end{pmatrix}$

$$P^{-1}B(s) = \frac14\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^s\\ e^{-3s}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac14(e^3+2e^{-3s})\\ \frac14(-e^s+2e^{-3s})\end{pmatrix}$$

D'où $e^{(t-s)D}P^{-1}B(s) = \begin{pmatrix}\frac14(e^s+2e^{-3s})e^{5(t-s)} \\ \frac14(-e^{+s}+2e^{-3s})e^{-3(t-s)}\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\frac14 e^{5t}(e^{-4s}+2e^{-8s}) \\ \frac14(-e^{4s}+2)\end{pmatrix}$$

Donc $\int_0^t e^{(t-s)D}P^{-1}B(s)\,ds$

$$= \begin{pmatrix}\frac14 e^{5t}\int_0^t(e^{-4s}+2e^{-8s})\,ds \\ \frac14 e^{-3t}\int_0^t(-e^{4s}+2)\,ds\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac14 e^{5t}\left[\frac{e^{-4s}}{-4}+\frac{2e^{-8s}}{-8}\right]_0^t \\ \frac14 e^{-3t}\left[\frac{-e^{4s}}{4}+2s\right]_0^t\end{pmatrix}$$

Exo 2.6 :

(4) : $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

1) Mq y sol de (4) sur $\mathbb{R}$ ssi $Y = \begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\end{pmatrix}$ sol de $Y' = AY$; $A \in M_3(\mathbb{R})$

On prend $Y = \begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\end{pmatrix}$ $\quad Y' = \begin{pmatrix}y'\\ y''\\ y'''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0y+1y'+0y''\\ 0y+0y'+1y''\\ 2y-5y'+4y''\end{pmatrix}$ Soit $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}Y$$

TD 6 16/02/26 (Révision Partiel)

Exo 3 Partiel 2025:

$Y' = AY$ sur $\mathbb{R}$, où $A = \begin{pmatrix} -6 & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

1) χ_A

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4-\lambda & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -16 & 5 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -6 & -12 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -16 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & -12 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -16 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & -12 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -16 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2 + 4)$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\boxed{= (2-\lambda)^3(-1-\lambda)}$$

Ainsi, $Sp(A) = \{\overset{\lambda_1}{-1}, \overset{\lambda_2}{2}\}$ et $m(-1) = 1$

2) se propres associé à λ_1

On résout $(A + Id)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$(A + I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 16x_2 - 16x_3 + 5x_4 = 0 \\ 0 + 3x_2 + 0 + 0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ -6x_1 + 12x_2 - 12x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ -5x_1 - 16x_3 + 5x_4 = 0 \\ -6x_1 - 12x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 5L_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_3 = 0 \\ -6x_1 - 12x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 = x_4 \end{cases}$$

donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Ker(A + I_4)$ ssi $X \in Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= U_1$ est une base de ce sous-espace propre.

3) Mq sep associé à λ_2 est de dim 2 + en donner une base (u_2, v_2)

On résoud $(A-2I_4)X=0$ où $X \in \mathbb{R}^4$

$$(A-2I_4)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1+16x_2-16x_3+5x_4=0 \\ 0+0+0+0=0 \\ x_1-2x_2+2x_3-x_4=0 \\ -6x_1+12x_2-12x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_4=0 \\ x_1-2x_2+2x_3-x_4=0 \\ -3x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1+8L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+6L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2-2x_3 \\ x_4=0 \end{cases}$$

donc $X \in \mathrm{Ker}(A-2I_4)$ ssi $X \in \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}\right)$

donc $\mathrm{Ker}(A-2I_4)$ est de dim 2

Puisque la multiplicité algébrique de λ_2 (3) est strictement supérieure à sa multiplicité géométrique (2), A n'est pas diagonalisable.

4) Résoudre $(A-\lambda_2 I)\omega = v_2$

La matrice du système $(A-2I_4)\omega = v_2$ est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 16 & -16 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ -6 & 12 & -12 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+8L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+6L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow \frac{L_4 - L_1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ses solutions sont : $\begin{cases} x_1 = -1+2s-2t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = -2 \end{cases}$ où $s, t \in \mathbb{R}$

5) donner $P \in M_4(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

je prends $s=0$, $t=0$

$\omega = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}$. Soit alors $B = (u_1, u_2, v_2, \omega)$

Par construction, B est une base de $\mathbb{R}^4$.

$A = \mathrm{mat}_{B_c} A = \mathrm{mat}_{B_c \leftarrow B} \mathrm{Id} \; \mathrm{mat}_B A \; \mathrm{mat}_{B \leftarrow B_c} \mathrm{Id} = P \, \mathrm{Mat}_B A \, P^{-1}$ avec $P = \mathrm{Mat}_{B \leftarrow B_c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

et $\mathrm{Mat}_B A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} Au_1 & Au_2 & Av_2 & Aw_2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

P est une matrice de passage donc P est inversible (ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^4$ donc elles sont linéairement indépendante.

6) Calculer P^{-1}

On calcule l'inverse de P par la méthode de Gauss Jordan :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 + 2L_3 - L_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6) Soit $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$. Donner la solution de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = X_0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = X_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P^{-1}Y)' = P^{-1}AP\, P^{-1}Y \\ (P^{-1}Y)(0) = P^{-1}X_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Z' = T.Z \\ Z(0) = P^{-1}X_0 \end{cases}$ en posant $Z := P^{-1}Y$

$$P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix} = Z_0$$

Donc $Z(t) = e^{tT}.Z_0 = e^{t(D+N)}Z_0$ où $D = \mathrm{diag}(-1, 2, 2, 2)$ et $N = E^{3,4}$. D et N commutent, et $N^2 = 0$, donc

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{2t} & & \\ & & e^{2t} & \\ & & & e^{2t} \end{pmatrix} (I + tN) Z_0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{2t} & & \\ & & e^{2t} & \\ & & & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix} = (18e^{-t}, -3e^{2t}, 13e^{2t}, 13e^{2t})$$

Puis $Y(t) = PZ(t) = (18e^{-t} - (26t+19)e^{2t}, -3e^{2t}, 13te^{2t}, 18e^{-t} - 26e^{2t})$

Exo 3.4:

(E): $x''+ax'+bx=0$

φ_1, φ_2 sols de E. $\omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$

1) Mq $\omega(t) = \omega(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$ $\forall t, t_0 \in I$.

Mq $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ base de sols de (E) ssi $\exists t_0 \in I$ tq $\omega(t_0) \neq 0$

Supposons que (φ_1, φ_2) soit un système libre.

$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\begin{cases} \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0 \\ \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = 0 \end{cases}$ donc le système admet une unique sol

ce qui n'est possible que $\omega(t) \neq 0$ $\forall t \in J$

Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tq $\omega(t_0) \neq 0$

Alors, $\begin{cases} \lambda_1\varphi_1(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t_0) = 0 \\ \lambda_1\varphi_1'(t_0) + \lambda_2\varphi_2'(t_0) = 0 \end{cases}$

admet une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$

Supposons que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$ i.e. $\forall t \in J$, $\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) = 0$

$\lambda_1\varphi_1'(t) + \lambda_2\varphi_2'(t) = 0$

En particulier $t = t_0$, on doit avoir :

$\begin{cases} \lambda_1\varphi_1(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t) = 0 \\ \lambda_1\varphi_1'(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t_0) = 0 \end{cases}$ donc $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ et (φ_1, φ_2) est libre

or $\varphi_1'' = -a\varphi_1' - b\varphi_2$

$\varphi_2'' = -a\varphi_2' - b\varphi_2$

Donc $\omega'(t) = \varphi_1(-a\varphi_2' - b\varphi_2) - (a\varphi_1' - b\varphi_1)\varphi_2$

$= -a\varphi_1\varphi_2' - b\varphi_1\varphi_2 + a\varphi_1'\varphi_2 + b\varphi_1\varphi_2 = -a\omega(t)$

Ainsi, $\omega(t) = Ce^{-A(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ où $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$

Comme $A(t_0) = 0$, $\omega(t_0) = C \cdot 1 = C$

et finalement, $\omega(t) = \omega(t_0)e^{-A(t)}$ donc $\forall t \in J$ $\omega(t) \neq 0$

2) $I =]0, +\infty[$ et (E): $t^2x''(t) - (t^2+3t)x'(t) + (t+3)x(t) = 0$

a) Vérifier que $\varphi_1(t)$ sol de (E) sur I.

$(E) \Leftrightarrow y'' - \frac{t^2+3t}{t^2}y' + \frac{(t+3)}{t^2}y = 0$

$a(t) = -t - \frac{3}{t}$, $b(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}$, donc (E): $y'' + ay' + by = 0$

$t'' = 0$

$t' = 1$

donc $t^2\varphi_1''(t) - (t^2+3t)\varphi_1'(t) + (t+3)\varphi(t) = 0 - t^2 - 3t + t^2 + 3t = 0$

donc φ_1 est bien une sol de (E) sur J.

b) Determiner une sol φ_2 de (ϵ) en utilisant ω

Soit φ_2 une autre sol indépendante de φ_1

Alors $\omega(t) = \omega(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} -a(s)\, ds\right)$

or $\int_{t_0}^{t} -a(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} 1 + \frac{3}{s}\, ds = [\, s + 3\ln s\,]_{t_0}^{t} = t + 3\ln(t) + c \,;\ c \in \mathbb{R}$

D'autre part, $\omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)$

donc $\omega(t) = t\varphi_2' - \varphi_2$

On doit donc avoir $t\varphi_2'(t) - \varphi_2(t) = \omega(t_0)\, e^t t^3 C(t_0)$.

On pose $\alpha(t_0) = C(t_0) \cdot \omega(t_0)$

On obtient l'équation différentielle (pour φ_2)

$ty' - y = \alpha t^3 e^t \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t} y = \alpha t^2 e^t$

$A(t) = \ln(t)$.

Une sol $e^{A(t)} = t$

$w(t) = y/t$

$w'(t) = \frac{y't - y}{t^2} = \frac{\alpha t^3 e^t}{t^2} = \alpha t e^t$

donc $w(t) = \alpha \int_{t_0}^{t} s e^s ds = \alpha\left([\, s e^s\,]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} e^s ds \right)$

$= \alpha\left(t e^t - t_0 e^{t_0} - e^t + e^{t_0} \right)$

$= \alpha\left((t-1)e^t - (t_0 - 1)e^{t_0} \right)$

(Brouillon pour le TP)

1) $y' = y^2$

sol constante : $y \equiv c$

alors $y = 0$ donc $0 = c^2$

donc $y(t) \equiv 0$

si $y \neq 0$ sur I :

$y' = y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = 1$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} \cdot y' dy = \int dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = C - t$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{C - t}$

2) $y' = y + \cos(t)$

(Eh) : $y' - y = 0$

$y_h(t) = Ce^t$; $C \in \mathbb{R}$

$y_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$; $a, b \in \mathbb{R}$

$y_p'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$

$-a\sin(t) + b\cos(t) - a\cos(t) - b\sin(t) - \cos(t) = 0$

$\Rightarrow \cos(t)(b - a) + \sin(t)(-b - a) = \cos(t)$

$\Rightarrow \begin{cases} b - a = 1 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1/2, \ a = -1/2 \\ a = -b \end{cases}$

Sol $= \{ Ce^t - 0.5\sin(t) + 0.5\cos(t) \ ; \ C \in \mathbb{R} \}$

3) $y' = y/t$

$y \equiv 0$ sol qui s'annule

si $y \neq 0$,

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dy = \int \frac{1}{t} dt$

$\Rightarrow \ln(|y|) = \ln(|t|) + C$; $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^C . |t|$

$\Rightarrow y(t) = \underline{C.t}$; $C \in \mathbb{R}$

$y \in C^2$ sol de
$-my'' = -by' - Ky$ (1)

$E(t) = \frac{m}{2} y'(t)^2 + \frac{K}{2} y(t)^2$

1) $E'(t)$ en utilisant (1)

$E(t) = \frac{m}{2} y'(t)^2 + \frac{K}{2} y(t)^2$

$E'(t) = m\, y''(t)\, y'(t) + K\, y'(t) y(t)$
$= y'(t) \big(\underbrace{m y''(t) + K y(t)}_{=0} \big)$

$= 0$

$E'(t) = 0$ donc E est constante.

$my'' = -by' - Ky$ (1)
$\Rightarrow Ky + my'' = \underset{=0 \text{ car } b=0}{-by'}$
$\Rightarrow my'' = -Ky$

2) Mq pour $b > 0$, $E'(t) = -by'(t)^2 \leq 0$

$E'(t) = y'(t) [-by'(t) - Ky(t) + Ky(t)]$ par (1)
$= -\underset{>0}{b}\, \underset{\geq 0}{y'(t)^2} \leq 0$

E est décroissante : le ressort oscille et se stabilise au bout d'un moment.

Exo théorique :

$Z' = AZ$, $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

x est la position, y la vitesse

1) Calculer les sols de $Z' = AZ$
En déduire que $\|Z(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ est cte

$\begin{cases} x'(t) = -y(t) & (1) \\ y'(t) = x(t) & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x''(t) + y'(t) = 0$
$\Leftrightarrow x''(t) + x(t) = 0$ (par (2))

Je sais que la sol est de la forme :
$x(t) = a\cos(t) - b\sin(t)$; $a, b \in \mathbb{R}$

$y'(t) = x(t) \Rightarrow y(t) = \int^t a\cos(s) - b\sin(s)\, ds$

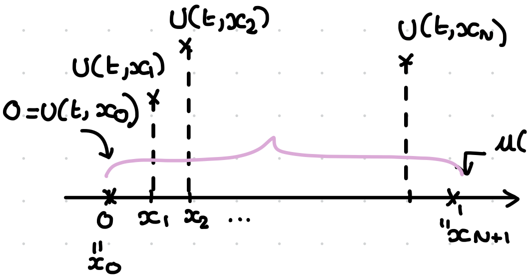
$= a\sin(t) + b\cos(t)$

$\|z(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = cte$
$(\|z(t)\|)' = 0$

$u(t,x)$: la température de la barre à l'instant t au point x

$\partial_t u(t,x) = \underbrace{\partial_{xx} u(t,x)}$

$\partial_{xx} U(t_n, x_n) = \dfrac{u(t_n, x_{n+1}) - 2U(t_n, x_n) + U(t_n, x_{n-1})}{(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1})}$



$y' = -ay$

$y_{n+1} = (1-ha)^n y_0$

$U^{n+1} = (I - \nu dt A) U^n$

$U^n = (I - \nu dt\, A)^n U_0$

⇝ schéma stable ssi toutes les valeurs propres de $I + \nu dt A$ sont de module ≤ 1

EI : $U^{n+1} = U^{n+1} - \nu dt\, A\, U^{n+1}$

résoudre : $(Id - \nu dt A) U^{n+1} = U^n$

↑ inconnue ↑ connu

$AU = V$

↑ si A tridiagonale ⇝ $O(n)$

⇝ méthode du pivot de Gauss pour trouver l'inverse $O(n^3)$

Feuille : TD7

Rappels (définitions, théorèmes) :

DEF : [point d'équilibre]

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. On dit que $x^* \in U$ est un point d'équilibre (ou point stationnaire) du système $x' = f(x)$ si $f(x^*) = 0$. La solution issue de x^* est alors la solution constante $x(t) = x^*$ pour tout $t \geqslant 0$

DEF : [stabilité]

Soit x^* un point d'équilibre de $x' = f(x)$, f locallement lipschitzienne

- x^* est stable au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \ \forall t \geqslant 0$
- x^* est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $r > 0$ tq $\|x_0 - x^*\| < r \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$

Thm de Lyapunov [stabilité] :

Soit $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert U contenant x^*, avec $V(x^*) = 0$. On suppose :

i) $V(x) > 0$ pour tout $x \neq x^*$ dans U (V définie positive),

ii) $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in U$

Alors x^* est stable. Si de plus $\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \neq x^*$ dans U, alors x^* est asymptotiquement stable

Critère de Routh - Hurwitz pour les systèmes 2x2.

Pour un système linéaire $x' = Ax$, $A \in M_2(\mathbb{R})$, on note $tr(A)$ la trace et $det(A)$ le determinant.

- $det(A) < 0$: valeurs propres réelles de signes opposés $\Rightarrow$ point - selle (instable)
- $det(A) > 0$ et $tr(A) < 0$: parties réelles strictement négatives $\Rightarrow$ origine asymptotiquement stable
- $det(A) > 0$ et $tr(A) > 0$: parties réelles strictement positives $\Rightarrow$ origine instable

---

Ex. 7.1 :

$x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, A matrice réelle

1) Rappeler le lien entre les valeurs propres de A et la stabilité de l'origine.

[voir : critère de Routh Hurwitz]

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres et conclure.

A est triangulaire supérieure :

$Spec(A) = \{-2, -3\}$ + 2 vp distinctes $\Rightarrow$ diagonalisable

Par RH, $det(A) > 0$, $Tr(A) = -5 < 0$

Donc l'origine est as. stable

3) On cherche $V(x) = x^T P x$; P symétrique déf. pos. sol de l'équation de Lyapunov $A^T P + PA = -I_2$

a) Mq $\dot{V} = x^T (A^T P + PA) x$ le long des solutions, et en déduire $\dot{V} = -\|x\|^2 < 0$

hypothèses : $V(x) = x^T P x$ $\quad x' = Ax$, $P^T = P$

le long d'une solution $t \mapsto x(t)$, on a :

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\left(x(t)^T P x(t)\right) \quad \text{[définition de } V\text{]}$$

$$= x'(t)^T P x(t) + x(t)^T P x'(t)$$

$$= (A(x(t))^T P x(t) + x(t)^T P (A x(t)) \quad [\text{car } x'(t) = Ax(t)]$$

$= x^T A^T P x(t) + x(t) P A x(t)$

$= x(t)^T (A^T P \ + PA)\, x(t)$

$\dot V = -\|x\|^2$:

P vérifie l'équation de Lyapunov : $A^T P + PA = -I_2$

Donc $\dot V(x(t)) = x(t)^T(-I_2)\,x(t) = -x(t)^T x(t) = -\|x(t)\|^2 < 0$ si $x(t) \neq 0$

b) Résoudre $A^TP + PA = -I_2$ en posant $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

- $A^T P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a-3b & b-3c \end{pmatrix}$

- $PA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & a-3b \\ -2b & b-3c \end{pmatrix}$

donc $A^TP + PA = \begin{pmatrix} -4a & a-5b \\ a-5b & 2b-6c \end{pmatrix} = -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} -4a = -1 & (1) \\ a - 5b = 0 & (2) \\ 2b - 6c = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow a = 1/4$

(2) $\Rightarrow b = 1/20$

(3) $\Rightarrow 2 \cdot 1/20 - 6c = 1 \Rightarrow 1/10 - 6c = -1 \Rightarrow -6c = -11/10 \Rightarrow c = 11/60$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/20 \\ 1/20 & 11/60 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

c) Vérifier que P est bien définie positive (critère de Sylvester)

(critère de Sylvester : une matrice symmétrique est def pos ssi $a > 0$ et $\det(P) > 0$)

- P est symétrique
- $a = 1/4 > 0$
- $\det(P) = \frac{1}{4}\cdot\frac{11}{60} - \left(\frac{1}{20}\right)^2 = 13/300 > 0$ donc P est définie positive

4) Montrer que $\dot V(x) \leqslant \frac{1}{\lambda_{max}(P)} V(x)$ + en déduire que $\|x(t)\| \leqslant Ce^{-\alpha t}\|x_0\|$; préciser α et C en fonction de P

On applique le thm de Lyapunov :

- P def pos
- $\dot V(x) = -\|x\|^2 < 0 \quad \forall x \neq (0,0)$

donc $x^* = (0,0)$ est as. stable (on retrouve le résultat de la question 2)