Exos 1, 3, 5, 10

Rappels:

forme sesquilinéaire $b : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad b(x, \alpha y) = \alpha b(x,y)$, $\exists A$ tq $b(x,y) = x^* A y = \sum_{i,j} A_{ij} \bar{x}_i y_j$

forme quadratique: $q : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ $\quad b(\alpha x, y) = \bar{\alpha} b(x,y)$

$q(x) = b(x,x)$. ($\exists A$ hermitienne tq $q_A(x) = x^* A x = \sum_{i,j} A_{ij} \bar{x}_i x_j$)

$x^T A x \geqslant 0$ et $\forall x$ $x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

* matrice définie positive: toutes les valeurs propres > 0

Exo 1:

Mq $q(x,y) = x^2 + 0.1xy + 2y^2$ définie positive + matrice associée (majorer $|xy|$ / compléter le carré / diagonaliser la matrice) 2) Que dire de $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

1) méthode 1:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$

$q(x,y) \geqslant x^2 - 0.1|xy| + 2y^2$

$\geqslant x^2 - 0.1 \frac{(x^2+y^2)}{2} + 2y^2$

$\geqslant 0.95x^2 + 1.95y^2$ DF

méthode 2: [compléter le carré]

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$q(x,y) = (x + 0.05y)^2 + 2y^2 - 0.0025y^2$

$= (x + 0.05y)^2 + 1.9975y^2 \geqslant 0$

$q(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + 0.05y = 0$

et $y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ et $x = 0$

méthode 3 [matrice associée]

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la matrice associée à q

$$(x \ \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x y) \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix}$$

$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2$

$= ax^2 + 2bxy + cy^2$

Donc en identifiant : $a = 1$, $2b = 0.1$, $c = 2$

$\Rightarrow b = 0.05$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -0.05 \\ -0.05 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 0.0025$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 1.9975$

$\rightsquigarrow \Delta = 9 - 4 \times 1.9975 \geqslant 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta} \approx 1}{2} > 0$ Donc A symétrique définie positive

Critère de Sylvester: les n mineurs principaux sont > 0 $\Leftrightarrow$ A SDF

$\rightsquigarrow \Delta_1 = 1 > 0 \quad \Delta_2 = \det(A) = 1.9975 > 0$

2) $q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geqslant 0$

$q_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow$ pas définie positive

Exo 3 :

Si A matrice $N\times N$, mq la sous-matrice des $n\leqslant N$ lignes est colonnes peut être obtenue par X^*AX

(calcul brutal avec la formule de multiplication des matrices / $X=(v_1, \_\_\_, v_n)$ / $(X^*AX)_{ij} = \langle e_i, (X^*AX)e_j\rangle$
$= \langle X e_i, AXe_j\rangle$)

Méthode 1 [formule de multiplication]

$$(X^*AX)_{ij} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} x_{ik}^* a_{k\ell} x_{\ell j}$$

il ne doit rester que les termes en i et en j

On veut $(X^*AX)_{ij} = A_{ij}$ $\forall i,j\leqslant n$ $\rightsquigarrow \forall k,\ell > n,\ x_{k\ell}=0$

$$(X^*AX)_{ij} = \sum_{k,\ell\geqslant 0}^{n} \delta_{ki}\, a_{k\ell}\, \delta_{\ell j}$$ [avec $\delta_{ki}=1$ si $k=i$, 0 sinon]

$$\Rightarrow A_{ij} = x_{ii}^* a_{ij} x_{jj} = \delta_{ii} a_{ij} \delta_{jj}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{N-n}\end{pmatrix} \in M_{N,n}(\mathbb{R})}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h\end{pmatrix}$$

$$\overset{X^*}{(n\times N)}\overset{A}{(N\times N)}\overset{X}{(N\times n)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e\end{pmatrix}$$

Méthode 2 [$X=(v_1, \_\_\_, v_n)$]

$X=(v_1, \_\_\_, v_n)$ $v_i\in\mathbb{R}^N$

$(X^*AX)_{ij} = \langle v_i, Av_j\rangle = A_{ij} = \langle e_i, Ae_j\rangle$

i.e. on veut que $\forall A$, $\forall i,j\leqslant n$ $\langle v_i, Av_j\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle$

$\forall i,j\leqslant n$, $\langle v_i, I_N v_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle \Leftrightarrow \langle v_i - e_i, \underbrace{A(v_j-e_j)}_{}\rangle = 0$

$\in \perp\{v_i - e_i\}\ \forall A$

$\rightsquigarrow \langle v_i, v_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ si i fixé

$\langle v_i, Av_j\rangle = \langle e_i, Ae_i\rangle$

Méthode 3 : [$(X^*AX)_{ij} = \langle e_i, (X^*AX)e_j\rangle = \langle Xe_i, AXe_j\rangle$]

On veut : $\langle Xe_i, AXe_j\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle$ $\forall i,j\leqslant n$

Exo 5 :

Vérifier que $(u_k)_n = \sin\left(\pi k \frac{n}{N}\right)$, $k=1, \_\_\_, N-1$ est un vecteur propre de (l'opposé de) la matrice du Laplacien en dimension 1 ; $\lambda_k = 2N^2\left(1-\cos\left(\pi\frac{k}{N}\right)\right)$

Rappels : $\Delta : U \longmapsto \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2}$ (problème : $-u''(x) = f(x)$
$u(0)=u(1)=0$; $f\in C^0([0,1])$)

$U : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $U:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\Delta U = U$

$[-L, L]$ discrétisée en N points (x_n) (maillage uniforme)

$$U''(x_n) = \frac{2u(x_n) - U(x_{n-1}) - U(x_{n+1})}{\left(\frac{1}{N^2}\right)}$$

$x_n = -L + \frac{n}{N}2L$, $U(x_0)=0$ $U(x_{N-1})=0$ $\Delta_N = N^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2\end{pmatrix}$

* on veut montrer que

$\forall K,$

$$\Delta_N \times \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\pi K \frac{1}{N}) \\ | \\ \sin(\pi K) \end{pmatrix}}_{V_K} = N^2\left(\cos\left(\frac{K\pi}{N}\right) - 1\right)\begin{pmatrix} \sin(\pi K \frac{1}{N}) \\ | \\ \sin(\pi K) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\pi K \frac{1}{N}) \\ | \\ \sin(\pi K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(\pi K 1/N) - \sin(\pi K \frac{2}{N}) \\ -\sin(\pi K \frac{1}{N}) + 2\sin(\pi K \frac{2}{N}) - \sin(\pi K \frac{3}{N}) \\ -\sin(\pi K \frac{2}{N}) + 2\sin(\pi K \frac{3}{N}) - \sin(\pi K \frac{4}{N}) \\ | \\ -\sin(\pi K \frac{N-1}{N}) + 2\sin(\pi K) \end{pmatrix}$$

$$(-\Delta_N \times V_K)_n = N^2\left[2\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) - \sin\left(\frac{\pi K(n-1)}{N}\right) - \sin\left(\frac{\pi K(n+1)}{N}\right)\right]$$

$$= N^2\left[2\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi K n}{N} \times \cos\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right)\right]$$

$$= 2N^2 \times \sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) \times \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi K n}{N}\right)\right)$$

$\sin(a+b) + \sin(a-b)$
$= \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$- \sin b \cos a + \sin a \cos b$
$= 2 \sin a \cos b$

* si $N >> K$

$$\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) \sim \frac{\pi K n}{N}$$

$$2N^2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right) \sim \frac{\pi^2 K^2}{N^2} \times 2N^2 = 2\pi^2 K^2$$

[quantification des vp du Laplacien]

Exercices 4, 6, 9, 10

Exo 4.

a) $A \in \mathbb{C}^{N\times M}$, mq A^*A symétrique déf >0 ssi A est de rang maximal M (colonnes de A indépendantes)

$A^*A \in \mathbb{C}^{N\times N}$

symétrie: $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$

défini positif: il faut vérifier que $\langle (A^*A)x, x\rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$

* par définition, $\forall x \in \mathbb{C}^N, y \in \mathbb{C}^N \ \langle Ay, x\rangle = \langle y, A^*x\rangle$ $(A^* = {}^t\bar{A})$

$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 > 0$

$(= 0$ ssi $Ax = 0$ ssi $x = 0$ si A est injective (i.e. les colonnes sont indépendantes))

b) mq si $A^*A = LL^*$ (L: triangulaire supérieure) alors $A(L^*)^{-1}$ est une matrice orthogonale

L'adjoint est l'inverse

produit des adjoints

On calcule $(A(L^*)^{-1})^* A(L^*)^{-1} = ((L^*)^{-1})^* \underbrace{A^*A}_{= LL^* \text{ par hyp}}(L^*)^{-1}$

$= \underbrace{L^{-1}L}_{Id}\underbrace{L^*(L^*)^{-1}}_{Id} = Id$

c) Appliquer cette méthode $A = (v_1 \ v_2)$ $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^N$ de norme 1 + comparer avec Gram Schmidt

$A = \underbrace{[A(L^*)^{-1}]}_{= Q} \underbrace{L^*}_{R}$ ← triangulaire supérieure

↑ orthogonale

* Chercher L $\quad A^*A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

(pour trouver la matrice de Gram:)

$\rightsquigarrow \langle X, Y\rangle = \sum_i x_i \bar{y_i} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle \end{pmatrix}$$

$$(A^*A)_{ij} = \sum_{K=1}^{M} (A^*)_{iK} A_{Kj} = \sum_{K=1}^{M} \bar{A}_{Ki} A_{Kj} = \langle v_i, v_j\rangle$$

$$A = (v_1 | \_\_\_\_ | v_m)$$

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad LL^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & a\bar{b} \\ \bar{a}b & |b|^2 + |c|^2 \end{pmatrix}$$

→ $a = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \|v_1\| = 1$

$b = \langle v_2, v_1\rangle$

$c = \sqrt{1 - |\langle v_1, v_2\rangle|^2}$

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \langle v_2, v_1\rangle & \sqrt{1 - |\langle v_1, v_2\rangle|^2} \end{pmatrix}}$$

Exo 6 :

matrice de rotation de Givens :

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$C = \cos\theta$

$S = \sin\theta$

lignes et colonnes particularisées : i et j

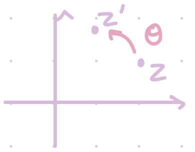
a) interprétation géométrique

on regarde l'action sur un vecteur

$$G(i,j,\theta)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i' \\ \vdots \\ x_j' \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x_i' \\ x_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{* } G \text{ est la rotation d'angle } \theta \text{ dans le plan } \mathrm{Vect}(e_i, e_j)}$

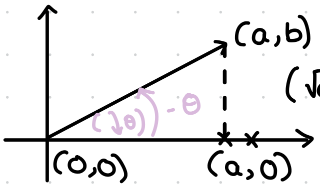
((e_i, e_j) base directe)



$z = x_i + i x_j$

$z' = x_i' + i x_j'$

b) comment choisir θ tq $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\boxed{\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\sin(\theta) \end{aligned}}$$

c) Mq $(A)_{ij} = 0$ en multipliant à gauche par une matrice unitaire, en ne modifiant que les lignes i et j (que les coefs ij ji)

+ méthode pour calculer la factorisation QR d'une matrice

$G^T G = Id$ (si G réelle)

$G^* G = Id$

A matrice : But $A = QR$ (Q orthogonale, R triangulaire sup)

$$Q^{-1}A = R \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \\ 0 & r_{21} & \ddots \\ \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$G \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \exists\theta$ tq $G(1,2,\theta)\,A(e_1) = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Quand on effectue le produit $G(i,j,\theta)A$, on ne modifie que $a_{ii}, a_{ij}, a_{ji}, a_{jj}$

$G(1,n,\theta_n)\,G(1,n-1,\theta_{n-1})\dots G(1,2,\theta_2)A$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \text{———} & * \\ 0 & * & & \\ | & \boxed{\begin{matrix} * \\ | \\ * \end{matrix}} & \boxed{} & \\ 0 & * & \text{———} & * \end{pmatrix} \quad G(2,3,\theta_\cdot) \text{ ——— } G(2,n,\theta_\cdot)$$

n^2 matrices de Givens

G_1 et G_2 orthogonales

$(G_1G_2)^{-1} = G_2^{-1}G_1^{-1} = G_2^T G_1^T = (G_1G_2)^T$

Autre rédaction : (pas faite en TD)

Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times M}$, $i<j$. On veut annuler le coefficient A_{ji}

On considère le vecteur $\begin{pmatrix} A_{ij} \\ A_{ji} \end{pmatrix}$. D'après (b), $\exists \theta$ tq $G(i,j,\theta)\begin{pmatrix} A_{ii} \\ A_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

La multiplication à gauche par $G(i,j,\theta)$ ne modifie que les lignes i et j. En particulier, dans la colonne i, $\begin{pmatrix} A_{ii} \\ A_{ji} \end{pmatrix}$ est remplacé par $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $(G(i,j,\theta)A)_{ji} = 0$

itération :

En répétant ce procédé pour tous les coefficients sous la diagonale, on obtient une matrice triangulaire sup. R.
Ainsi, $\exists G_1, \text{——}, G_K$ tq $G_K \text{——} G_1 A = R$. Comme chaque G_p est unitaire, $Q := G_1^* \text{——} G_K^*$ est unitaire. Donc $A = QR$

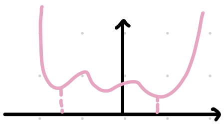
Exo 10

$f(x) = \|Ax-b\|^2 + \lambda\|x\|^2 ; \lambda > 0$

mq la solution de ce problème est unique, même si A n'est pas de rang M.

* f admet un min

f est continue et 'coercive' $\left(f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty \right)$



donc admet un minimum global (Δ! pas forcément unique)
(exo)

- Soit x un minimum def.
  Alors $\nabla f(x) = 0$
  $\left(f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(|h|) \right)$
  $f(x+h) = \langle A(x+h)-b, A(x+h)-b \rangle + \lambda \langle x+h, x+h \rangle$
  $= f(x) + \langle Ah, Ax-b \rangle + \langle Ax-b, Ah \rangle + \lambda(\langle x,h\rangle + \langle h,x\rangle) + o(|h|^2)$
  $= f(x) + \langle \underbrace{2 A^*(Ax-b) + \lambda x}_{\nabla f(x)}, h \rangle$

- On veut mq $A^*(Ax-b) + \lambda x = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(A^*A + \lambda I_n)}_{\text{injective ?}} x = A^* b$ ↑ sys linéaire unique sol

en dim finie,
injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ inversible

On résout $(A^*A + \lambda I_n)x = 0$

Comme $\mathrm{Spec}(A^*A) \subset \mathbb{R}_+$

On a $\mathrm{Spec}(A^*A) \subset [\lambda, +\infty[$ (0 n'est pas vp donc A injective)

ou $\Rightarrow \langle (A^*A + \lambda id)x, x \rangle = 0$
$\Rightarrow \|Ax\|^2 + \lambda\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\boxed{\text{Feuille 3 exercices 2, 3, 4, 5, 8}}$

Exo 2

Mq les matrices sym $\mathbb{R}$ 2×2 vp double est un sev. Que peut on attendre des vp d'une matrice réelle sym 2×2 $A(t)$?

$S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} ; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

$E = \{ A \in S_2(\mathbb{R}) ;$ A a une vp double$\}$

thm spectral : si A symétrique réelle, alors $\exists P$ orthogonale tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors $A = \lambda I_2$
donc $E \subset \{ \lambda I_2 ; \lambda \in \mathbb{R} \}$
si $A = \lambda I_2$, $\chi_A(x) = (x-\lambda)^2$ sa vp est λ (double)
donc $\{\lambda I_2 ; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset E$

$E = \text{vect}(I_2)$ est un sev de $S_2(\mathbb{R})$
une base de E est (I_2). Donc $\dim(E) = 1$

$*$ si $A = A(t) \in S_2(\mathbb{R})$
On peut choisir deux fonctions $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \in \mathbb{R}$ continues en t et $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\} = \sigma(A(t))$ $\forall t$
si $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$, $A(t) = \lambda(t) I(t)$

Exo 3

Mq si M hermitienne def pos, alors $\langle x, y \rangle_M = x^* M y$ produit scalaire
Calculer B (adjoint de A pour le produit scalaire M si $\langle x, Ay \rangle_M = \langle Bx, y \rangle_M$)

M hermitienne (définie positive) $\langle x, y \rangle_M = x^* M y$

- $\langle x, x \rangle_M = x^* M x \geqslant 0$ (>0 si $x \neq 0$) car M hermitienne
- $\langle \lambda x, y \rangle_M = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle_M$ ($x^* = {}^t\bar{x}$)
- $\langle x, \lambda y \rangle_M = \lambda \langle x, y \rangle_M$
- $\langle x, y \rangle_M = \overline{{}^t\bar{x} M y} = {}^t x \bar{M} \bar{y} = {}^t(x \bar{M} \bar{y}) = {}^t\bar{y} \underbrace{{}^t\bar{M}}_{= M \text{ (M hermitienne)}} x = \langle y, x \rangle_M$ (matrice 1×1)

$\langle A^* x, y \rangle_M = \langle x, Ay \rangle_M$
$= \langle x, MAy \rangle_{eucl}$
$= \langle {}^t\bar{M} x, Ay \rangle_{eucl}$
$= \langle {}^t\bar{A} {}^t\bar{M} x, y \rangle_{eucl}$
$= \langle {}^t\bar{A} {}^t\bar{M} x, M^{-1} M y \rangle_{eucl}$
$= \langle M^{-1} {}^t\bar{A} M, My \rangle_{\text{eucl}}$
$= \langle M^{-1} {}^t\bar{A} M, y \rangle_M$

$\boxed{A^* = M^{-1} {}^t\bar{A} M}$

Exo 4

Mq si A hermitienne déf pos et B hermitienne, alors AB diagonalisable à vp réels
(Ind : $\langle x, y\rangle_{A^{-1}} = x^* A^{-1} y$)

A HDP, B hermitienne
($M = A^{-1}$ dans l'exo 3) $\rightsquigarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{A^{-1}}$

On calcule l'adjoint de AB pour ce produit scalaire

$$(AB)^* = M^t(\overline{AB})M$$
$$= \underbrace{A^t \bar{B}^t}_{B} \underbrace{\bar{A} A^{-1}}_{I_n} = AB$$

Exo 5

Mq toute matrice diagonalisable est normale pour un certain produit scalaire (commute avec ce produit scalaire)

A diagonalisable
$A = P^{-1} D P$
$\langle x, y\rangle = \langle Px, Py\rangle_{eucl}$

Il existe une base $(e_1, \_\_\_, e_n)$ de vecteurs propres tq $Ae_i = \lambda_i e_i$; $\lambda_i \in \mathbb{C}$
tout $x \in \mathbb{C}^n$ se décompose

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

(coordonnées dans la base de vecteurs propres)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \bar{x}_i y_i \quad (*)$$

La matrice adjointe doit satisfaire $\forall x, y \ \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$

$$\Rightarrow A^*\left(\sum y_i e_i\right) = \sum \bar{\lambda}_i y_i e_i$$

On calcule :

$$A^* A\left(\sum x_i e_i\right) = A^*\left(\sum_i \lambda_i x_i e_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}(\lambda_i x_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 x_i e_i$$

$$AA^*\left(\sum x_i e_i\right) = A\left(\sum \bar{\lambda}_i x_i e_i\right) = \sum |\lambda_i|^2 x_i e_i$$

(ou bien : $A = P^{-1} D P$
$\langle Px, Py\rangle$?
$\langle PAx, Py\rangle_{eucl} = \langle DPx, Py\rangle_{eucl}$
$= \langle Px, \bar{D} Py\rangle_{eucl}$
$= \langle Px, P(P^{-1}\bar{D}P)y\rangle_{eucl}$

$A^* = P^{-1}\bar{D}P$
$AA^* = P^{-1}|D|^2 P = A^* A$)

Autre rédaction (pas faite en TD)

méthode 1:

A diagonalisable, $\exists P$ inversible et D diagonale tq $A = P^{-1}DP$

On définit: $\langle x,y\rangle := \langle Px, Py\rangle_{eucl}$

On calcule l'adjoint de A pour ce produit scalaire:

Soient $x, y \in \mathbb{C}^N$.

$$\begin{aligned}\langle Ax,y\rangle &= \langle PAx, Py\rangle_{eucl}\\ &= \langle DPx, Py\rangle_{eucl}\\ &= \langle Px, D^*Py\rangle_{eucl}\\ &= \langle Px, PP^{-1}D^*Py\rangle_{eucl}\\ &= \langle x, P^{-1}D^*Py\rangle\end{aligned}$$

donc $A^* = P^{-1}D^*P$

et
$$\begin{aligned}AA^* &= AP^{-1}D^*P\\ &= P^{-1}DPP^{-1}D^*P\\ &= P^{-1}DD^*P\\ &= P^{-1}D^*DP \quad \text{car D est diagonale}\\ &= A^*A\end{aligned}$$

Donc A est une matrice normale.

méthode 2:

il existe une base de vecteurs propres $(e_1, \_\_\_, e_n)$ tq $Ae_i = \lambda_i e_i$; $\lambda_i \in \mathbb{C}$

$\forall x \in \mathbb{C}^N$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \bar{x}_i y_i$

or $A^*y = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i y_i e_i$ (par def)

donc $A^* e_i = \bar{\lambda}_i e_i$

$A^*A(e_i) = A^*(\lambda_i e_i) = |\lambda_i|^2 e_i$

$AA^*(e_i) = A(\bar{\lambda}_i e_i) = |\lambda_i|^2 e_i$

donc $A^*A(e_i) = AA^*(e_i)\ \forall i$

comme $(e_1, \_\_\_, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$,

$A^*A = AA^*$

Exo 8:

Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ HDP

$P \in \mathbb{C}^{N\times n}$ rang n ; $n \leqslant N$

Mq P^*AP inversible + contre exemple si A n'est pas HDP

* B est hermitienne:

$$\begin{aligned}B^* &= (P^*AP)^*\\ &= P^*A^*P = P^*AP \quad (\text{car A est hermitienne}, A^* = A)\\ &= B\end{aligned}$$

* B est def pos

Soit $x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}\langle Bx,x\rangle &= \langle P^*APx, x\rangle\\ &= \langle APx, P^*x\rangle\\ &= \langle Ay, y\rangle \quad \text{avec } y := Px \in \mathbb{C}^N\end{aligned}$$

or P est de rang n, donc l'application linéaire $P: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^N$ est injective.

Donc $x \neq 0 \Rightarrow Px \neq 0$

or A HDP, donc $\langle Ay, y\rangle > 0\ \forall y \neq 0$

CCL: Toute matrice HDP est inversible. Donc P^*AP est inversible.

Contre exemple:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

P de rang 1, or $P^*AP = 0$

donc P^*AP n'est pas inversible.

TD 4 02/02/26

$\boxed{\text{Feuille 3 exos : 6, 7, 9}}$

Exo 6 :

Mq $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ + en déduire sans calcul une base de vp de A

[cours]
↳ argument ne marche pas si les vecteurs p pas de dim 1

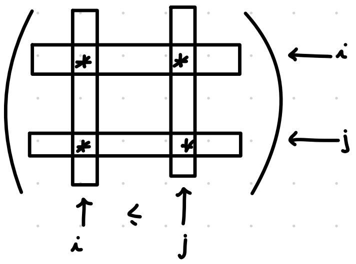
A commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc laisse invariant ses sous-espaces propres $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exo 7 :

B sous-matrice de A hermitienne. Mq si $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \text{———} \leq \lambda_n(A)$
$\lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \text{———} \leq \lambda_\ell(B)$
(désignent les valeurs propres de A, B ordonnées dans l'ordre croissant, montrer
$\forall i \in \{1, \text{——}, \ell\}$, $\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$
et $\lambda_{n+1-i}(A) \geq \lambda_{\ell+1-i}(B)$

i = 1 : $\lambda_1(A) \leq \lambda_1(B)$

- $\lambda_1(A) = \min\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{C}^n}} \langle x, Ax \rangle$

- A =  , $B = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$

$A\big|_{\mathrm{Vect}(e_i, e_j)}$ + projection sur un espace de dim 2

↳ $B = \underline{P^*} A \underline{P}$;
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ "projection" $\mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ "inclusion"

si $B = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq \ell}}$

dans ce cas, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} I_\ell \\ 0 \end{pmatrix}$

$P^* = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \end{pmatrix}$

si $B = (a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in I}}$ $\quad I \subset \{1, \text{——}, n\}$, $|I| = \ell$

$\to \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^{|I|}}_{\substack{\simeq \mathbb{R}^\ell \\ \text{isomorphe à}}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}^{n-|I|}}_{\substack{\simeq \mathbb{R}^{n-\ell} \\ \text{isomorphe à}}}$, donc on peut définir $P : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$
$\approx$
$\mathbb{R}^{|I|} \xrightarrow[\text{inclusion}]{} \mathbb{R}^n$

+ voir aud 6

taud 7

- $\lambda_1(B) = \min_{\substack{y\in\mathbb{C}^e \\ \|y\|=1}} \langle y, P^*APy\rangle = \min_{\substack{y\in\mathbb{C}^e \\ \|y\|=1}} \langle Py, APy\rangle$; or P vérifie $P^*P = I_e$ (mais $PP^* \neq I_n$, $PP^* = \Pi_{Im(P)}$)

↑ projection orthogonale sur l'image de P

rq: $\|Py\| = \|y\|$ (car $P^*P = I_e$) $\langle Py, Py\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle P^*Py, y\rangle_{\mathbb{C}^e} = \langle y,y\rangle_{\mathbb{C}^e}$

$\{Py : y\in\mathbb{C}^e, \|y\|=1\} \subset \{x ; x\in\mathbb{C}^n, \|x\|=1\}$

donc $\min_{\substack{y\in\mathbb{C}^e \\ \|y\|=1}} \langle Py, APy\rangle \geqslant \lambda_1(A)$

* pour $i>1$

énoncé équivalent : si B admet K valeurs propres $\leqslant C$, alors A admet K valeurs propres $\leqslant C$ (2)

Si il existe un sev $I \subset \mathbb{C}^e$ de dimension K tel que $\forall y\in F, \langle By, y\rangle \leqslant C\|y\|^2$ alors on peut faire pareil avec A. (1)

(aud 8)

(1) pour $K=1$:

si $\exists y\in\mathbb{C}^e\setminus\{0\}$ tq

$\rightsquigarrow \exists x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ $\langle Ax, x\rangle^2 \leqslant C\|x\|^2$

si on prend $x := Py$ est non nul et $\langle APy, Py\rangle = \langle By, y\rangle$, et $\|Py\| = \|x\|$

cas général : $F' = P(F)$ sev de dimension K

$$\forall x\in F', \quad \langle Ax, x\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \exists y\in F \\ x=Py}}{\langle APy, Py\rangle} = \langle By, y\rangle \leqslant C\|y\|^2 \leqslant C\|x\|^2$$

aud 9

(2) Si B admet K vp $\leqslant C$, on peut trouver une base orthonormée des vecteurs propres de B : $f_1, \_\_\_, f_K$ tq $\langle Bf_i, f_i\rangle \leqslant C\|f_i\|^2$ $\forall i = 1, \_\_, K$

$F := Vect(f_1, \_\_\_, f_K)$

$\forall x\in F, \langle Bx, x\rangle \leqslant C\|x\|^2$ (vérifier)

- $F' = P(F) \underset{(1)}{\rightsquigarrow} \forall x\in F', \langle Ax, x\rangle \leqslant C\|x\|^2$

contraposée :

si A n'admet pas K vp $\leqslant C$

$(e_1, \_\_\_, e_n)$ base de vp $\leqslant C$

$x = \sum x_i e_i \longrightarrow \langle Ax, x\rangle = \sum_{i<K} \lambda_i(A) x_i^2 + \sum_{i\geqslant K} \lambda_i(A) x_i^2$

je pose $V = Vect(e_K, \_\_\_, e_n)$ $\quad \dim(V) = n-K+1$

$\forall x\in V, \langle Ax, x\rangle \geqslant \lambda_K\|x\|^2 > C\|x\|^2$

or $\dim(V) + \dim(F') > \dim\mathbb{C}^n \Rightarrow V\cap F' \neq \{0\}$

Conclusion : $(\lambda_i(A) \leqslant \lambda_i(B))$

on prend $C = \lambda_i(B)$

B admet i vp $\leqslant C \overset{(2)}{\Longrightarrow}$ A admet i vp $\leqslant C$

$\Rightarrow \lambda_i(A) \leqslant C (= \lambda_i(B))$

↑ car on a ordonné les vp de façon croissante

[Autre rédaction]

B est une sous matrice principale de A, il existe $P\in M_{n,e}(\mathbb{C})$ tq $P^*P = I_e$

$B = P^*AP$

$$\lambda_i(M) = \min_{\substack{F\subset\mathbb{C}^m \\ \dim F = i}} \max_{\substack{x\in F \\ \|x\|=1}} \langle Mx, x\rangle$$

donc $\exists F\subset\mathbb{C}^e$ tq $\langle By, y\rangle \leqslant \lambda_i(B)\|y\|^2$ $\forall y\in F$. or $\forall x\in F, \exists y\in F$ tq $x = Py$

pour $F = \{Py ; y\in F\}$

or $\langle Ax, x\rangle = \langle APy, Py\rangle$

$= \langle P^*APy, y\rangle$

$= \langle By, y\rangle \leqslant C\|y\|^2 \leqslant C\|x\|^2$

$$\lambda_i(A) \leqslant \max_{\substack{x\in F \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_i(B)$$

Exo12 :

Mq $\sum_{j=0}^{N-1} |x_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} |(Fx)_K|^2$

$$* \; F(X)_K = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{-2i\pi K j}{n}} x_j$$

⤳ (on retire le 1/n dans l'énoncé. si on normalise pas, on rajoute 1/n dans l'énoncé)

$$\|F(X)\|_2^2 = \sum_{K=0}^{n-1} |F(X)_K|^2$$

$\Delta ! \; |z|^2 = z\bar{z}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} x_j \overline{e^{-\frac{2i\pi K j'}{n}} x_{j'}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} \underbrace{x_j e^{+\frac{2i\pi K j'}{n}} \overline{x_{j'}}}_{e^{\frac{2i\pi (j'-j)}{n} K} x_j \overline{x_{j'}}}$$

$$\overset{\text{somme sur } K}{=} \frac{1}{n} \sum_{j,j'=0}^{n-1} x_j \overline{x_{j'}} \underbrace{\left(\sum_{K=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi (j'-j)}{n} K} \right)}_{n\delta_{j=j'}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{x_j} \cdot n = \|X\|^2$$

$$\left(F(X)_K = \int e^{-2i\pi K t} x(t)\, dt \right)$$

Exo 10:

donner la transformée de fourier discrète de $x_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$

$$F(X_K) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} \left(\frac{e^{\frac{2i\pi j}{n}} + e^{-\frac{2i\pi j}{n}}}{2} \right) \qquad K \in \{0, \_\_\_\_, n-1\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} e^{-2i\pi (K-1) j / N}}_{= N \text{ si } K-1 \equiv 0 [N] \Leftrightarrow K=1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} e^{-2i\pi (K+1) j / N}}_{= N \text{ ssi } K = N-1} \right)$$

or $\sum_{j=1}^{N-1} e^{-2i\pi mj/N} = \begin{cases} N & \text{si } m \equiv 0 \pmod N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \frac{N}{2\sqrt{N}} \left(\delta_{K,1} + \delta_{K,N-1} \right) = \frac{\sqrt{N}}{2} \left(\delta_{K,1} + \delta_{K,N-1} \right)$$

TD 5 09/02/26

Feuille 3 : 9, 11 Feuille 4 : 6, 14, 15, 16

Exo 9.

Mq si A commute avec T (est invariante par translation) alors A est une matrice cumulante (représentant une convolution)

A commute avec $T \Leftrightarrow A$ est une matrice cumulante

$$\left(A = \sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k \quad (A \in \mathbb{C}[T]) \quad T^N = I_N\right)$$

$\Uparrow$ $TA = \sum a_k T T^k = \sum a_k T^k T = AT$ inclusion

→ Q : quelle est la dimension (de sev) de $\{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : AT = TA\}$?

→ Q : Quelle est la dimension de $\mathbb{C}[T] = \left\{\sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k : (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N\right\}$?

$\dim \mathbb{C}[T] = N$ (on a une base donnée par $(T^0, \dots, T^{N-1})$)

pour mq $\dim \mathbb{C}[T] = N$

m1 :

- $\chi_T = X^N - 1$ (racines simples, donc c'est aussi le polynôme minimal (de degré N))

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

m2 :

- $$\sum a_k T^k = \begin{pmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & \ddots & & \\ a_2 & \ddots & \ddots & a_0 \\ & \ddots & \ddots & a_1 \\ & & & a_2 \end{pmatrix}$$

$\langle e_i, \sum a_k T^k e_j \rangle = a_{j-i}$

m3 :

- Si A commute avec T, alors A laisse invariants les sous espaces propres T (sont de dimension 1)

donc $A = P^{-1} D P$ où P envoie les vecteurs propres sur les vecteurs de la base canonique

↳ on a $N!$ façons de mettre les vp sur la diag

Q1 : dim N

+ inclusion ⇝ les 2 sous ensembles sont égaux.

Rq : $Av = a * v$

$AT = TA \Rightarrow AT^n = T^n A$

donc $Ae_n = AT^n e_0 = T^n(Ae_0) = (Ae_0) * e_n$

ici, $(e_0, \dots, e_{N-1})$ designe la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

$Av = a * \underbrace{v}_{e_0}$

$Ae_0 = a * e_0 = a$

Exo 11 :

Donner la matrice représentant la transformation

$$(Ax)_j = \frac{x_{j-1}+2x_j+x_{j+1}}{4} \quad (1) \quad / \quad (Ax)_j = \frac{x_{j-1}-2x_j+x_{j+1}}{(2\pi/N)^2}$$ ← (méthode des différences finies)

Appliquer le thm de convolution. Donner l'asymptotique pour $|K| \ll N$ + interpréter

$A x = a * x$ avec $a = \frac{1}{4}e_{-1} + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{4}e_1$ (thm convolution : $F(Ax) = F(a*x) = F(a)F(x)$)

$$\hookrightarrow F(a)_K = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{-2i\pi j K}{N}} a_j$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{4}e^{\frac{-2i\pi K}{N}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\frac{2\pi i K}{N}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi K}{N}\right)\right)$$

$$F(X)_K = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{-2i\pi K}{N}} x_j$$

- $F(f*g) = F(f) * F(g)$
- $\|F(X)\|_2^2 = N\|F(X)\|_2^2$

$$F(a*X)_K = \frac{1}{2\sqrt{N}} \underbrace{\left(1+\cos\left(\frac{2\pi K}{N}\right)\right)}_{\substack{\approx 1 \\ (K \ll N)}} FX(K) \approx \frac{1}{\sqrt{N}} F(X)_K$$

si x oscille peu alors $F(x)$ est concentrée aux basses fréquences ($K \ll N$)

$$\hookrightarrow (Ax)_j = \frac{x_{j-1}-2x_j+x_{j+1}}{(2\pi/N^2)}$$

$$a = \frac{1}{(2\pi/N)^2}(\delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1)$$

$$F(Ax) = F(a*x) = F(a)F(x)$$

$$\hookrightarrow a = \frac{1}{(2\pi/N)^2}(e_1 - 2e_0 + e_{-1})$$

$$F(a)_K = \frac{1}{(2\pi/N)^2}\left(e^{-\frac{2\pi i K}{N}} - 2 + e^{2\pi i k/N}\right) = \frac{2}{(2\pi/N^2)}\left(\cos\left(\frac{2\pi K}{N}\right)-1\right) \underset{K \ll N}{=} \frac{2}{(2\pi/N)^2}\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{2\pi K}{N}\right)^2\right) = -K^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{iKx} = -K^2 e^{iKx}$$

$$F(f'')(K) = -K^2 F(f)(K)$$

Exo 6 :

Rappels : conditionnement de A

$\text{cond}_{\|\cdot\|}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

ex : $\|A\|_\infty = \max |a_{ij}|$

$\|A\|_2^2 = \sum a_{ij}^2$

Calculer les vecteurs et valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

Calculer le conditionnement de la matrice des vecteurs propres

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Spec}(A) = \{0, \varepsilon\}$

$A e_1 = 0$ (e_1 vecteur propre pour 0)

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ (autre vecteur propre ε)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$

$\|P\|_\infty = 1$, $\|P^{-1}\|_\infty = \varepsilon^{-1}$

$\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(P) = \varepsilon^{-1}$ (matrice "pas agréable")

Feuille 4 Exos 1…7

Ex 1:

Mq les valeurs singulières d'une matrice sont invariantes par multiplication à gauche ou à droite par une matrice unitaire. Mq ce n'est pas le cas pour une matrice orthogonale (rectangulaire)

Rappel: les valeurs singulières sont $\{\sqrt{x} ; x \in Sp(A^*A)\}$

Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times M}$. $A = USV^*$ où U et S sont unitaire
Soit $N \in \mathbb{C}^{N\times M}$ (ou $\mathbb{C}^{M\times N}$) unitaire.
$RA = RUSV^*$ RU et V^*R sont unitaire
$\rightsquigarrow$ S ne change pas

• $(TA)^*TA = A^*T^*TA = A^*A$
$\Rightarrow Sp((TA)^*(TA)) = Sp(A^*A)$
et $(AT)^*AT = T^*A^*AT$
$= PDP^{-1}$ d'où égalité de spectre

Ex 2:

Mq la plus grande valeur singulière de A ne peut pas croître (resp décroître)
Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times M}$ à laquelle on ajoute une colonne, $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{N\times M\times 1}$
Soit $x \in \mathbb{C}^N$ tq $\|x\| = 1$
Alors $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}$ et $\|\tilde{x}\| = 1$

De plus, $Ax = \tilde{A}\tilde{x}$

Ainsi: $V_N = \{\|Ax\|^2 ; x \in \mathbb{C}^N$ et $\|x\| = 1\} = \check{V}_{N+1} := \{\|\tilde{A}\tilde{x}\| : \underset{\|x\|=1}{x \in \mathbb{C}^N}\} \subset V_{N+1} = \{\|\tilde{A}x\| : x \in \mathbb{C}^{N+1}$ et $\|x\| = 1\}$
D'où $\min_{V_N} \geq \min_{V_{N+1}}$ et $\max_{V_n} \leq \max_{V_{n+1}}$

$\delta_1^2 = \min_{\|x\|=1} \langle A^*Ax, x\rangle = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|^2$

Ex 3:

vp, singulières, det, conditionnement de $\begin{pmatrix} 1/100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$

pour $A = \begin{pmatrix} 1/100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$. $A^*A = A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10\,000} & 0 \\ 0 & 10000 \end{pmatrix}$
det $A = 1$
$Vp = \{1/100, 100\}$, $VS = \{1/100, 100\}$

conditionnement: $\|A\|.\|A^{-1}\| = \dfrac{\delta_2(A)}{\delta_1(A)} = \dfrac{100}{\frac{1}{100}} = 10\,000$

$B = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$, $\det(B) = 10\,000$
$Sp(B) = Sps(B) = \{100\}$
$K(B) = \frac{100}{100} = 1$

Ex 4:

Calculer les VS d'une matrice $N \times 2$ de 2 vecteurs de taille N normalisés

$A = (c_1 | c_2) \quad A \in \mathbb{C}^{N \times 2} \quad c_1 \in \mathbb{C}^N$ et $c_2 \in \mathbb{C}^N$

$$A^* A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \|c_1\|^2 & c_1 c_2 \\ c_2 c_1 & \|c_2\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \langle c_1, c_2 \rangle \\ \langle c_2, c_1 \rangle & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi(A^* A) = (X-1)^2 - |y|^2 = 0$

$\Rightarrow (X-1)^2 = |y|^2$

$Sp(A^* A) = \{1 \pm |y|\}$

Exo 5:

si $A = USV^* \in \mathbb{C}^{N \times M}$. $B = UV^*$

Mq $B = A(A^*A)^{-1/2}$

Calculer $\|A-B\|$ et $\|A-B\|_F$ + comparer avec la factorisation QR.

Soit $A = USV^*$ et $B = UV^*$

$A(A^*A)^{-1/2} = A[VSV^*]^{-1}$

$= USV^* V S^{-1} V^*$

$= UV^* = B$

$\|A - B\| = \|A - A(A^*A)^{-1/2}\|$

$= \|A(Id - (A^*A)^{-1/2})\|$

$= \|U(S - Id)V^*\|$

On a $\|A-B\| = \|S - Id\| = \max\{|S_j(A) - 1|; S_j(A) \in Sp_S(A)\}$

Pour la norme de Frobenius: $\|A-B\|_F = \sqrt{Tr(S-I\alpha)}$

$$= \left(\sum_{1 \leq j \leq k} (S_j(A) - 1)^2\right)^{1/2}$$

Exo 7:

Mq $A = QH$ Q orthogonale et H HDP

$A = USV^*$

$A^* A$ est HDP

et $A^* A = PS^2P^{-1}$

$\Rightarrow S^2 = P^{-1}A^*AP$

$\Rightarrow S^2 = U^*A^*AU$

(+ Exos 12, 13, 15 missing)

Supposons $A = USV^* = QH$

$A^* A = H^*Q^*QH = H^*H = H^2$

$H^2 = A^*A = PSP^{-1}$

$\Rightarrow H = PS^{1/2}P^{-1}$

$H = \sqrt{A^*A}$, $Q := UV^*$

$$A = \underbrace{UV^*}_{Q} \underbrace{VSV^*}_{R}$$

Feuille 4 exos 9, 12, 13

Exo 12 :

Montrer par série de Neumann que $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ est inversible pour ε suffisament petit

+ donner son inverse sous forme de série. M̄ question pour $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$

Thm : $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A inversible

Si $\|B\| < 1/\|A^{-1}\|$, alors $(A-B)$ est inversible et :

$$\begin{aligned}(A-B)^{-1} &= \left((1-BA^{-1})A\right)^{-1} \\ &= A^{-1}(1-BA^{-1})^{-1} \\ &= A^{-1}(1+BA^{-1}+BA^{-1}BA^{-1}+ \_\_\_) \\ &= A^{-1}+A^{-1}BA^{-1}+A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}+ \_\_\_\end{aligned}$$

$\downarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{x} x^k$

$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = A_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on a : $A_\varepsilon = I_2 + B_\varepsilon$ où $B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

Donc si $\|B_\varepsilon\| < 1/\|I_2^{-1}\|$ alors A_ε est inversible

$\longrightarrow \|I_2^{-1}\| = \|I_2\| = 1$

$\longrightarrow B_\varepsilon^* B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

donc $\|B_\varepsilon\| = |\varepsilon|$

donc si $|\varepsilon| < 1$ on a A_ε inversible et

$$A_\varepsilon^{-1} = I_2^{-1}(I_2 - B_\varepsilon + B_\varepsilon^2 \_\_\_) = I_2 - B_\varepsilon + B_\varepsilon^2 + \_\_\_$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k B_\varepsilon^k$$

$\det(A_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$

si $|\varepsilon| < 1$ on a $\det(A_\varepsilon) > 0$

$$A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\varepsilon^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k B_\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{+\infty} B_\varepsilon^{2k} - B_\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{2k} I_2 - \varepsilon^{2k} B_\varepsilon$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{2k}(I_2 - B_\varepsilon)$$

$B_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 I_2$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\varepsilon^2)^k\right)\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}^2 \frac{1}{1-\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

(missing : TD7 9/03/26)

TD 8 16/03/26

Introduction au calcul fonctionnel : exercices 1, 2, 3

Exo 1 :

A, $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$, $P(A) = \sum_{k \geq 0} a_k A^k$

but : determiner le spectre de $P(A)$

$Sp(P(A)) = \{P(\lambda_j) ; \lambda_j \in Sp(A)\}$

rq : res ✓ pour toutes les matrices
$Sp\ \Delta = \text{diag coef}$

$\subseteq$: Soit $\lambda \in Sp(A)$, $x \neq 0$ v.p. associée. Donc $Ax = \lambda x$

$A^0 x = x = \lambda^0 x$

$A^2 x = \lambda^2 x$

$A^k x = \lambda^k x$

Donc $P(A)x = \left(\sum_{k \geq 0} a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda) x$

Donc $P(\lambda) \in Sp(P(A))$

Note : (pour avoir l'idée)
si A diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$\supseteq$: Hyp : A diagonalisable

On écrit $A = Q^{-1} D Q$ avec Q inversible
D diagonale

$$P(A) = \sum_{k \geq 0} a_k (Q^{-1} D Q)^k$$
$$= Q^{-1} \left(\sum_{k \geq 0} a_k D^k\right) Q = Q^{-1} P(D) Q$$
$$= Q^{-1} \cdot \text{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_m)) Q$$

Donc $P(A)$ et $P(D)$ sont semblables

Donc $Sp(P(A)) = Sp(P(D))$

donc $Sp(P(A)) \subset \{P(\lambda) ; \lambda \in Sp(A)\}$

rq : résultat vrai quand A est pas diagonalisable

2) $P(\lambda_i) = Q(\lambda_i)$ $\forall \lambda_i \in Sp(A)$

Mq $P(A) = Q(A)$ si A diagonalisable.

$A = U^{-1} D U$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)_{i = 1, \ldots, n}$

Alors $P(A) = U^{-1} P(D) U = U^{-1} Q(D) U = Q(A)$

$$\begin{pmatrix} P(\lambda_1) = Q(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) = Q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

• Contre exemple si A n'est pas diagonalisable

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (0 sont les vp, A n'est pas la matrice nulle
$\rightsquigarrow$ A n'est pas diagonalisable.

Si $P(0) = Q(0)$ (e.g. $P = 3X$, $Q = X$), $P(A) = 3A \neq A = Q(A)$

3) Si $A = P^{-1}DP$ et f une fonction
on définit $f(A) := P^{-1}\mathrm{diag}(f(\lambda_i))P$

- $(fg)(A) = P^{-1}\,\mathrm{diag}\big(\underbrace{(fg)(\lambda_i)}\big)\,P$

$$= \mathrm{diag}(f(\lambda_i))\,\mathrm{diag}(g(\lambda_i))$$

$I_D = PP^{-1}$

$$= f(A)g(A)$$

- $\mathrm{Spec}(f(A)) = \{ f(\lambda_i)\,;\ \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A) \}$

Exo 2:

1) A HDP, $f(A)$ HDP?
vrai ssi $f(\lambda_i) > 0\ \forall \lambda_i \in Sp(A)$

* si on diagonalise A en base orthonormée : $A = U^* D U$ alors $f(A) = U^* f(D)\, U$ (montre que $f(A)$ est hermitienne)

$D \downarrow \mathrm{diag}(\lambda_i)$; $f(D) = \mathrm{diag}(f(\lambda_i))$

2) $\|f(A)\| = \max\limits_{\mu \in \mathrm{Spec}(f(A))} |\mu| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |f(\lambda)|$

$f(A)$ hermitienne

car $Sp(f(A)) = f(Sp(A))$
A diagonalisable

3) $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A \overset{?}{\Rightarrow} f(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(A)$ pour f continue

a) Supposons f polynomiale ($f(X) = X^k$)

- $A_n^k \longrightarrow A^k$

Les coefficients de A_n^k sont des expressions polynomiales en les coeffs de A_n; donc ils dépendent continument des coeffs de A.

$\left(\begin{array}{l} M_N(\mathbb{C}) \longrightarrow M_N(\mathbb{C}) \\ A \longmapsto A^k \text{ est continue} \end{array} \right)$

Donc $A_n \longrightarrow A \Rightarrow A_n^k \longrightarrow A^k$

- pour passer de f polynomiale à f continue:

THM [d'approximation de Weierstraß]
$\forall f \in C(I)$, I intervalle fermé,
il existe une suite $(P_j)_{j \geq 0}$ de polynomes tq $\sup\limits_{x \in I} |f(x) - P_j(x)| \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

- Soit $(P_j)_{j \geq 0}$ convergeant vers A. Alors $\forall j$, $P_j(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P_j(A)$

- $f(A_n) = P_j(A_n) + (f - P_j)(A_n)$ (par le thm)

- On a : $\|(f-P_j)(A_n)\| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A_n)} |(f-P_j)(\lambda)|$ (Q2)

$$\leq \sup_{[-\|A_n\|,\, \|A_n\|]} |(f-P_j)(\lambda)| \underset{n \text{ assez grand}}{\leq} \sup_{[-\|A\|-1,\, \|A\|+1]} |(f-P_j)(\lambda)|$$

pour A_n hermitienne

pour que l'intervalle ne dépend pas de n:

$$\underset{j \geq j_0(\varepsilon)}{\leq} \varepsilon$$

THM

- On fix(A_n) Alors (pour) $A \geq f_n(p_j)(A_n)$

On a $\| p_j(A_n) - p_j(A) \| \leqslant \varepsilon$ (1)

Si j est assez grand (en fonction de ε)

$$\| p_j(A_n) - f(A_n) \| \leqslant \varepsilon \quad (2)$$

$$\| p_j(A) - f(A) \| \leqslant \varepsilon \quad (3)$$

donc $\| f(A_n) - f(A) \| \leqslant 3\varepsilon$ (1) + (2) + (3)

Exo 3 :

1) $\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Tr}(A(t)^K)$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t)^2 = \frac{\partial}{\partial t} A(t) A(t)$$

$$= A'(t)A(t) + A(t)A'(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t)^K = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{A(t) A(t) \_\_\_\_ A(t)}_{K \text{ fois}}$$

⚠! Les matrices ne sont pas commutatives

$$= A'(t) . A(t)^{K-1} + A(t) . A'(t) A(t)^{K-2} + \_\_\_\_ + A(t)^{K-1} A'(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{K-1} A(t)^j A'(t) A(t)^{K-1-j}$$

* $(f_1 \times \_\_\_\_ \times f_n)' = ((f_1 \times \_\_\_\_ \times f_{n-1}) \times f_n)'$

$$= \underbrace{(f_1 \times \_\_\_\_ \times f_{n-1})'}_{} \times f_n + f_1 \times \_\_\_\_ \times f_{n-1} \times f_n'$$

$$(f_1 \times \_\_\_\_ \times f_{n-2})' \times f_{n-1} + f_1 \times \_\_\_\_ \times f_{n-2} \times f_{n-1}'$$

Comme Tr est une application linéaire,

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial t} A(t)^K\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{K-1} A(t)^j A'(t) A(t)^{K-1-j}\right) \overset{?}{=} K . \mathrm{Tr}\left(A(t)^{K-1} A'(t)\right)$$

$$\rightarrow \mathrm{Tr}(A(t)^j A'(t) A(t)^{K-1-j}) = \mathrm{Tr}\left(A(t)^{K-1-j} A(t)^j A'(t)\right) = \mathrm{Tr}(A(t)^{K-1} A'(t))$$

⚠! $\frac{\partial}{\partial t} f(A(t)) \neq f'(A(t)) A'(t)$

a) $f(x) = x^2$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t)^2 = A(t)A'(t) + A'(t)A(t)$$

b) $f'(A(t))A'(t) = 2A(t)A'(t)$

(a) = (b) $\Leftrightarrow A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \qquad A'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'(0)A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A(0)A'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Exos : 2, 3, 4, 5, 6, 8}}$ | Feuille 6 (Calcul fonctionnel)

Exo 2:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -A^2 x \\ x(0) = x_0 \quad x(t) \in \mathbb{R}^m \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$ a pour sol $x(t) = \cos(At)x_0$

existence:

On a : $x(t) = \cos(tA)x_0$

$\dot{x}(t) = -A\sin(tA)x_0$

$\ddot{x}(t) = -A^2 \underbrace{\cos(tA)x_0}_{x(t)}$ ✓

(calcul: $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $f(tA) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n A^n$

$\frac{\partial}{\partial t} f(tA) = \sum_{n\geq 1} a_n n t^{n-1} A^n$

$= A \sum_{n\geq 1} a_n t^{n-1} A^{n-1} = A f'(tA)$)

unicité: (on change l'inconnu)

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -A^2 x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = B\dot{X}(t)$

$X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(On a donc l'equation: $\dot{X}(t) = BX(t)$

$X(0) = (x_0 \quad 0)$

a pour solution: $X(t) = e^{tB}X(0)$

Soit $X(t)$ une solution. Montrons que $t \longmapsto e^{-tB}X(t)$ est constante.

$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-tB}X(t)\right] = -Be^{-tB}X(t) + e^{-tB}\dot{X}(t)$

$= \left(-Be^{-tB} + e^{-tB}B\right)X(t) = 0$

Exo 3:

Mq l'exponentielle d'une matrice anti-hermitienne est unitaire

On a : $A^* = -A$

$(\exp(A))^* = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n\right)^*$

$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (A^*)^n$

$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} A^n$ car $A^* = -A$

$= \exp(-A)$ $(f(A)g(A) = fg(A))$

$= (\exp(A))^{-1}$

Exo4:

Calculer $\exp\Big(t\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}_{J}\Big)$

a) Par diagonalisation

• J diagonalisable:

$\chi_J = X^2+1$

Spec $J = \{-i, i\}$

• vecteurs propres:

$$J\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$v_1 = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ pour i

$v_2 = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$ v.p. pour $-i$

(on peut prendre le conjugué car J à valeurs réelles)

$J = P^{-1}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}P$, où $P^{-1} = \begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}$

$v_1 \xrightarrow{P} e_1 \xrightarrow{\times i} ie_1 \xrightarrow{P^{-1}} iv_1$

$$P = \frac{-i}{2}\begin{pmatrix}i&i\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i&1\\i&1\end{pmatrix}$$

donc $e^{tJ} = P^{-1}e^{t\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}}P$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix}e^{it}&0\\0&e^{-it}\end{pmatrix}P$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{it}&0\\0&e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&1\\i&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}ie^{it}&-ie^{-it}\\e^{it}&e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&1\\i&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(e^{it}+e^{-it}) & i(e^{it}-e^{-it})\\ -i(e^{it}+e^{it}) & (e^{it}+e^{-it})\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(t)&-\sin(t)\\ \sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix}$$

b) Par série entière

$J^2 = -I_2$.

Donc $e^{tJ} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\underbrace{J^{2n}}_{(-1)^nI_2} + \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\underbrace{J^{2n+1}}_{(-1)^{2n}J}$

$$= \cos(t)I_2 - \sin(t)J$$

$$= \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

($e^{ix} = \frac{\sum (ix)^n}{n!}$

$\cos(x) = \mathrm{Re}\, e^{ix}$

$\sin(x) = \mathrm{Im}\, e^{ix}$)

c) eq. différentielle associée.

• $\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{tJ} = -e^{tJ}$

résoudre: $\ddot{x}(t) = -x(t)$.

Exo 5:

Mq : $\exp(A+B) = \lim_{n\to+\infty} \left(\exp(A/n)\exp(B/n)\right)^n$

- Mq $\left(Id+\frac{A}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A)$ (préliminaire)

- $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+x/n)}$
$= e^{n(x/n + o(1/n))}$
$= e^{x+o(1)} \longrightarrow e^x$

(ne fonctionne pas pour les matrices)

- $\left(Id+\frac{A}{n}\right)^n \overset{\text{formule du binôme}}{=} \sum_{K=0}^{n} \binom{K}{n}\frac{1}{n^K} A^K \overset{?}{\approx} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{1}{K!}A^K$

pour K fixé

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{K!}$

$\rightarrow \frac{1}{n^K}\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}\cdot\frac{1}{n^K} = \frac{1}{K!}\cdot\underbrace{\frac{n(n-1)\text{———}(n-K+1)}{n^K}}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \left(= 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\text{———}\left(1-\frac{(K-1)}{n}\right)\right)$

$= \sum_{K=0}^{+\infty}\left(\binom{n}{K}\frac{1}{n^K}\mathbb{1}_{K\leq n}\right)A^K$

* $\sum_{K=0}^{+\infty} a_{n,K}A^K \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{K=0}^{+\infty}\frac{1}{K!}A^K$

il faut que : $a_{n,K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/K!$

et $\|a_{n,K}A^K\| \leq u_K \in \mathbb{R}$

tq $\sum u_K < +\infty$

(thm cv dominée)

On a la majoration: $\|A^K\| \leq \|A\|^K$

$a_{n,K} = \frac{1}{K!}\,\frac{n(n-1)\text{———}(n-K-1)}{n^K}$

$\leq \frac{1}{K!}(1)(1-1/n)\text{———}\left(1-\frac{(K-1)}{n}\right)$ pour $n \geq K$

$\leq \frac{1}{K!}$

et $u_K = \frac{1}{K!}\|A^K\|$

$\sum u_K = \exp(\|A\|) < +\infty$

donc $\left(Id+\frac{A}{n}\right)^n \longrightarrow \exp(A)$

- Lie-Trotter.

$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) \overset{\text{pour } n \text{ grand (DL1)}}{=} \left(Id+\frac{A}{n}+\frac{R_1^{(n)}}{n^2}\right)\left(Id+\frac{B}{n}+\frac{R_2^{(n)}}{n^2}\right)$

$= \left(Id + \frac{A+B}{n} + \frac{R_3^{(n)}}{n^2}\right)$ avec $\|R_3^{(n)}\| \leq C$ indépendante de n

donc $\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(Id+\frac{A+B}{n}+\frac{R_3^{(n)}}{n^2}\right)^n$

• $\left(Id + \frac{A}{n} + \frac{R_n}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^A$

$R_n \leqslant c$

En reprenant la preuve: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{k\leqslant n} \frac{n(n-1) \cdots (n-k)}{n^k\, k!}\left(A+\frac{R_n}{n}\right)^k$

pour un k fixé: $\longrightarrow \frac{1}{k!}A^k$ car $\left\|\frac{R_n}{n}\right\| \leqslant \frac{c}{n} \longrightarrow 0$

hyp de domination:

$$\left\|\left(A+\frac{R}{n}\right)^k\right\| \leqslant \left\|\left(A+\frac{R_n}{n}\right)\right\|^k$$

$$\leqslant \left(\|A\|+c\right)^k$$

indépendante de n

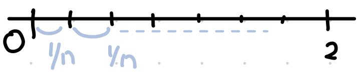
pv ok ✓

donc

$$\boxed{\left(Id + \frac{A+B}{n} + \frac{R_3(n)}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{A+B}}$$

2) En déduire un schéma numérique de résolution de $\dot{x} = (A+B)x$ dans le cas où $\exp(tA)$ et $\exp(tB)$ sont faciles à calculer

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = B(y(t)) & ; t\in\left[\frac{2k}{n}, \frac{2k+1}{n}\right] \\ Ay(t) & ; t\in\left[\frac{2k+1}{n}, \frac{2k+2}{n}\right] \end{cases}$$



Exo 6:

Feuille 8

Ex 1:

SDP, mq la méthode de Richardson s'identifie à la méthode du gradient pour la minimisation de $\frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$.
Tracer l'allure des courbes de niveau + itérés de la méthode de gradient.
$\alpha < 2/\lambda_N$? Taux de convergence?

* notes: $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + o(h)$
Ici $\hookrightarrow = \frac{1}{2}\langle x+h, A(x+h)\rangle - \langle b, x+h\rangle = f(x) + \frac{1}{2}(\langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle - \langle b,h\rangle) + O(h^2)$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice définie positive
On considère $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$

A est symétrique: $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A^T + A)x - b$ [gradient d'une forme quadratique]
$= Ax + b$

méthode du gradient à pas $\alpha > 0$:
$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$
$= x_k - \alpha(Ax_k - b)$
$= x_k + \alpha(b - Ax_k)$
or méthode de Richardson pour résoudre $Ax = b$ est $x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k)$

- courbes de niveau:

le min x^* vérifie $\nabla f(x^*) = 0 \iff Ax^* - b = 0$
$\iff x^* = A^{-1}b$

On pose $y = x - x^*$. Alors
$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*)$

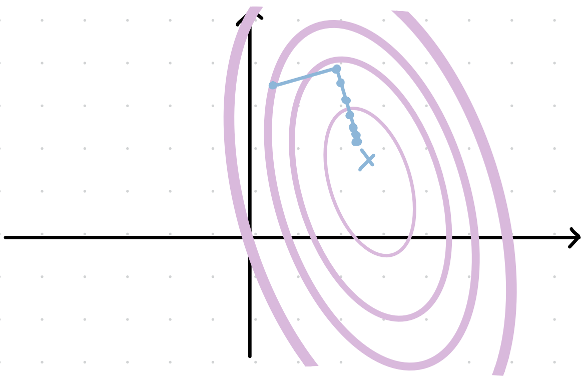
$= f(x^*) + \frac{1}{2}y^TAy$

A def pos: $\exists$ une base orthonormée de vecteurs propres (u_i) avec $Au_i = \lambda_i u_i$, $0 < \lambda_1 \leq \text{———} \leq \lambda_n$
si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, alors $y^TAy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$

donc les courbes de niveau $f(x) = c$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 2(c - f(x^*))$$

$\uparrow$ ellipses centrées en x^*
plus allongées dans la direction
associée à la plus petite valeur propre



- condition sur α:

On pose $e_k = x_k - x^*$
$e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$
$= x_k - \alpha(Ax_k - b) - x^*$
$= x_k - \alpha A(x_k - x^*) - x^*$ $(Ax^* = b)$
$= (I - \alpha A)e_k$

Dans une base de vecteurs propres de A, $e_K = \sum_{i=1}^{n} e_{K,i} u_i$

Donc $e_{K+1} = (I_n - \alpha A) e_K$

$= \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha\lambda_i) e_{K,i} u_i$

pour avoir convergence :

il suffit que $|1-\alpha\lambda_i| < 1 \ \forall i$

$\Leftrightarrow -1 < 1-\alpha\lambda_i < 1$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha\lambda_i < 2$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2/\lambda_i$

Il faut donc $0 < \alpha < 2/\lambda_N$ où $\lambda_N = \lambda_{max}(A)$

taux de convergence :

$e_K = (I - \alpha A)^K e_0$

donc $\|e_K\|_2 \leq \rho(\alpha)^K \|e_0\|_2$ où $\rho(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} |1-\alpha\lambda_i|$

de plus, $f(x_K) - f(x^*) = \frac{1}{2} e_K^T A e_K$

donc $f(x_K) - f(x^*) \leq \rho(\alpha)^{2K} (f(x_0) - f(x^*))$

meilleur pas constant. $\alpha^* = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_N}$, taux optimal : $\rho^* = \dfrac{K-1}{K+1}$, avec $K = \dfrac{\lambda_N}{\lambda_1}$

Exo 2 :

Mq la méthode de Richardson appliquée à la résolution de $-u'' = f$ avec conditions au bord de Dirichlet en utilisant la méthode des différences finies à N points de grille converge pour un pas suffisament petit. Complexité ?

On considère $(*)$ $-u''(x) = f(x)$, $x \in [0,1]$

avec conditions de Dirichlet : $u(0) = u(1) = 0$

• discrétisation par différences finies :

on prend une grille uniforme : $x_K = K/N$, $K = 0, \_\_\_, N$

on note $U_K \simeq u(x_K)$, $u_0 = u_N = 0$

developpement de Taylor :

$u(x_K+h) = u(x_K) + h u'(x_K) + \frac{h^2}{2} u''(x_K) + O(h^3)$

$u(x_K-h) = u(x_K) - h u'(x_K) + \frac{h^2}{2} u''(x_K) + O(h^3)$

donc $u''(x_K) \simeq \dfrac{u(x_{K+1}) - 2u(x_K) + u(x_{K-1})}{h^2}$

$\simeq N^2(-2U_K + U_{K+1} + u_{K-1})$ $[h = 1/N]$

$(*) \Leftrightarrow -N^2(-2U_K + U_{K+1} + U_{K-1}) = f(x_K)$

$\Leftrightarrow N^2(-U_{K+1} + 2U_K - U_{K-1}) = f(x_K)$

les équations donnent :

$$\begin{cases} N^2(2U_1 - U_2) = f(x_1) \\ N^2(-U_1 + 2U_2 - U_3) = f(x_2) \\ \quad \vdots \\ N^2(-U_{N-2} + 2U_{N-1}) = f(x_{N-1}) \end{cases}$$

le système discret est donc : $MU = F$

$$M = N^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{N-1}(\mathbb{R})$$

et $F = (f(x_1), \ldots, f(x_{N-1}))^T$

- M est SDP

Pour $X = (X_1, \ldots, X_{N-1})$, $X_0 = X_N = 0$

$$\langle MX, X \rangle = N^2 \sum_{K=0}^{N-1} (X_{K+1} - X_K)^2 \geq 0$$

et $\langle MX, X \rangle = 0 \Rightarrow X_{K+1} = X_K \ \forall K$, or $X_0 = X_N = 0$ donc $X = 0$
donc M SDP

- Application de la méthode de Richardson

$MU = F$
$U^{(n+1)} = U^{(n)} - \alpha(MU^{(n)} - F)$
$e^{(n)} = U^{(n)} - U^*$ où U^* est la sol exacte du système discret $MU = F$

$$\begin{aligned} \text{donc } e^{(n+1)} &= U^{(n+1)} - U^* \\ &= U^{(n)} - \alpha(MU^{(n)} - F) - U^* \\ &= U^{(n)} - \alpha M(U^{(n)} - U^*) - U^* \\ &= (I - \alpha M)\, e^{(n)} \end{aligned}$$

donc la méthode converge si $\rho(I - \alpha M) < 1$

M SDP : $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_{max}(M)}$

On majore $\lambda_{max}(M)$. Pour $\|X\| = 1$

$$\begin{aligned} \langle MX, X \rangle &= N^2 \sum_{K=0}^{N-1} (X_{K+1} - X_K)^2 \\ &\leq N^2 \sum_{K=0}^{N-1} 2(X_{K+1}^2 + X_K^2) \\ &\leq 4N^2 \|X\|^2 \leq 4N^2 \end{aligned}$$

En choisissant $0 < \alpha < 1/2N^2$ (ex : $\alpha = c/N^2$; $0 < c < 1/2$)
Richardson converge

complexité + comparaison avec W

Feuille 9 exos 1,2

Exo1:

méthode de Garlekin à $Ax=b$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ et $X=Y=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

$A\in\mathbb{C}^{N\times N}$, $b\in\mathbb{C}^N$ $\quad n<<N$

$X\subset\mathbb{C}^N$ de dim n

Cours: $Y\subset\mathbb{C}^N$ de dim n

On cherche $x\in X$ tq $Ax-b\perp Y$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ $\quad X=Y=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Soit $x\in X$. On a $x=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}$. On cherche x_1 tq

$$\left\langle Ax-b, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\3x_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}x_1-b_1\\3x_1-b_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow x_1=b_1$$

Donc la solution au problème de Garlekin est $x=\begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix}$

Exo2:

$\min\limits_{x\in X}\frac{1}{2}x^TAx-x^Tb$

1) Montrer l'existence et l'unicité

2) donner les conditions d'optimalité au premier ordre

A SDP réelle

3) Mq la sol s'identifie à la méthode de Garlekin avec $X=Y$

$f:\mathbb{C}^N\longrightarrow\mathbb{C}$

$x\longmapsto\frac{1}{2}{}^txAx-{}^tbx$, A SDP

On veut la minimiser sur $X\subset\mathbb{R}^N$ et mq le minimiseur est la solution approchée de $Ax=b$ donnée par la méthode de Galerkin avec $X=Y$

$X=\mathrm{Vect}(\underbrace{e_1,\text{———},e_n}_{\text{BON}})$ $\quad \mathbb{C}^N=\mathrm{Vect}(\underbrace{e_1,\text{———},e_N}_{\text{BON}})$

La solution de Garlekin à $Ax=b$ est le $x\in X$ tq $Ax-b\perp X$

On a $x=\sum\limits_{i=1}^n c_ie_i$. On veut: $\forall y\in\{1,\text{——},n\}$

$$\langle Ax-b,e_j\rangle=0 \Leftrightarrow \left\langle\sum_{i=1}^n c_iAe_i-b, e_j\right\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i\langle Ae_i,e_j\rangle=\langle b,e_j\rangle$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n\langle e_j,Ae_i\rangle c_i=\langle e_j,b\rangle$$

$$\Leftrightarrow A_Xb=b_X,\ \text{où } A_X=\left(\langle e_i,Ae_j\rangle\right)_{1\leq i,j\leq n}\in\mathbb{C}^{n\times n},\ b_X=\left(\langle e_i,b\rangle\right)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{C}^n$$

$$\begin{array}{c} \\ X\left\{ \right. \end{array}\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{}}^{X} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}\Big\} x$$

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\,{}^t x A x - {}^t b x = \frac{1}{2}\,{}^t x A_X x - {}^t b_X x$$

En effet, ${}^t b x = \begin{pmatrix} \boxed{{}^t b_X} & {}^t b_{reste} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{x} \\ 0 \end{pmatrix} = {}^t b_X x$

$${}^t x A x = \begin{pmatrix} \boxed{{}^t x} & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} A_X & * \\ \hline * & * \end{array}\right)\begin{pmatrix} \boxed{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{{}^t x} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_X x \\ * \end{pmatrix} = {}^t x A_X x$$

f est convexe et coercive d'où l'existence et l'unicité d'un minimum

Ce minimum est l'unique point où $\underset{A_X x - b_X}{\underset{\shortparallel}{\nabla f_X}} = 0$

Le minimiseur de f est donc le $x \in X$ tq $A_X x = b_X$, c'est la solution de Garlekin