



Plan du Cours

- ch 1. Exemples, Questions
- ch 2. Systèmes linéaires d'équations différentielles
- ch 3. Exemples de méthodes numériques
- ch 4. Equations non-linéaires.

Chapitre 1. ExemplesI. L'équation différentielle la plus simple1) Vocabulaire

Pour décrire des questions de dynamique de population, on est amené à chercher des fonctions  $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall t \in I, y'(t) = ay(t)$ .

La fonction  $y$  représente le nombre d'individus au cours du temps  $t \in I$ . L'équation dit que la vitesse à laquelle la population change est proportionnelle au nombre d'individus.

$a$  représente le 'taux de natalité'

\* On écrit ce problème sous la forme :

$$(i) y' = f(t, y) = ay, \text{ avec } f: I \times U \rightarrow \mathbb{R} \text{ donnée par } f(t, x) = ax.$$

où  $U \subset \mathbb{R}$  et  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, et  $f$  continue sur  $I \times U$

Résoudre l'équation (i) c'est trouver les couples  $(J, y)$  constitués d'un intervalle  $J \subset I$  et d'une fonction  $y: J \rightarrow \mathbb{R}$  tq :

- i)  $y \in C^1(J)$
- ii)  $\forall t \in J, y(t) \in U$
- iii)  $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$

On ne s'intéresse qu'aux solutions maximales

2) Résolution de (i)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'équation différentielle sur  $I = \mathbb{R}$  donnée par  $y' = ay$  (\*) a pour solutions les  $(I, t \mapsto Ce^{at})$  avec  $c \in \mathbb{R}$

pv: Supposons que  $(J, y)$  soit une solution, avec  $J \subset I$  et  $y: J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$

Cette équation (\*) s'écrit  $y' = f(t, y)$  avec  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t, x) = ax$ .

Il suffit donc de satisfaire iii.

Supposons que  $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Soit  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $w(t) = e^{-at}y(t)$ .

$$\text{On a } w'(t) = -ae^{-at}y(t) + e^{-at}y'(t) = e^{-at}(y'(t) - ay(t))$$

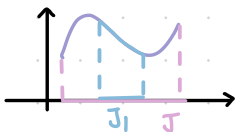
Ainsi,  $(J, y)$  vérifie iii ssi  $(J, w)$  vérifie :  $\forall t \in J, w'(t) = 0$ .

Autrement dit,  $(J, y)$  vérifie iii ssi  $w(t) = c$  pour un  $c \in \mathbb{R}$  quelconque.

On obtient donc  $(J, y)$  vérifie iii ssi  $(J, y) = (J, t \mapsto Ce^{at})$  pour un  $c \in \mathbb{R}$

Concernant  $J$ , le raisonnement ci-dessus ne restreint pas son choix. En particulier, on peut prendre  $J = I = \mathbb{R}$ .

Rq: si  $J_1 \subset J$  et  $(J, y)$  est une solution de (\*), alors  $(J_1, y|_{J_1})$  est encore une solution



DEF: On dit que  $(J, y)$  est une solution maximale de l'équation  $y' = f(t, y)$  avec  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  lorsque  $(J, y)$  n'est pas la restriction à  $J$  d'une solution  $(\tilde{J}, \tilde{y})$  avec  $\tilde{J} \subsetneq J$  et  $\tilde{y}|_J = y$

Autrement dit,  $(J, y)$  est maximale s'il est impossible de la prolonger en une solution  $(\tilde{J}, \tilde{y})$

Dans le cas de (\*)  $y' = ay$  on a déterminé toutes les solutions maximales  $(\mathbb{R}, t \mapsto Ce^{at})$

## II. Les équations diff. linéaires d'ordre 1

**DEF:** une EDL<sup>1</sup> est une équation différentielle de la forme (2)  $y' = a(t)y + b(t)$ , avec  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues  
On note que (2) s'écrit  $y' = f(t, y)$  avec  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(t, x) = a(t)x + b(t)$

À  $t \in I$  fixé, l'application  $x \mapsto f(t, x)$  est affine.

Lorsque  $b \equiv 0$ ,  $t \mapsto f(t, x) = a(t)x$  est linéaire.

Dans ce cas, on dit que l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  est linéaire homogène.

**PROP:** Les solutions maximales de (2) sont exactement les  $(I, t \mapsto Ce^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds)$   
où  $t_0 \in I$  fixé et  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$  et  $c \in \mathbb{R}$  quelconque.

**~pv:** Soit  $(J, y)$  une solution maximale de (2).

On a  $y \in C(J, \mathbb{R})$  et  $\forall t \in J$ ,  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

Soit  $w(t) = e^{-A(t)}y(t)$ , où  $A(t)$  est une primitive de  $a$  sur  $J$ :  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$  où  $t_0 \in J$  fixé

On a, pour tout  $t \in J$ ,

$$w'(t) = -a(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}y'(t) \\ = e^{-A(t)}(y'(t) - a(t)y(t))$$

$$= e^{-A(t)}b(t)$$

Donc il existe  $c \in \mathbb{R}$  tq

$$w(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds + c$$

Ainsi, on a  $y(t) = e^{A(t)}w(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds$  pour un  $c \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, si  $y(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds$ , on trouve ...  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

D'autre part, on peut prendre  $J = I$ , d'où le fait que les solutions maximales sont de la forme

$$(I, t \mapsto Ce^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds)$$

**DEF:** Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On dit qu'une solution  $(J, y)$  de l'équation  $y' = f(t, y)$  est globale  
lorsque  $J = I$

**rq:** Les solutions globales sont maximales. Attention, la réciproque est fautive en générale.

## III. Un exemple non linéaire:

On considère l'ED (3)  $y' = y^2$ . Plus précisément, on considère l'équation  $y' = f(t, y)$  avec  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
donnée par  $f(t, x) = x^2$

**DEF:** une équation différentielle  $y' = f(t, y)$  où  $f$  ne dépend pas de  $t$  est appelée  
équation différentielle autonome

On cherche les solutions maximales  $(J, y)$  de (3)

1) Recherche des solutions qui ne s'annulent pas

On suppose que  $(J, y)$  vérifie (3) et que  $y(t) \neq 0$  pour tout  $t \in J$ . On a  $y'(t) = y(t)^2$  pour tout  $t \in J$ ,  
donc  $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$  pour tout  $t \in J$ .

Ainsi,  $-1/y(t) = t + c$  pour un  $c \in \mathbb{R}$

Donc  $y(t) = \frac{-1}{t+c}$  pour un  $c \in \mathbb{R}$

Mais cette fonction n'est pas définie en  $t = -c$ .

Donc au mieux, on peut prendre  $J_+ = ]-c, +\infty[$  ou  $J_- = ]-\infty, -c[$

On a trouvé deux familles de solutions maximales.  $(J_+, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$  et  $(J_-, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$  avec  $c \in \mathbb{R}$

Elles ne sont pas globales.

\* Les solutions maximales des E.L. sont toujours globales (tout peut se produire pour des équations non-linéaires)

## 2) Cas des solutions qui s'annulent.

Cette fois-ci, on suppose que  $(J, y)$  est une solution de (3) et qu'il existe au moins un  $t_0 \in J$  tel que  $y(t_0) = 0$

On remarque que  $(I, 0)$  est une solution de (3) qui rentre dans ce cadre.

On va montrer que c'est la seule.

→ On peut supposer que  $t_0 = 0$ . En effet, je pose  $z(t) = y(t + t_0)$ .

On a  $z'(t) = y'(t + t_0) = y(t + t_0)^2 = z(t)^2$ . Donc  $(J - t_0, z)$  est solution de (3) et  $z(0) = y(t_0) = 0$

→ On a  $z(0) = 0$  et  $z'(0) = z(0)^2 = 0$ . De plus,  $z'(t) \geq 0 \forall t$ , donc  $z$  est croissante.

\* Ou bien  $z$  est identiquement nulle et on retrouve la solution  $(I, 0)$

\* Ou bien  $\begin{cases} \exists T > 0 \text{ tq } z(T) > 0 \text{ (*)} \\ \exists T < 0 \text{ tq } z(T) < 0 \end{cases}$

On se place dans le cas (\*). Pour  $t \in [0, T]$  on a  $0 \leq z(t) \leq z(T)$

donc  $0 \leq z'(t) \leq z(t)z(t) \leq \underbrace{z(T)}_a z(t)$

Soit  $a = z(T)$ , on a  $z'(t) \leq az(t)$

Donc  $(e^{-at} z(t))' = -ae^{-at} z(t) + e^{-at} z'(t) = e^{-at} (z'(t) - az(t)) \leq 0$

En particulier,  $e^{-at} z(t) \leq e^{-a \cdot 0} z(0) \leq 0$

Donc  $z(t) \leq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Mais comme  $z(T) > 0$ , c'est absurde.

CCL: Les solutions maximales de (3) sont

- $(I, 0)$  globale
- $(J_-, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$ ;  $c \in \mathbb{R}$  pas globale
- $(J_+, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$ ;  $c \in \mathbb{R}$ , pas globale

## IV. Notion de problème de Cauchy

PROP: [unicité dans un cas facile]

On considère  $I \in \mathbb{D}$   $y' = f(t, y)$  où  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  est continue. On se donne  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in U$ .

Si  $f$  est  $C^1(I \times U)$  alors le problème de Cauchy  $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

admet une unique solution maximale  $(J, y)$  avec  $t_0 \in J$

PROP: [Cauchy - Lipschitz - faible]

Soit  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Soit  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in U$ .

Si  $f$  est  $C^1$  sur  $I \times U$  alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale  $(J, y)$  avec  $t_0 \in J$

Exemple: On considère l'EO  $y' = Ky - y^2$ , avec  $K > 0$

Cette équation s'écrit  $y' = f(t, y)$ , avec  $f$  donnée par  $f(t, x) = Kx - x^2$ ,  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I = \mathbb{R}, U = \mathbb{R}$ )

Cette fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (c'est un polynôme sur  $(t, x)$  qui ne dépend pas de  $t$ )

On cherche toutes les solutions maximales de (1)

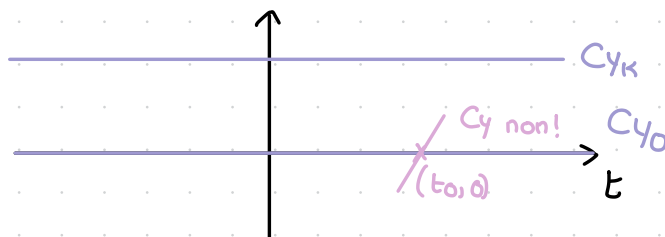
a) Recherche des solutions constantes

$(\mathbb{R}, t \mapsto a)$  est une solution de (1) ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = Ky(t) - y(t)^2 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 0 = Ka - a^2 \Leftrightarrow a(K-a) = 0$$

Donc  $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$  et  $(\mathbb{R}, t \mapsto K)$  sont des solutions

Figure: graphe des solutions



b) Soit  $(J, y)$  une solution maximale non constante.

Peut-on avoir  $y(t_0) = 0$  pour un  $t_0 \in J$ ?

Supposons que ce soit le cas. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \text{ admet 2 solutions maximales: } (\mathbb{R}, y_0) \text{ et } (J, y).$$

Cela contredit le TCL.

Peut-on avoir  $y(t_0) = K$ ? non pour la même raison.

→ À partir de maintenant je suppose que  $t_0 = 0$  (l'équation est autonome), et je considère le problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

\* si  $x_0 = 0$  (resp.  $x_0 = K$ ) la solution maximale est  $(\mathbb{R}, y_0)$  (resp.  $(\mathbb{R}, y_K)$ )

\* si  $x_0 < 0$ , la solution maximale  $(J, y)$  vérifie  $y(t) < 0$  pour tout  $t \in J$

\* si  $0 < x_0 < K$ , la solution maximale  $(J, y)$  vérifie  $0 < y(t) < K$  pour tout  $t \in J$

\* si  $x_0 > K$ , \_\_\_\_\_ vérifie  $y(t) > K$  pour tout  $t \in J$

c) Calcul des solutions maximales.

Soit  $(J, y)$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ky - y^2 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

cas 1:  $x_0 \in ]0, K[$

On a:  $\forall t \in J, y'(t) = Ky(t) - y^2(t) = y(t)(K - y(t))$

comme  $y(t) \in ]0, K[$  pour tout  $t$ , on a  $\frac{y'(t)}{y(t)(K-y(t))} = 1$

or  $\frac{1}{x(K-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{K-x}$  avec  $a = 1/K$ ,  $b = 1/K$

Donc on a, pour tout  $t \in \mathcal{J}$   $\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{K-y(t)} = K$

Donc il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $\ln|y(t)| - \ln|K-y(t)| = K.t + c$

Puisque  $y(t) \in ]0, K[$ , cela équivaut à  $\ln y(t) - \ln(K-y(t)) = Kt + c$   
 $\frac{y(t)}{K-y(t)} = C_1 e^{Kt}$  pour un  $C_1 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_1 e^{Kt} (K - y(t))$$

$$\Leftrightarrow (C_1 e^{Kt} + 1) y(t) = K C_1 e^{Kt}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{K C_1 e^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}$$

De plus,  $y(0) = x_0$ . Donc  $\frac{K C_1}{1 + C_1} = x_0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{x_0}{K - x_0}$

Finalement,  $y(t) = \frac{K x_0}{K - x_0} e^{Kt} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{x_0}{K - x_0} e^{Kt}} \right)$   
 $= \frac{K x_0 e^{Kt}}{(K - x_0) + x_0 e^{Kt}}$

Puisque cette fonction est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$  ( $\rightarrow$  la solution maximale est globale)

Exercice: Etudiez les cas 2 et 3 :  $x_0 > K$  et  $x_0 < 0$

## V. Equations différentielles d'ordre supérieur:

**DEF.** Une équation différentielle d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  s'écrit

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

où  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $U \subset \mathbb{R}^n$  est continue

Résoudre cette équation, c'est trouver tous les couples  $(\mathcal{J}, y)$  constitués d'un intervalle  $\mathcal{J} \subset I$

et d'une fonction  $y: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

- i)  $y$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathcal{J}$
- ii)  $\forall t \in \mathcal{J}, (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in U$
- iii)  $\forall t \in \mathcal{J}, y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

**Exemple:**  $m x''(t) = F(t, x(t))$  équation de Newton

2) On peut ramener à un système d'ordre 1

**PROP:** Soit  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, avec  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle de  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Soit  $G: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $G(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ F(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$

i) Si  $(\mathcal{J}, y)$  est une solution de l'équation d'ordre  $n$   $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$   
 alors  $(\mathcal{J}, \gamma)$  où  $\gamma: t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$  est solution du système différentiel d'ordre 1  $\gamma' = G(t, \gamma)$

ii) réciproquement, si  $(\mathcal{J}, \gamma)$  est une solution de  $\gamma' = G(t, \gamma)$  alors notant  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ ,  $(\mathcal{J}, y_1)$  est une solution de  $y^{(n)} = F(t, y_1, \dots, y^{(n-1)})$

Preuve: Supposons que  $(\mathcal{J}, \gamma)$  soit solution de  $\gamma^{(n)} = F(t, \_)$

Soit  $\gamma(t) = (\gamma(t), \gamma'(t), \_, \gamma^{(n-1)}(t))$

$$\text{On a } G(t, \gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ | \\ \gamma^{(n-1)}(t) \\ F(t, \_) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ | \\ \gamma^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Donc on a bien  $\gamma'(t) = G(t, \gamma(t))$

ii) Supposons que  $(\mathcal{J}, \gamma)$  soit une solution de  $\gamma' = G(t, \gamma)$

$\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donc on peut écrire  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ | \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$  où les  $\gamma_j$  sont les composantes de  $\gamma$

$$\text{On a } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ | \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = G(t, \gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \\ | \\ \gamma_n(t) \\ F(t, \gamma_1(t), \_, \gamma_n(t)) \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \gamma_1'(t) = \gamma_2(t) \\ \gamma_2'(t) = \gamma_3(t) \\ | \\ \gamma_{n-1}'(t) = \gamma_n(t) \\ \gamma_n'(t) = F(t, \gamma_1(t), \_, \gamma_n(t)) \end{cases}$$

Cela entraîne que  $\gamma_1^{(n-1)}(t) = \gamma_n(t)$  et  $\gamma_1^{(n)}(t) = F(t, \_)$

Donc  $\gamma_1$  est solution de  $\gamma^{(n)} = F(t, \gamma, \_, \gamma^{(n-1)})$

utilité:

- ① Pour résoudre les équations d'ordre peu élevé, on peut parfois se ramener à un système d'ordre 1
- ② Transposer les résultats théoriques à propos des équations d'ordre 1 vers les équations d'ordre n

Par exemple,

Proposition (Thm de CL version faible - ordre n)

Soit  $F: \mathcal{I} \times U \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $U \subset \mathbb{R}^n$  une fonction continue.  $C^1$

Soit  $t_0 \in \mathcal{I}$  et  $x_0 \in U$ .

Le pb de Cauchy  $\begin{cases} \gamma^{(n)} = F(t, \gamma, \_, \gamma^{(n-1)}) \\ (\gamma(t_0), \gamma'(t_0), \_, \gamma^{(n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$

admet une unique solution maximale  $(\mathcal{J}, \gamma)$

## ch 2. systèmes différentiels linéaires

### I. Généralités:

i) Définition: On appelle système différentiel linéaire une équation différentielle de la forme  $Y' = F(t, Y)$  où  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $U \subset \mathbb{R}^n$  est une fonction continue.

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples  $(J, \gamma)$  constitués d'un intervalle  $J \subset I$  et d'une fonction  $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que:

- i)  $\gamma \in C^1(J)$
- ii)  $\forall t \in J, \gamma(t) \in U$
- iii)  $\forall t \in J, \gamma'(t) = F(t, \gamma(t))$

Le système est dit linéaire lorsque  $F(t, x) = A(t)x + B(t)$  avec  $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  et  $B: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continues.

Exemple: 
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$
  
$$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \psi'(t) & A(t) & \gamma & B(t) \end{matrix}$$

Vocabulaire: si  $B \equiv 0$ , on dit que le système est homogène. si  $A(t)$  ne dépend pas de  $t$ , on dit qu'il s'agit d'un système à coefficients constants.

### Exemple (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} y_1' = a y_1 - b y_1 y_2 & a, b, c, d > 0 \\ y_2' = -c y_2 + d y_1 y_2 \end{cases}$$

Attention: ce système différentiel n'est pas linéaire.

### II. Exponentielle de matrice:

#### i) Norme matricielle

Soit  $E = \mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

On note  $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$  pour  $x \in \mathbb{C}^n$   $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$   $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Ce sont trois normes sur  $\mathbb{C}^n$ , qui sont équivalentes.

On fixe  $\|\cdot\|$  parmi ces 3 normes

DEF: Pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , je note  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

PROP: L'application  $M: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $M(A) = \|A\|$  est une norme.

On a de plus  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Enfin,  $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$  est un evn complet de dimension  $n^2$  comme espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$

REM: \*  $\|A\| = \sup \|Ax\| < +\infty$

\*  $N$  est une norme (facile)

$$* \|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$$

or  $\|ABx\| = \|Ay\|$  où  $y = Bx$

Il suffit donc de ma  $\|Ay\| \leq \|A\| \|y\|$  puisqu'alors  $\|ABx\| = \|Ay\| \leq \|A\| \|y\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$

Ce qui donne, pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$$

Comme  $\forall y \neq 0$ ,  $\frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \|A\|$  (sup), on a bien  $\|Ay\| \leq \|A\| \|y\| \forall y \neq 0$

Cette ineq est aussi vraie pour  $y=0$

## Systèmes différentiels linéaires

## I. Exponentielle d'une matrice

- 1) Normes matricielles
- 2) Définitions, exemples.

**PROP:** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn complet. Si la série de terme général  $u_n$  converge absolument, alors elle converge  $\sum \|u_n\|$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge

**DEF:** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$

On note  $e^A = \exp(A)$  la somme de la série absolument convergente  $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

**PREUVE:** (de la série est absolument convergente.)

$$\frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$$

↑ car on a choisi une norme matricielle

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{\|A^n\|}{n!}$  est majorée par la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$  avec  $r = \|A\|$

C'est la valeur en  $\|A\|$  de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$  dont le rayon de convergence est  $+\infty$ .

Au passage,  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

**Ex:**  $A = 0$  (la matrice nulle)

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{0^n}{n!} = I + 0 = I$$

par convention,  $0^0 = I$

\* Soit  $A$  une matrice diagonalisable

Il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  telles que  $A = PDP^{-1}$

On veut calculer  $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$

$$\text{or } A^k = (PDP^{-1})^k$$

$$A^0 = I, \quad A^1 = PDP^{-1}, \quad A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Par récurrence,  $A^k = PD^kP^{-1}$

$$e^A = \sum_{k \geq 0} PD^kP^{-1} = P \left( \sum_{k \geq 0} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}$$

$$\text{De plus, } e^D = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

\* Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

Cette matrice n'est pas diagonalisable. Néanmoins, on peut calculer son exponentielle :

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc  $A^k = 0$  pour tout  $k \geq 2$

$$\text{Ainsi, } e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**DEF:** Soit  $N \in M_n(\mathbb{C})$ . On dit que  $N$  est nilpotente d'ordre  $p \in \mathbb{N}$  lorsque :

$$N^p = 0 \text{ et } N^{p-1} \neq 0$$

$$\text{alors } e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} \text{ (somme finie)}$$

**IDÉE:** On essaye d'écrire  $A = \Delta + N$  avec  $\Delta$  diagonalisable,  $N$  nilpotente

attention:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Essayons } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mais } e^A = e^{\Delta+N} \neq e^{\Delta} e^N$$

le problème, c'est que  $\Delta N \neq N \Delta$ , et donc  $e^{\Delta+N} \neq e^{\Delta} e^N$

{ Ici, la bonne décomposition est  $A = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonalisable}}}{A} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{nilpotente}}}{N}$



**PROP:** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Si  $A$  et  $B$  commutent ( $AB=BA$ ), alors  $e^{A+B} = e^A e^B$

**PREUVE:** D'après la formule du binôme de Newton, puisque  $A$  et  $B$  commutent, on a

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$$

$$= k! \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$$

$$\text{or } e^{A+B} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!}$$

$n=k-j$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \frac{B^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{B^n}{n!} \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j!} = e^A e^B$$

### 3) Décomposition de Jordan-Chevalley

**PROP:** Soit  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application linéaire. Il existe un unique couple  $(d, n)$  d'applications linéaires telles que

- i)  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotente
- ii)  $d$  et  $n$  commutent
- iii)  $f = d + n$

(On trouve aussi le nom de Décomposition de Donford)  
 La preuve de ce théorème repose sur le lemme des noyaux

**DEF:** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , et  $p_A(x)$  son polynôme caractéristique ( $p_A(x) = \det(A - xI)$ )  
 - On dit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $A$  lorsque  $p_A(\lambda) = 0$ . La multiplicité algébrique de  $\lambda$  est l'ordre de  $\lambda$  comme 0 de  $p_A$ .  

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_{j=1}^d (x - \lambda_j)^{m_j}$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  sont les valeurs propres distinctes de  $A$   
 $m_j$  est la multiplicité algébrique (m. a.) de  $\lambda_j$ .

- Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(A - \lambda_j I)$  est le sous-espace propre associé à  $\lambda_j$   
 Ses éléments non-nuls sont les vecteurs propres de  $A$  associés à  $\lambda_j$ .

**PROP:** Si  $\dim E_j = m_j$ , alors  $A$  est diagonalisable.

**PREUVE:** Soit  $(e_1^j, \dots, e_{m_j}^j)$  une base de  $E_j$   
 Pour  $x \in E_j$ ,  $A(x) = A\left(\sum_{k=1}^{m_j} x_k e_k^j\right)$   

$$= \sum_{k=1}^{m_j} x_k A(e_k^j) = \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_j x_k e_k^j = \lambda_j x$$

Soit alors  $B = \bigcup_{j=1}^d B^j = (e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2, \dots)$

$B$  contient  $m_1 + m_2 + \dots + m_j$  vecteurs indépendants. Or  $m_1 + m_2 + \dots + m_d = \deg p_A = n$   
 donc  $B$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ . ( $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^d E_j$ )

De plus,  $\text{Mat}_{B \leftarrow B} A = \begin{pmatrix} A e_1^1 & A e_{m_1}^1 & \dots & A e_1^d & \dots & A e_{m_d}^d \\ \lambda_1 & & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_d \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_d \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_d \end{pmatrix} \begin{matrix} \beta \\ e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_{m_1}^1 \\ \vdots \\ e_1^d \\ \vdots \\ e_{m_d}^d \end{matrix}$

Ce qui prouve que  $A$  est diagonalisable.

**REM:** on voit en particulier que  $m_j = \dim E_j \leq m_j$  pour  $j = 1, \dots, d$

**DEF:** La multiplicité géométrique  $\mu_j$  de  $\lambda_j$  est la dimension de  $E_j$

**DEF:** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  ses valeurs propres (2 à 2 distinctes  $d \leq n$ )

On appelle sous-espace propre généralisé associé à  $\lambda_j$  le  $G_j = \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}$ ,  $\dim G_j = m_j$   
 caractéristique

**PROP:** (Lemme des noyaux)

$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^d G_j$ . Il suffit donc d'étudier  $A|_{G_j}$  pour chaque  $j \in \{1, \dots, d\}$

**exemple:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$

son polynôme caractéristique est  $p_A(x) = ((x-1)^2 + 1)^2 = (x - (1-i))^2 (x - (1+i))^2$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc  $\lambda_1 = 1+i$ ,  $\lambda_2 = 1-i$   $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 2$ .

→ Les sous-espaces propres associés sont

$$E_1 = \text{Vect}(e_1^1 = (1, 0, -i, 0))$$

$$E_2 = \text{Vect}(e_1^2 = (1, 0, i, 0))$$

En particulier,  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 1$ . Donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

$$\text{Soit } G_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$$

$$G_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)^2$$

Les sous-espaces caractéristiques associés

$$* \text{ On sait que } e_i^j \in G_j \quad (A - \lambda_j I)^2 e_i^j = (A - \lambda_j I) \underbrace{(A - \lambda_j I) e_i^j}_0 = 0$$

(en fait,  $E_j \subset G_j$  toujours) @@

Je cherche  $v_i$ , indépendant de  $e_i^j$  appartenant à  $G_j$

$$\text{Je résous } (A - \lambda_1 I) v_1 = e_1^1$$

$$\rightarrow (A - \lambda_1 I)^2 v_1 = (A - \lambda_1 I) e_1^1 = 0$$

→ De plus, si  $v_1 = \alpha e_1^1$  on a  $e_1^1 = (A - \lambda_1 I) v_1 = (A - \lambda_1 I)(\alpha e_1^1) = \alpha \cdot 0$  absurde.

$$v_1 = (0, 1, 0, -i)$$

De même,  $(e_1^2, v_2)$  est une base de  $G_2$  où  $v_2 = (0, 1, 0, i)$

$$* \text{ Mat}_{(e_1^1, v_1)} A|_{G_1} = \begin{pmatrix} Ae_1^1 & Av_1 \\ \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1^1 \\ v_1 \end{matrix}$$

$$\text{De même, } \text{Mat}_{(e_1^2, v_2)} A|_{G_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{(e_1^1, v_1, e_1^2, v_2)} A = \left( \begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} N^4 = 0 \\ N, D \text{ commutent} \end{matrix}$$

## II. Espaces des solutions d'un système linéaire

### 1) Définitions:

**DEF:** Un système différentiel d'ordre 1 s'écrit  $Y' = F(t, y)$  (\*)

où  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$ , avec  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U \subset \mathbb{R}^n$ , est une application continue.

De plus,  $F(t, x) = A(t)X + B(t)$ , avec  $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ ,  $B: I \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $B \equiv 0$ , on dit que le système linéaire est homogène.

Résoudre le système, c'est trouver tous les couples  $(J, y)$  où  $J \subset I$  est un intervalle et  $y: J \rightarrow \mathbb{C}^n$  de classe  $C^1$  telle que

$$\text{i) } \forall t \in J, y(t) \in U$$

$$\text{ii) } \forall t \in J, y'(t) = F(t, y(t))$$

**Remarque:**  $y: J \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  avec  $y_j: J \rightarrow \mathbb{C}$  et  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

(\*) s'écrit 
$$\begin{cases} y_1' = F_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = F_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + B(t)$$

### 2) Théorème de Cauchy-(Lipschitz) linéaire:

**PROP:** Soit  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application affine continue

Soit  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in U$ . Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

admet une unique solution maximale  $(J, y)$ . De plus, elle est globale ( $J=I$ )

### PROP: [Thm du point fixe de Picard-Banach]

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé complet

Soit  $f: E \rightarrow E$  une application contractante:

$$\text{il existe } K \in [0, 1[ \text{ tq } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E$$

Alors  $f$  admet un unique point fixe dans  $E$ .

il existe un unique  $\tilde{x} \in E$  tq  $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$

à connaître?

**preuve:** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  la suite définie par:

$$\begin{cases} x_0 = e \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

→ Supposons que  $(x_n)_n$  cv vers un certain  $\ell \in E$ . Comme  $f$  est continue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = f(\ell), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \ell$$

Dans ce cas,  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

→ On mq  $(x_n)_n$  converge. On va mq  $(x_n)$  est une SDC.

$$(*) \text{ On a } x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1$$

$$\text{Donc } \|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq K \|x_n - x_{n-1}\|$$

$$\text{Par récurrence, on obtient } \forall n \geq 0, \|x_n - x_{n-1}\| \leq K^{n-1} \|x_1 - x_0\|$$

\* Soit  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $p < q$ .

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= \|x_p - x_{p-1} + x_{p-1} - x_{p-2} + \dots + x_{q+1} - x_q\| \\ &\leq \|x_p - x_{p-1}\| + \|x_{p-1} - x_{p-2}\| + \dots + \|x_{q+1} - x_q\| \\ &\leq (K^{p-1} + K^{p-2} + \dots + K^q) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq K^q \frac{1 - K^{p-q}}{1 - K} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{K^q}{1 - K} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tq  $p > q \geq N$ , alors  $\frac{k^q}{k^p} \leq \frac{\varepsilon}{k}$  donc  $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$   
 La suite  $(x_n)$  est bien une SDC de  $E$ . Elle cv donc vers un point fixe de  $f$ .

→  $f$  ne peut pas avoir deux points fixes distincts.

Si non soit  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 \neq x_2$  et  $f(x_1) = x_1$ ,  $f(x_2) = x_2$ .

$$\text{On a } \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|$$

c'est absurde.

### Preuve du théorème de Cauchy linéaire

\* ON transforme l'équation différentielle en sa forme intégrale,  $(J, \gamma)$  est une solution du problème de Cauchy (3)

ssi  $\gamma: J \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une fonction continue qui vérifie (2) alors  $\gamma$  est dérivable et  $\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + B(t)$ .

De plus,  $\gamma(t_0) = X_0$ .

Réciproquement, si  $(J, \gamma)$  vérifie (3) alors  $\gamma \in C^1$ , donc  $\gamma'$  est continue et

$$\int_{t_0}^t \gamma'(s) ds = \int_{t_0}^t A(s)\gamma(s) + B(s) ds$$

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma(t) - X_0$$

\* Soit  $(\gamma_n)_n$  la suite de fonctions définie par

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = X_0 \\ \gamma_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A(s)\gamma_n(s) + B(s) ds \end{cases}$$

On note que les  $\gamma_n \in C^0([a, b], \mathbb{C}^d)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , à condition que  $t_0 \in [a, b] \subset I$ .

On se souvient que  $C^0([a, b], \mathbb{C}^d)$  est un espace vectoriel normé complet pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

→ Supposons que  $(\gamma_n)$  converge vers une fonction  $\gamma$  sur  $J \subset I$

Alors  $\forall t \in J$ .

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}(t) &= X_0 + \int_{t_0}^t A(s)\gamma_n(s) + B(s) ds \\ \downarrow & \\ \gamma(t) &= X_0 + \int_{t_0}^t A(s)\gamma(s) + B(s) ds \end{aligned}$$

à condition que  $(\gamma_n) \rightarrow \gamma$  uniformément sur  $J$ .

De plus dans ce cas  $\gamma$  est continue.

→ On travaille pour l'instant dans  $J = [t_0, T]$ , Je suppose d'ailleurs que  $t_0 = 0$ .

Donc  $J = [0, T]$ .

On pose  $\omega_n = \gamma_n - \gamma_m$  pour toute  $n \geq 1$

$$\omega_1(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t) = \gamma_1(t) - X_0 = \int_0^t A(s)\gamma_0(s) + B(s) ds$$

$$\text{donc } \|\omega_1(t)\| \leq \int_0^t \|A(s)\gamma_0(s) + B(s)\| ds$$

$$\leq \underbrace{t \sup_{s \in [0, T]} \|A(s)\gamma_0 + B(s)\|}_{= M < +\infty}$$

$$\bullet \omega_2(t) = (\gamma_2 - \gamma_1)(t) = X_0 + \int_0^t A(s)\gamma_1(s) + B(s) ds - \left( X_0 + \int_0^t A(s)\gamma_0(s) + B(s) ds \right)$$

$$= \int_0^t A(s)(\gamma_1(s) - \gamma_0(s)) ds$$

$$= \int_0^t A(s)\omega_1(s) ds$$

$$\begin{aligned} \text{En particulier, } \|\omega_2(t)\| &\leq \sup_{s \in [0, t]} \|A(s)\| \times \int_0^t \|\omega(s)\| ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, T]} \|A(s)\| \int_0^t M ds \\ &\leq \hat{A} \overset{\curvearrowright}{=} M \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient

$$\|\omega_{n+1}(t)\| \leq \hat{A}^n M \frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{Finalement } \|\omega_{n+1}\|_{\infty} \leq \hat{A}^n M \frac{T^n}{n!} \text{ sur } [0, T]$$

Donc la série  $\sum \omega_n(t)$  converge normalement sur  $[0, T]$  car  $M \sum \frac{(\hat{A}T)^n}{n!} < +\infty$ .

En particulier cette série converge. Or  $\sum_{n=1}^N \omega_n = \sum_{n=1}^N y_n - y_{n-1} = y_N - y_0 \underset{y_0 \geq 0}{\geq} 0$

Ainsi,  $(y_n)$  cv uniformément sur  $[0, T]$ , et sa limite  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}^d$  est une solution de (2), donc de (3)

\* Je vais construire une solution globale de (3)

→ On peut aussi construire une solution sur  $[-T, 0]$  pour tout  $T$  tq  $[-T, 0] \subset I$ .

Par recollement, on sait donc construire une solution  $y$  sur  $[T_*, T^*]$  pour  $T_*, T^*$  tels que  $[T_*, T^*] \subset I$

On a  $I = \bigcup_{T_*, T^*} [T_*, T^*]$  ( $\forall t \in I, \exists T_*, T^*$  tq  $T_* \leq t \leq T^*$  et  $[T_*, T^*] \subset I$ )

Soit  $\hat{y} : I \rightarrow \mathbb{C}^d$  définie par  $\hat{y}(t) = y^*(t)$  où  $*$  est choisi de sorte que  $t \in [T_*, T^*]$ .

Cette fonction  $\hat{y}$ , n'est défini qu'à condition que le choix de  $[T_*, T^*]$  contenant  $t$  ne change pas

la valeur de  $y^*(t)$ . Si c'est bien le cas,  $\hat{y}$  est continue sur  $I$  et vérifie (2) sur  $I$ . C'est donc une solution de (3).

\* unicité locale: si  $y_1^*$  et  $y_2^*$  sont des solutions de (2) sur  $J$  avec  $y_1^*(t_0) = y_2^*(t_0)$  en un  $t_0 \in \delta$ ,

alors  $y_1^* = y_2^*$ . En effet,

$$y_1^*(t) = x_0 + \int_0^t A(s) y_1^*(s) + B(s) ds$$

$$y_2^*(t) = x_0 + \int_0^t A(s) y_2^*(s) + B(s) ds$$

$$\Rightarrow (y_1^* - y_2^*)(t) = \int_0^t A(s) (y_1^*(s) - y_2^*(s)) ds$$

$$\Rightarrow \|y_1^* - y_2^*(t)\| \leq \frac{\hat{A}^{n-1} \|y_1^*(t) - y_2^*(t)\|}{n!}$$

c'est absurde puisque  $\frac{\hat{A}^{n-1}}{n!} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$

2<sup>e</sup> preuve: Avec le thm du point fixe

$E = C^0([0, T], \mathbb{C}^d)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ . C'est un espace de Banach.

Soit  $\phi : E \rightarrow E$  l'application définie par  $\phi(y) = z$  ou  $z(t) = y_0 + \int_0^t A(s)y(s) + B(s) ds$

→  $\phi$  admet une itérée contractante: il existe un  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi^p = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$  est contractante.

En effet,  $\|\phi^p\| \leq \frac{\hat{A}^{p-1} M}{p!}$

$$< 1 \text{ pour } p \text{ assez grand}$$

→ Par le thm du point fixe,

$\phi^p$  admet un unique point fixe  $\hat{y} \in E$

Rem:  $\phi^{p+1}(\hat{y}) = \phi^p(\phi(\hat{y}))$

$$\phi(\phi^p(\hat{y})) = \phi(\hat{y})$$

Donc  $\phi(\hat{y})$  est un point fixe de  $\phi^p$ : c'est  $\hat{y}$ .

Ainsi, on a  $\phi(\hat{y}) = \hat{y}$ . Donc  $\hat{y}$  est solution de (3)

### 3) Structure de l'espace des solutions

PROP: Soit  $Y' = F(t, y)$  un système linéaire d'ordre 1 avec  $F(t, y) = A(t)y + B(t)$

i) l'ensemble  $S_0$  des solutions du système homogène associé est un sev de dim  $n$  de  $C^1(I)$

ii) L'ensemble des solutions de  $Y' = A(t)Y$

$$\begin{aligned} * \text{ Si } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, Y_1, Y_2 \in S_0, \text{ alors } (\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)' &= \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2' = \lambda_1 A(t)Y_1 + \lambda_2 A(t)Y_2 \\ &= A(t)(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) \end{aligned}$$

donc  $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \in S_0$

\* La fonction nulle est dans  $S_0$

$S_0$  est bien sev de  $C^1$

\* D'après le thm de Cauchy, un elt de  $S_0$  est entièrement caractérisé par la donnée de  $y_0 \in \mathbb{C}^n$

## Chapitre 3: Méthodes numériques de résolution d'ED

(2 cours examen, une semaine vacances, une semaine annulée)

Pb: Il est impossible en général d'écrire "explicitement" les solutions d'ED (sauf linéaires à coeff constants)Idee: trouver un moyen d'obtenir des "solutions approchées"I. Méthode d'Euler explicite1) PrincipeOn cherche des solutions approchées du problème de Cauchy  $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$  (P)On suppose  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f \in C^1$  sur  $I \times U$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle et  $U \subset \mathbb{R}$ . Du coup (P) admet une unique solution maximale  $(J, y)$ .On sait que:  $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$ 

donc  $\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Problème 1: Comment calculer "numériquement" une intégrale.Idee: (Intégrale de Riemann): On découpe l'intervalle  $[t_0, t]$  en  $N$  sous-intervalles de largeur

$$h = \frac{t - t_0}{N}. \text{ On pose } t_n = t_0 + nh = t_{n+1} - h$$

Ensuite on calcule  $f(t_n, y(t_n))$  et on pense que  $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \sim \sum_{n=0}^{N-1} h f(t_n, y(t_n))$ Problème 2: Pour calculer  $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ , il faut connaître  $y$ . Mais  $y$  est ce que l'on veut calculer!Idee 2: On procède de proche en proche:→ on connaît  $y(t_0) = x_0$ . On pose  $y_0 = y(t_0)$ . Ensuite on pose:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \sim y_n + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(s, y(s)) ds$$

$$= y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n)$$

Attention: il y a deux sources d'erreurs① On a remplacé  $f(s, y(s))$  par la constante  $f(t_n, y_n)$  sur  $[t_n, t_{n+1}]$ ②  $y_n$  n'est pas égale à  $y(t_n)$ 

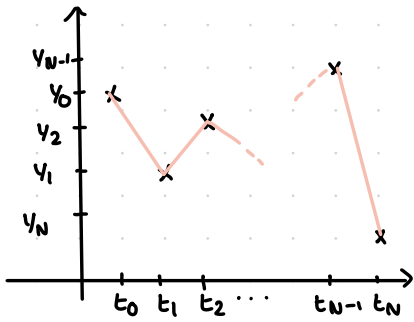
L'algorithme

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \end{cases}$$

est appelé schéma d'Euler explicite.

Question: est-ce que ça marche?Ce schéma produit une suite finie de nombres  $(y_0, y_1, \dots, y_N)$  qu'on espère être des valeurs approchées respectives de  $(y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N) = y(t))$

Cela correspond à la construction d'une fonction affine par morceaux  $y_{\text{app}}^N : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par.



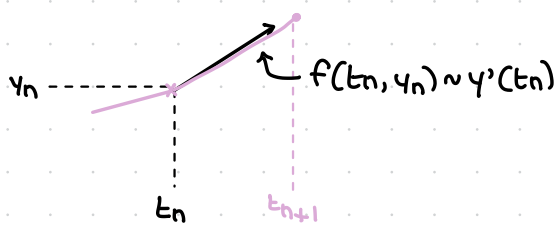
Question: est ce que  $y_{\text{app}}$  a quelque chose à voir avec la solution  $y$ ?

Figure: à gauche:  $\begin{cases} y' = y & \text{solution } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y(0) = 1 & t \mapsto e^t \end{cases}$

à droite:  $N=3$

ça a l'air de converger quand  $N \rightarrow +\infty$

Rq: Dans la formule  $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$   
le terme  $f(t_n, y_n)$  ressemble à  $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$   
Or  $y'(t_n)$  est la pente de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $t_n$ .



Donc le schéma d'Euler est aussi une méthode géométrique de construction des  $y_n$ .

De manière générale, on appelle schéma numérique d'ordre 1 tout algorithme de la forme:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Par exemple, Euler explicite correspond à  $\Phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_n, y_n)$

→ à un pas: le calcul de  $y_{n+1}$  ne dépend que de  $(t_n, t_{n+1})$   $y_n$

→ explicite: quand  $\Phi$  ne dépend pas de  $(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$   
sinon, on parle de schéma implicite.

Par exemple: Euler implicite

$$y_{n+1} \sim y_n + h \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $f(t_n, y(t_n))$   $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

Ce choix conduit au schéma:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (\text{Euler implicite})$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 connu connu connu

Ici, le calcul de  $y_{n+1}$  demande la résolution de cette équation.

$$\Phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

## II. Notion de convergence d'un schéma

### 1) Erreur de convergence

On suppose connus:

$$\rightarrow N \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow [t_0, t]$$

$$\rightarrow h^N = \frac{t - t_0}{N} = h$$

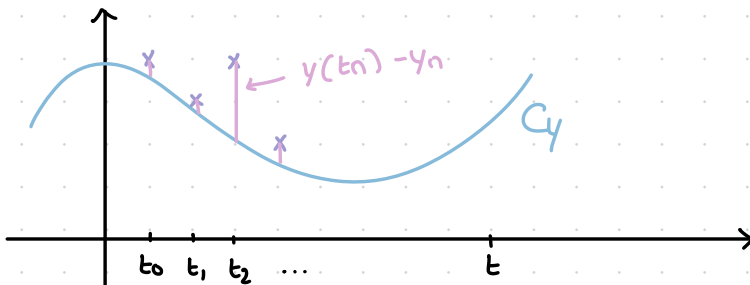
$$\rightarrow \phi(t_n, y_n)$$

On cherche une solution approchée du problème de Cauchy  $\begin{cases} y' = f(t, y) & (P) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

**DEF:** Soit  $(\mathcal{J}, y)$  la solution maximale de (P). On suppose que  $[t_0, t] \subset \mathcal{J}$ .

Soit  $(y_n)$  la suite de nombres obtenus par le schéma:  $\begin{cases} y_0 = x_0 & (S) \\ y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n) \end{cases}$

On appelle erreur de convergence de la méthode le nombre  $e(h) = \max \{ |y_n - y(t_n)| ; n \in \{0, \dots, N\} \}$ .



On dit que la méthode converge lorsque  $e(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  (i. e. quand  $N \rightarrow +\infty$ ).

**Attention!**  $e(h)$  est un objet théorique. Pour calculer  $e(h)$ , il faut connaître  $y$ , ce que l'on cherche à approcher.

### 2) Erreur de consistance

Peter Lax

**Ideé:** mesurer l'erreur commise par le schéma lorsqu'on remplace  $f(s, y(s))$  par  $\phi(t_n, y_n)$

**DEF:** Soit  $(\mathcal{J}, y)$  la solution de (P). On appelle "erreur de consistance pour le schéma (S) à l'étape n relative à la solution y" le nombre:

$$E_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$$

**REM:**  $E_n(h)$  ne peut pas être calculée si on ne connaît pas  $y$ .

$E_n(h)$  ne dépend pas de  $y_n$ .

**REM:**  $E_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$  (Euler)

$$\begin{aligned} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(s) ds - (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n)) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_n, y(t_n)) ds \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(s, y(s)) - f(t_n, y(t_n))] ds \end{aligned}$$

$\uparrow \phi$

erreur de consistance  $\sim$  méthode de calcul approchée choisie pour  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$

**DEF:** On appelle erreur de consistance globale la quantité  $\mathcal{E}(h) = \sum_{n=0}^{N-1} |\mathcal{E}_n(h)|$

**PROP:** Pour la méthode d'Euler explicite, on a  $\mathcal{E}(h) = O(h)$  quand  $h \rightarrow 0$  pour  $f \in C^1$

**DEF:** Si pour le schéma (S) on trouve  $\mathcal{E}(h) = O(h^p)$

On dit que (S) est une méthode d'ordre  $p$ .

**Par exemple:** Euler explicite est d'ordre 1

**Preuve:** On a vu que  $\mathcal{E}_n(h) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) - f(t_n, y(t_n)) ds$   
 $= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(s) - y'(t_n)) ds$

Or puisque  $f \in C^1$  et  $y(t) = f(t, y(t))$ , la fonction  $y$  est automatiquement  $C^2$ .

Je peux donc appliquer le TAF à  $y'$  sur  $[t_n, t_{n+1}]$ :  $|y'(t) - y'(t_n)| \leq |t - t_n| \sup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)|$

$$\begin{aligned} \text{Donc } |\mathcal{E}_n(h)| &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} |y'(s) - y'(t_n)| ds \\ &\leq |t_{n+1} - t_n|^2 \sup_{[t_n, t_{n+1}]} |y''(s)| \\ &\leq Ch^2 \text{ avec } C = \sup_{[t_0, t]} |y''(s)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin } \mathcal{E}(h) &= \sum_{n=0}^{N-1} |\mathcal{E}_n(h)| \\ &\leq Ch^2 \sum_{n=0}^{N-1} 1 \leq CNh^2 \\ &\leq C \frac{(t - t_0)}{h} h^2 \leq Mh \text{ où } M = C|t - t_0| \end{aligned}$$

### 3) Stabilité:

**QU:** Comment se comporte la suite  $(y_n)$  produite par le schéma (S) lorsqu'on modifie (légèrement) la donnée  $y_n$  pour calculer  $y_{n+1}$ ?

Essentiellement, on veut voir quel erreur on commet quand on remplace  $y(t_n)$  par  $y_n$  dans  $y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)$

Pour comprendre le phénomène, on introduit:

$$\begin{aligned} [y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) && \leftarrow \text{schéma d'Euler} \\ [z_{n+1} &= (z_n + \delta_n) + hf(t, z_n) && \leftarrow \text{schéma d'Euler perturbé} \end{aligned}$$

**DEF:** s'il existe une constante  $c > 0$  et un réel  $h_0 > 0$  tels que  $\forall y_0, z_0, \forall (\delta_n)$  on a:

$$|z_n - y_n| \leq c(|z_0 - y_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\delta_k|)$$

On dit que le schéma est stable.

**PROP:** si (S) est stable et consistant d'ordre  $p$ , alors  $e(h) = O(h^p)$

"consistance + stabilité  $\Rightarrow$  convergence" (Lax)

PROP: Si  $(S)$  est stable et consistant d'ordre  $p$ , alors  $e(h) = \mathcal{O}(h^p)$

"consistance + stabilité"  $\Rightarrow$  "convergence" (Lax)

Sous l'hypothèse suivante:

(H) La fonction  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^r$  est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable uniformément par rapport à la première, c.à.d.:

$\exists K > 0$  telle que

$$\forall x_1, x_2 \in U, \forall t \in I \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

$\uparrow$  indépendant de  $t$

Rq: si  $f$  est  $C^1(I \times U)$ , alors pour tout compact  $K \subset I$ ,  $f$  est LIU<sup>1</sup> sur  $K \times U$

preuve: Soit  $I + N \in \mathbb{N}^*$  fixé le nombre de termes de la suite.

Soit aussi  $n \leq N-1$

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - y_{n+1}| &= |[z_n + \delta_n + hf(t_n, z_n)] - [y_n + hf(t_n, y_n)]| \\ &\leq |z_n - y_n| + |\delta_n| + |h(f(t_n, z_n) - f(t_n, y_n))| \\ &\leq |z_n - y_n| + |\delta_n| + Kh|z_n - y_n| \\ &\leq (1+hK)|z_n - y_n| + |\delta_n| \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient:

$$\text{pour tout } n \leq N, \quad |z_n - y_n| \leq (1+hK)^n |z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^{n-1} (1+hK)^{n-m} |\delta_m|$$

$$\text{or } (1+hK)^p = e^{p \ln(1+hK)} \leq e^{phK}$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient donc: } |z_n - y_n| &\leq e^{NKe} \left( |z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^n |\delta_m| \right) \\ &\leq e^{K(t-t_0)} \left( |z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^n |\delta_m| \right) \end{aligned}$$

$\uparrow$   
C

Cela prouve la stabilité du schéma d'Euler sous l'hypothèse (H)

Remarque: La constante  $C$  est d'autant plus mauvaise que l'intervalle  $[t_0, t]$  sur lequel on veut approcher la solution est grand.

\* Preuve du théorème de Lax:

On suppose que l'hypothèse (H) est satisfaite.

On a  $\varepsilon_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$

Je définis la suite  $z_n$  comme ci-dessus en prenant  $\delta_n = \varepsilon_n$ , autrement dit:

$$z_{n+1} = z_n + \varepsilon_n + hf(t_n, z_n), \quad z_0 = y_0$$

$$\text{On vient de voir que } |z_n - y_n| \leq \underbrace{C}_{=0} \underbrace{\left( |z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^{n-1} |\varepsilon_m| \right)}_{\leq cte \cdot h} \leq \tilde{C} h$$

$$\text{car } \varepsilon(h) = \sum |\varepsilon_m(h)| = \mathcal{O}(h)$$

$$\text{Ainsi, } e(h) = \max_m |y_m - y(t_m)| = \mathcal{O}(h)$$

### III. Limitations

On se concentre sur la méthode d'Euler explicite.

\* **Attention:** méthode d'ordre 1: il faut multiplier le nombre de pas  $N$  par 10 pour améliorer la précision d'un facteur  $1/10$ .

\* **Instabilité pour les temps grands.**

Sur un exemple:  $\begin{cases} y' = -ay & \text{avec } a, x_0 > 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$

La solution est  $y(t) = x_0 e^{-at}$ :  $y(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $y(t) > 0$ .

→ Le schéma d'Euler pour ce pb s'écrit:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n - ah y_n = (1-ah)y_n \end{cases}$$

On trouve  $y_n = (1-ah)^n x_0$ . Pour  $ah > 2$ ,  $|1-ah| > 1$

Donc  $|y_n| \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (si  $h > 1/a$ ,  $< 0$  pour  $n$  impair,  $> 0$  pour  $n$  pair or on approxime  $y$  tout le temps  $> 0$ .)

L'approximation de  $y(t_n)$  par  $y_n$  est forcément très mauvaise pour  $n$  grand.

Pour qu'il y ait une chance que ça marche, il faut prendre  $h$  tel que  $h \leq \frac{2}{a}$ . Pour  $a$  grand, cela veut dire un  $N$  grand.

\* **Exemple 2:**  $\begin{cases} y' = -3y + 1 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$

La solution est  $y(t) = \frac{1}{3} + (x_0 - \frac{1}{3})e^{-3t}$

→ En particulier, pour  $x_0 = 1/3$ , la solution est la fonction  $y_0: t \mapsto 1/3$ , constante.

→ Le schéma d'Euler s'écrit:  $\begin{cases} y_0 = x_0 = 1/3 \\ y_{n+1} = y_n + h(-3y_n) \end{cases} \rightarrow y_{n+1} = y_n$

Maissi  $x_0 = 1/3 + \delta$  (erreur de concature)

On trouve

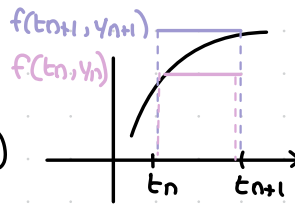
$$y_n = 4^n \delta + 1/3$$

erreur exponentiellement quand  $n$  grand

Donc  $|y_n - y_n^{\text{sol}}| = 4^n \delta \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$

### 2) Essayons Euler implicite

Le schéma d'Euler implicite est  $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$  (\*)



On rappelle que le calcul de  $y_{n+1}$  nécessite la résolution d'une équation (numérique). (ex: méthode de Newton)

(\*) **Exemple:**  $y' = a(t)y + b(t)$ ,

(\*) devient  $y_{n+1} = y_n + h(a(t_{n+1})y_{n+1} + b(t_{n+1}))$

$$\Leftrightarrow y_{n+1}(1 - ha(t_{n+1})) = y_n + hb(t_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{y_n + hb(t_{n+1})}{1 - ha(t_{n+1})} \quad (a(t_{n+1}) \neq 1/h)$$

En particulier, pour l'équation  $y' = -ay$ , on obtient :

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1+ha}$$

Par récurrence, on obtient  $y_n = \frac{1}{(1+ah)^n} x_0$

Comme  $1+ah > 1$ , on voit que  $y_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Dans ce cas, la méthode d'Euler implicite est 'bien meilleure' que la méthode d'Euler explicite.

**Argument contre Euler implicite:** il faut aussi programmer une méthode (rapide!) de résolution numérique, par exemple, la méthode de Newton.

CCL: EI et EE sont relativement faciles à programmer, mais un peu lente. En tous cas, aucune des deux ne peut remplacer totalement l'autre.

#### IV. Méthodes de Runge-Kutta explicites

On cherche une solution approchée pour le pb de Cauchy: 
$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est aussi solution de l'équation:

$$\forall t \in [t_0, T], y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

On veut calculer de manière approchée l'intégrale (sans oublier que dans cette intégrale figure l'inconnue  $y$ !)

Ideé: Pour calculer l'intégrale  $\int_0^1 g(u) du$ , on essaye une formule (de quadrature) de la forme :

$$\int_0^1 g(u) du \sim \sum_{j=1}^k b_j g(c_j)$$

avec  $b_j$  des coefficients, et  $c_j$  des points de  $[0, 1]$ .

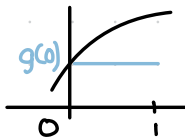
Il y a 3 paramètres à fixer :

- le nb de points
- les  $b_j$  = les poids
- les  $c_j$  = les points d'interpolation

**Attention:** tous les choix ne sont pas judicieux.

Ex:  $k=1, c_1=0, b_1=1$

$$\int_0^1 g(u) du \sim 1 \cdot g(0)$$



Ce correspond à la méthode des rectangles à gauche  $\rightarrow$  EE

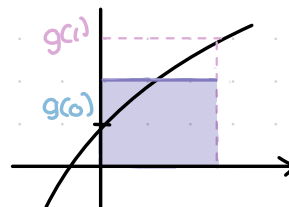
$$k=1, c_1=1, b_1=1 \int_0^1 g(u) du \sim 1 \cdot g(1)$$

méthode des rectangles à droite  $\rightarrow$  EI

#### 1) Méthode de Heun

$k=2: c_1=0, c_2=1, b_1=b_2=1/2$  :

$$\int_0^1 g(u) du \sim b_1 g(c_1) + b_2 g(c_2) = \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$$



Le schéma correspondant s'écrit:  $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$

où  $\phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}$

Précisément,  $y_{n+1} = y_n + \frac{hf(t_n, y_n)}{2} + \frac{hf(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \quad \left( \frac{\epsilon\epsilon + \epsilon I}{2} \right)$

C'est un schéma implicite, qui porte le nom **Crank-Nicholson**.

On peut modifier ce schéma pour le rendre explicite.

On remplace le calcul direct de  $y_{n+1}$  par la formule:  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$

remplace par ce que l'on obtient avec la méthode d'EE:  
 $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

On obtient le schéma de **Heun**:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

Ce schéma est explicite.

Voici une manière de l'implémenter:

$$\begin{cases} p_1 = f(t_n, y_n) \\ p_2 = f(t_n + h, y_n + hp_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(p_1 + p_2) \end{cases}$$

**PROP:** Si  $f$  est  $C^2$  et  $L2U1$ , alors le schéma de Heun est convergent d'ordre 2!

**preuve:** On montre d'abord que ce schéma est stable.

Soit  $(y_n)$  et  $(z_n)$  les suites définies par:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\phi(t_n, y_n), \text{ où } \phi(t, x) = \frac{1}{2}f(t, x) + f(t+h, x + hf(t, x)) \\ z_{n+1} &= z_n + \delta_n + h\phi(t_n, z_n) \end{aligned}$$

On a:  $|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + |\delta_n| + h|\phi(t_n, y_n) - \phi(t_n, z_n)|$  (\*)

Mq  $\phi$  est  $L2U1$ : ( $t_1 = t_2$ )

$$|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_2, x_2)| \leq \frac{1}{2} |f(t_1, x_1) + f(t_1 + h, x_1 + hf(t_1, x_1)) - f(t_2, x_2) - f(t_2 + h, x_2 + hf(t_2, x_2))|$$

$$\leq \frac{1}{2} |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| + \frac{1}{2} |f(t_1 + h, x_1 + hf(t_1, x_1)) - f(t_2 + h, x_2 + hf(t_2, x_2))|$$

$f$   $L2U1$ :  $\leq \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} K|(x_1 + hf(t_1, x_1)) - (x_2 + hf(t_2, x_2))|$

$$\leq \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} K(|x_1 - x_2| + |h| |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)|)$$

$$\leq \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} hK^2|x_1 - x_2|$$

$$\leq (K + \frac{1}{2} hK^2) |x_1 - x_2| \leq \tilde{K} |x_1 - x_2|$$

De ce fait, (\*)  $\Rightarrow |y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + \delta_n + h\tilde{K} |y_n - z_n|$

$$\Rightarrow |y_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + h\tilde{K}) |y_n - z_n| + |\delta_n|$$

Par récurrence on obtient:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |y_n - z_n| \leq e^{n\tilde{K}(t-t_0)} (|z_0 - y_0| + \sum_{j=0}^{n-1} |\delta_j|)$

c.à.d. que le schéma de Heun est stable

2) Cas général

Idee: On part de  $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$

On veut calculer de manière approchée  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds = I_n$

On note que, en posant  $s = u(t_{n+1} - t_n) + t_n$

$$I_n = \int_0^1 f(t_n + u(t_{n+1} - t_n), y(t_n + u(t_{n+1} - t_n))) (t_{n+1} - t_n) du$$

$$= h \int_0^1 g(u) du$$

On a vu que l'on pouvait essayer de donner une valeur approchée des  $\int_0^1 g(u) du \approx \sum_{i=1}^q b_i g(c_i)$   
 avec  $q$ : nombre d'étages de la méthode  
 $b_i$ : poids de la méthode  
 $c_i$ : points

Une fois  $q, (b_i), (c_i)$  fixés on obtient le schéma:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i g(c_i) = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t_n + c_i h, \underbrace{y(t_n + c_i h)}_{\text{inconnu}})$$

or  $y(t_n + c_i h) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n + c_i h} f(s, y(s)) ds = y(t_n) + h \int_0^{c_i} f(t_n + hu, y(t_n + hu)) du$

On pose  $y_{n,i+1} = y_{n,i} + h \sum_{j=1}^q a_{i+1,j} f(t_n + hc_j, y_{n,j})$

Cela conduit à l'algorithme suivant:

$y_0 = x_0, t_0 = t_0$   
 Pour  $n \in \{0, \dots, N-1\}$   
    $t_{n+1} = t_n + h$   
    $t_{n,1} = t_n$   
    $p_{n,1} = f(t_{n,1}, y_n)$   
   Pour  $i \in \{1, \dots, q-1\}$   
      $t_{n,i+1} = t_n + hc_{i+1}$   
      $p_{n,i+1} = f(t_{n,i+1}, y_n) + h \sum_{j=1}^q a_{i+1,j} p_{n,j}$   
    $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i p_{n,i}$

Exemple la méthode de Heun

$y_0 = x_0, t_0 = t_0$   
    $p_0 = f(t_n, y_n) \leftarrow N=2$   
    $p_1 = f(t_n + h, y_n + hp_0)$   
    $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(p_0, p_1)$      $N=2 : 2 \text{ étages}$   
    $b_0 = 1/2 \quad b_1 = 1/2$

Exemple: la méthode d'EE

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

Chaque méthode Runge-Kutta peut être représentée par son tableau de Butcher:

$c_1 = 0$	$a_{2,1}$								
$c_2$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$							
$c_3$									
$c_q$	$a_{q,1}$	$a_{q,2}$					$a_{q,q-1}$	$a_{q,q}$	
	$b_1$	$b_2$	$b_3$				$b_{q-1}$	$b_q$	

$q \geq 2$

Cas Euler explicite:

$c_1 = 0$	
$c_2 = 1$	$a_{2,1} = 1$
	$b_1 = 1$

Cas de Heun:

$c_1 = 0$	
$c_2 = 1$	$a_{1,0} = 1$
	$b_1 = 1/2, b_2 = 1/2$

DEF: on appelle méthode Runge-Kutta d'ordre 4 le schéma qui correspond au tableau de Butcher

$c_0 = 0$				
$c_1 = 1/2$	$1/2$			
$c_2 = 1/2$		$1/2$		
$c_3 = 1$			$1$	
	$b_0 = 1/6$	$b_1 = 1/3$	$b_2 = 1/3$	$b_3 = 1/6$

$q = 4$  étages  $\sum b_j = 1$

Pour  $i = 0 \dots N-2$

$$p_1 = f(t[i], y[i])$$

$$p_2 = f(t[i] + h/2, y[i] + \frac{h}{2} p_1)$$

$$p_3 = f(t[i] + h/2, y[i] + \frac{h}{2} p_2)$$

$$p_4 = f(t[i] + h, y[i] + h p_3)$$

$$y[i+1] = y[i] + h \left( \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 + \frac{1}{6} p_4 \right)$$

PROP: Soit  $f$  une fonction  $C^1$ . On considère l'équation diff  $y' = f(t, y)$   
 Le schéma à un pas explicite  $y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, h)$  est consistant ssi  $\phi(t, x, 0) = f(t, x)$

PREUVE:  $E_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \phi(t_n, y(t_n), h)$ , où  $y$  est la solution du pb de Cauchy  
 En particulier  $y$  est  $C^2$ . On peut écrire  $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + o(h)$   
 Donc  $E_n(h) = h f(t_n, y(t_n)) + o(h) - h \phi(t_n, y_n, h)$   
 Ainsi  $E_n(h) = o(h)$  ssi  $f(t_n, y(t_n)) = \phi(t_n, y_n, 0)$

Conséquence par Runge-Kutta:

On a  $\phi(t_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^q b_i p_{n,i}(h)$  et pour  $h=0$   $p_{n,i}(h) = f(t_n, y_n)$

Donc RK est stable ssi  $f(t, x) = \phi(t, x, 0) = \sum_{i=1}^q b_i f(t, x)$   
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^q b_i = 1$

Remarque sur l'ordre des méthodes de RK

RK(q)  $\rightarrow$  consistant d'ordre  $q$  pour  $q \leq 4$   
 Mais, \* la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 a au moins 6 étages  
 \* \_\_\_\_\_ a au moins 21 étages  
 Attention l'ordre n'est pas égal au nombre d'étages (sauf 1, 2, 3, 4)

Ch 4 x

Ch 5) Comportement en temps long des solutions

On considère le problème de Cauchy  $\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = X_0 \end{cases}$  ; où  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $C^1$  ne dépend pas du temps.

On suppose que la solution maximale de ce problème est  $(\mathbb{R}, Y)$  :  $Y$  est défini pour tout  $t \geq 0$

Question: Que peut-on dire de  $Y(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ ?

Exemple: Système prédateur - proies (Lotka - Volterra)

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_1 y_2 \\ y_2' = -cy_1 + dy_1 y_2 \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, d > 0 \quad (P)$$

← sauridine  
+ requin

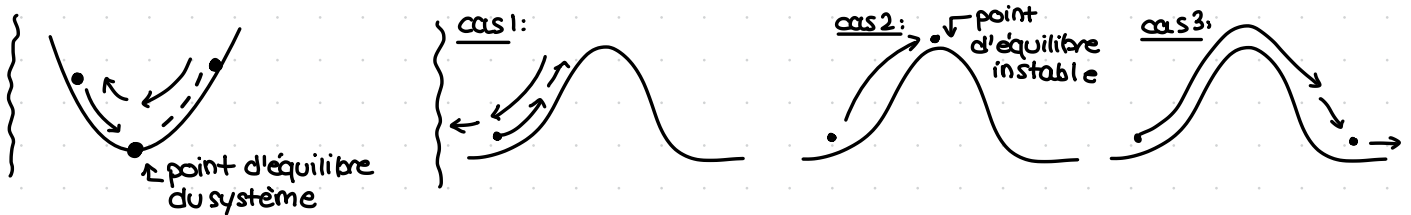
$y_1(t)$  = nombre de proies à l'instant  $t$

$y_2(t)$  = nombre de prédateur à l'instant  $t$

Un cas simple: si  $X_0$  est un zéro de  $F$ :

Dans ce cas, la solution de  $(P)$  est  $(\mathbb{R}, t \rightarrow X_0)$

DEF: On dit que  $X_0$  est un point d'équilibre pour l'équation  $Y' = F(Y)$ , lorsque  $F(X_0) = 0$



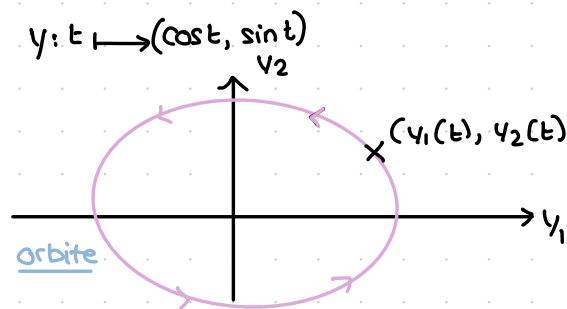
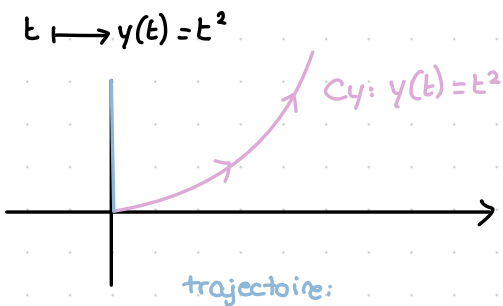
I. Cas particulier: les systèmes linéaires 2x2:

On considère :  $Y' = AY$ , où  $A \in M_2(\mathbb{R})$  à coefficients constants.

DEF: On appelle orbite du système  $Y' = F(Y)$  toute courbe  $\theta$  définie par  $\theta = \{ Y(t); t \in \mathbb{R}^+ \} \subset \mathbb{R}^n$ , où  $Y$  sol.

Ne pas confondre : - trajectoire  $\{ (t, Y(t)); t \in \mathbb{R}^+ \} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

- orbite  $\{ Y(t); t \in \mathbb{R}^+ \} \subset \mathbb{R}^n$



PROP: Pour un système autonome  $Y' = F(Y)$  (i.e.  $F$  ne prend pas de  $t$ ):

i) si  $Y$  est une solution alors  $\tilde{Y}: t \mapsto Y(t-T)$  est aussi une solution pour tout  $T$

ii) si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux solutions distinctes, leurs orbites  $O_1$  et  $O_2$  ne se croisent jamais

un peu faux

## PREUVE

(de i). Soit  $(\mathbb{R}, \gamma)$  une solution et  $T \in \mathbb{R}$ . Soit  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la fonction définie par  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t-T)$

$$\text{On a : } \tilde{\gamma}'(t) = \partial_t(\gamma(t-T)) = \gamma'(t-T) = l = F(\gamma(t-T)) = F(\tilde{\gamma}(t))$$

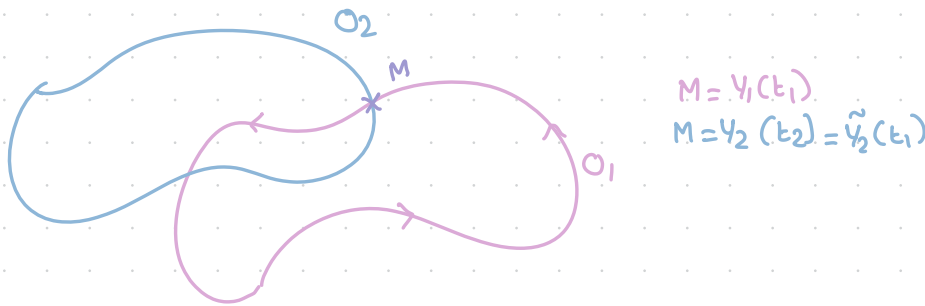
(de ii). Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux solutions. On suppose qu'il existe  $M \in O_1 \cap O_2$ . Il existe  $t_1$  tq  $\gamma_1(t_1) = M$ , et il existe  $t_2$  tel que  $\gamma_2(t_2) = M$ . Je note  $T = t_1 - t_2$ , et  $\tilde{\gamma}_2$  la fonction définie par  $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t-T)$

→  $\gamma_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  sont des solutions de l'équation  $\gamma' = F(\gamma)$  grâce à i). De plus,  $\gamma_1(t_1) = M$ ,  $\tilde{\gamma}_2(t_1) = \gamma_2(t_1-T) = \gamma_2(t_1 - (t_1 - t_2)) = \gamma_2(t_2) = M$

Donc  $\gamma_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  sont solutions du même problème de Cauchy: 
$$\begin{cases} \gamma' = F(\gamma) \\ \gamma(t_1) = M \end{cases}$$

Par l'unicité de Cauchy,  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_2$ . Donc  $O_1 = O_2$

ii) Si  $O_1$  et  $O_2$  ont un point commun, elles sont confondues



1) Cas dégénéré:  $A$  admet au moins une valeur propre nulle

a)  $A$  diagonalisable: quitte à changer de base,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  : 
$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

b)  $A$  n'est pas diagonalisable: alors 0 est vp double et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_2 t + c_1 \\ y_2 = c_2 \end{cases}$$

2)  $A$  inversible

a)  $A$  a 2 vp réelles distinctes

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \rightarrow \boxed{y_2 = c_2 y_1^{\lambda_2/\lambda_1}}$$

orbites? (voir portraits phase 2x2 notebook)

si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  noeud stable

si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  noeud instable

si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  point selle

si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_2/\lambda_1 > 1$  noeud instable

si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_2/\lambda_1 < 1$  noeud stable

si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 < 0$  selle

b)  $A$  n'est pas diagonalisable: une valeur propre double  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ... noeuds impropres

### c) A a deux racines complexes distinctes

$\lambda_1 = re^{i\theta}$   $\lambda_2 = re^{-i\theta}$  parce que A est réelle.

$$\begin{cases} v_1(t) = a(t) \cos \delta(t) \\ v_2(t) = a(t) \sin \delta(t) \end{cases}$$

On trouve  $\begin{cases} a'(t) = a(t) \cos \theta \delta'(t) \\ \delta'(t) = -a(t) \sin \theta(t) \end{cases}$

et  $a(t) = r e^{\cos \theta t}$   $\delta(t) = \theta - r \sin(\theta) t$

Dans tous les cas  $(0,0)$  est un point d'équilibre du système :  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $F(x_0) = 0$  pour  $x_0 = 0$ )

## II. Cas général

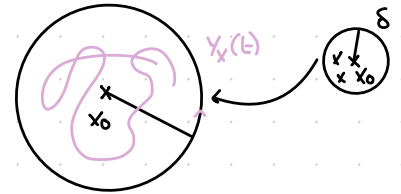
1) **DEF:** Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour  $y' = F(y)$

On dit que  $x_0$  est stable (au sens de Lyapounov) lorsque

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tq si  $\|x - x_0\| < \delta$  alors  $\forall t > 0, \|y_x(t) - y_{x_0}(t)\| < \varepsilon$

où  $y_x(t)$  (resp  $y_{x_0}(t)$ ) est la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = x \end{cases} \text{ resp. } \begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \text{ (i.e. } y_{x_0}(t) = x_0)$$



**Qu:** Pour les systèmes  $2 \times 2$ , quand le point  $(0,0)$  est-il un point d'équilibre stable? (voir)

**DEF:** Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour  $y' = F(y)$ . On dit que  $x_0$  est asymptotiquement stable lorsque:

i)  $x_0$  est stable

ii) Il existe  $\delta > 0$  tq  $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$  (Lyapounov)

### 2) Fonction de Lyapounov

**DEF:** Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour  $y' = F(y)$ . Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un voisinage de  $x_0$ , et  $L: V \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction  $C^1$ . On dit que L est une fonction de Lyapounov sur U pour  $y' = F(y)$  en  $x_0$  lorsque:

- i)  $L(x_0) = 0$
- ii)  $\forall x \in V \setminus \{x_0\}, L(x) > 0$
- iii)  $\forall x \in V, \nabla L(x) \cdot F(x) \leq 0$

si iii) est  $\forall x \in V, \nabla L(x) \cdot F(x) < 0$  on dit que L est une fonction de Lyapounov stricte.

**PROP:** Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour  $y' = F(y)$ . Soit  $L: V \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction  $C^1$ .

L est une fonction de Lyapounov sur V ssi pour toute solution  $(\mathbb{R}, y)$  de l'équation, la fonction  $t \mapsto L(y(t))$  est décroissante

#### Preuve:

\* Supposons que  $L: V \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de Lyapounov. On a

$$\partial_t(L(y(t))) = \nabla L(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla L(y(t)) \cdot F(y(t)) \leq 0$$

Donc  $t \mapsto L(y(t))$  est bien décroissante.

\* Réciproquement. Je suppose que  $L(y(t))$  est décroissante.

On a donc  $\partial_t(L(y(t))) \leq 0$  donc pour tout t,  $\nabla L(y(t)) \cdot F(y(t)) \leq 0$  (\*)

On peut faire ce raisonnement pour n'importe quelle solution  $y' = F(y)$

Pour  $X$  donnée, je note  $y_x$  les solutions de  $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = X \end{cases}$

Par (\*) en  $t=0$ , j'obtiens  $\nabla L(X) \cdot F(X) \leq 0$

PROP. [1<sup>er</sup> thm de Lyapounov]

Si il existe une fonction de Lyapounov pour  $y' = F(y)$  en  $X_0$  alors  $X_0$  est point d'équilibre stable

preuve admise

Retour au système prédateur-proie

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' = -cy_2 + dy_1y_2 \end{cases} \Leftrightarrow y' = F(y) \quad \text{où } F(x_1, x_2) = (ax_1 - bx_1x_2, -cx_2 + dx_1x_2)$$

→ Points d'équilibre :  $F(0, 0) = (0, 0)$   
 $F\left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right)$

$(0, 0)$  est instable

$\left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right)$  est stable: il existe une fonction de Lyapounov  $L(x_1, x_2) = x_1 - \log \frac{x_1}{a} + x_2 - \log \frac{x_2}{b}$

