



Rappels:

Loi d'une variable aléatoire $P(X=x)$ pour $x \in \Omega \rightarrow$ mode de x : le x tq $P(X=x)$ soit maximal (strictement) si il existe

Espérance $\sum x P(X=x)$

Variance $E[(X - E(X))^2]$

Exercice 1:

$Y_1, \dots, Y_n \sim \text{i.i.d Bernoulli}(p)$

$P[Y_i=0] = 1-p$ $P[Y_i=1] = p$

$\tilde{S}_n = Y_1 + \dots + Y_n \sim \text{Bin}(n, p)$

i.e. $P(\tilde{S}_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

↓ somme de variable indép de $\tilde{m}$ loi

Fact: $\tilde{S}_n$ a la même loi que $2\tilde{S}_{n-n} \Rightarrow \frac{\tilde{S}_n + n}{2} \sim \text{Bin}(n, p)$

$\tilde{Y}_i$ a la même loi que $2Y_i - 1$

$$P(S_n = k) = P[\tilde{S}_n = \frac{n+k}{2}] = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{n+k}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P[S_n = k] = P[\sum_{i=1}^n X_i = k] \\ = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ \text{tq } \sum x_i = k}} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$\text{par indép} = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ \sum x_i = k}} P[X_1 = x_1] \dots P[X_n = x_n]$$

$$= \sum P[2Y_i - 1 = x_i] \dots P[2Y_n - 1 = x_n]$$

$$= \sum P[(2Y_i - 1 = x_1, \dots, 2Y_n - 1 = x_n)]$$

$$= P[2\tilde{S}_n - n = k] \quad \leftarrow \text{formule des probas totales } P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\omega]$$

$X_k = aY_k + b$ (transformation affine)

si $Y_k = 0$, $X_k = -1 \Rightarrow b = -1$ (voir probas)

si $Y_k = 1$, $X_k = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$

donc $X_k = 2Y_k - 1$

$$3) E[S_n] = \underbrace{2E[\tilde{S}_n] - n}_{E[Y_1] + \dots + E[Y_n] = np} \\ = 2np - n = \boxed{(2p-1)n}$$

• linéarité de E : X variable aléatoire réelle, $a, b \in \mathbb{R}$; $E[ax+b] = aE[X] + b$

$$E[f(x)] = \sum f(x) P[X=x]$$

$$4) \text{Var}(S_n) = \sum_k (k - (2p-1)n)^2 P[S_n = k] \quad (\text{formule de la variance})$$

$$(k^2 = k(k-1) + k)$$

$$S_n \sim 2\tilde{S}_n - n \\ \downarrow \text{Bin}(n, p)$$

• prop de la variance: $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$

→ Si $Z_1, \dots, Z_n$ indép, alors $\text{Var}(Z_1 + \dots + Z_n) = \text{Var}(Z_1) + \dots + \text{Var}(Z_n)$

→ Si $\tilde{S}_n \sim \text{Bin}(np)$, alors $\text{Var}(\tilde{S}_n) = np(1-p)$

$$\left(\begin{aligned} \tilde{S}_n &= Y_1 + \dots + Y_n \text{ toutes indép} \\ \text{Donc } \text{Var} \tilde{S}_n &= n \text{Var}(Y_i) = E[(Y_i - p)^2] \\ &= (0-p)^2 P[Y_i=0] + (1-p)^2 P[Y_i=1] = p(1-p) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 \end{aligned} \right)$$

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}(2\tilde{S}_n - n) \\ = 2^2 \text{Var}(\tilde{S}_n) = 4np(1-p)$$

2) (on cherche le max de la fonction $P(S_n = K)$)

(Pour quel K $P[\tilde{S}_n = K]$ est maximale)

→ "tableau de variations"

(pour quel K a-t-on $q_{K+1} > q_K$) $q_K = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$

Soit $0 \leq K < n$, on a:

$$q_{K+1} > q_K \Leftrightarrow \frac{q_{K+1}}{q_K} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{q_{K+1}}{q_K} > 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{n!}{(K+1)!(n-K-1)!} p^{K+1} (1-p)^{n-K-1}}{\frac{n!}{K!(n-K)!} p^K (1-p)^{n-K}} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{K!}{(K+1)!} \cdot \frac{(n-K)!}{(n-K-1)!} \cdot \frac{p}{1-p} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-K}{K+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1$$

$$\Leftrightarrow np - Kp > K+1 - (K+1)p$$

$$\Leftrightarrow (n+1)p > K \quad \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$$

$$K_{\max} = \lfloor (n+1)p \rfloor$$

Donc: $q_0 < q_1 < \dots < q_{K_{\max}} < q_{K_{\max}+1}$

et $q_{K_{\max}+1} > q_{K_{\max}+2} > \dots > q_n$

Donc le mode est $K_{\max}+1 = \lfloor (n+1)p \rfloor$

↓
de S_n

Donc le mode de $2\tilde{S}_n - n$ est $2\lfloor (n+1)p \rfloor - n$

$$5) P[S_{2n} = 0] = P[\tilde{S}_{2n} = n] = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

trouver l'équivalent:

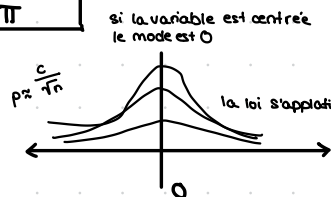
$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} \quad \text{Formule de Stirling} \quad n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{2n!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4n\pi}}{\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

$$P[S_{2n} = 0] \sim (4p(1-p))^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$$p = 1/2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$$p \neq 1/2 \rightarrow c^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad \text{où } c < 1$$



• Ineq de Bienaymé Tchebychev

Si X réelle (qui admet une variance)

alors $P[|X - E[X]| > t] \leq \frac{E^2 \text{Var}(X)}{t^2}$

• Markov: si X v.a. positive, $P[X > t] \leq \frac{E[X]}{t}$

$$\begin{aligned} &= E[\mathbb{1}_{X > t}] \\ &= 0 \cdot P(X \leq t) + 1 \cdot P(X > t) \leq E\left[\frac{X}{t}\right] \quad \text{si } X > 0 \quad \text{(rappel)} \\ &\text{et } \mathbb{1}_{X > t} \leq \frac{X}{t} \quad \text{si } X > 0 \end{aligned}$$

Exercice 1:

$\mathcal{A}$ tribu de Ω : $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$ $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ $\uparrow$ unions dénombrables	$\mathcal{A}$ collection de parties de Ω , algèbre d'ensembles $\mathcal{S}$: $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$ $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$ $\uparrow$ unions finies
---	--

$\Omega =]0, 1[, \mathcal{A}_0$ collection des $]a, b]$ avec $0 \leq a \leq b \leq 1$

1) $\mathcal{M}_q \mathcal{A}_0$ est une algèbre d'ensembles

• $]0, 0] = \emptyset \in \mathcal{E}$

• Soient $A, B \in \mathcal{E}$

alors $\exists (A_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $(B_n)_{0 \leq n \leq M}$ avec $\forall n$:

A_n, B_n intervalles de la forme $]a, b]$

$A \cup B = \left(\bigcup_{i=0}^N A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^M B_i \right)$: c'est bien une réunion finie d'intervalles de la forme $]a, b]$

• $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leq 1$

Si A est de la forme

(*) $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i]$ avec $a_i < b_i < a_{i+1}$

Alors $A^c =]0, a_0] \cup \bigcup_i]b_i, a_{i+1}] \cup]b_n, 1]$

$$]0, 1[\setminus \bigcup_i]a_i, b_i] = \bigcap_i]0, 1[\setminus]a_i, b_i] = \bigcap_i \left(]0, a_i] \cup]b_i, 1[\right) = \bigcap_i I_i^+ \cap I_i^- = I_1^{e_1} \cap \dots \cap I_n^{e_n}$$

forme $]a_i, b_i]$

En fait, toute union finie d'intervalles $]a_i, b_i]$ est de la forme (*)

(*) $A = \bigcup_{x \in A} I_x$
 $\{ I_x, x \in A \}$ l'intervalle max contient x

2) $\mathcal{M}_q \mathcal{A}_0$ pas une tribu

$A = \bigcup_{n \geq 1}]0, 1 - 2^{-n}] =]0, 1[\notin \mathcal{A}_0$

ou $A = \bigcup_{n \geq 1}]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ (infinité de composantes connexes)

3) $\mathcal{A}_1$: collection des elts qui sont une union dénombrable

$\mathcal{A}_1$ tribu?

$\mathcal{A}_1$ pas une tribu car $\{ I \mid I \notin \mathcal{A}_1 \} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]0, 1 - \frac{1}{n}] \right)^c \in \mathcal{A}_1$ ($\mathcal{A}_1$ pas stable par complémentaire)

Exercice 2:

$(\Omega, \mathcal{F})$

atome de $\mathcal{F}$: élément de $\mathcal{F} \neq \emptyset$

ne contient aucun elt de $\mathcal{F}$ autre que $\emptyset$ et lui-même

1) def d'un atome

$\{ x \in \mathcal{F}, x = \emptyset, \forall x' \in \mathcal{F} \setminus \{ \emptyset, x \}, x' \not\subseteq x \}$

$A \in \mathcal{F}$ est un atome si:

$\forall A' \in \mathcal{F}, [A' \neq \emptyset, A' \neq A] \Rightarrow A' \not\subseteq A$

$\forall A' \in \mathcal{F}, A' \subseteq A \Rightarrow [A' = \emptyset \text{ ou } A' = A]$

2) Mq deux atomes sont disjoints

Soit A, B deux atomes distincts ($A \neq B$), montrons que $A \cap B = \emptyset$

Sinon, $\underbrace{A \cap B}_{\neq \emptyset} \subseteq A$, donc $A \cap B = A$ car A atome

Similairement, $\underbrace{A \cap B}_{\neq \emptyset} \subseteq B$, donc $A \cap B = B$
 $\downarrow$
 atome

$$A \cap B = A \text{ (i.e. } A \subseteq B)$$

$$A \cap B = B \text{ (i.e. } B \subseteq A)$$

Donc $A = B$ contradiction

3) Atomes de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ ens de parties de $\mathbb{R}$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \mathcal{T}$$

$\downarrow$ tribu $\uparrow$ tribu
 engendré $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{A}$

Les atomes de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont les singletons.

$$\forall x, \{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = [\mathbb{R}, x]$$

- si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \subseteq \{x\}$, alors $A = \emptyset$ ou $A = \{x\}$

Donc les $\{x\}$ sont des atomes

Si A atome, alors $A \neq \emptyset$

Donc $\exists x \in A$, alors $\{x\} \subseteq A$ donc $\{x\} = A$
 $\neq \emptyset$

4) décrire $\sigma(\mathcal{A})$ (Si les (A_i) sont quelconques)

Soit $(B_1, \dots, B_{2n}) = (A_1, A_1^c, A_2, A_2^c, \dots)$ (On a rajouté les complémentaires)

On prétend que: $\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^N \bigcap_{j \in I_i} B_j : I_1, \dots, I_N \subseteq \{1, \dots, 2n\}, N \geq 0 \right\}$

I_i , $\mathcal{A}$ partition

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i, I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\} \left(\bigcup_{i \in \emptyset} A_i \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \right)$$

preuve:

• $\mathcal{A}' \subseteq \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ tribu} \\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}}} \mathcal{T}$ car les $\bigcup_{i \in I} A_i$ sont des unions finies d'éléments de $\mathcal{T} \forall \mathcal{T}$

• et $\mathcal{A}'$ tribu car:

- $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}'$
 $\uparrow \bigcup_{i \in \emptyset} A_i$

- stabilité par union dénombrable:

Si $B_k \in \mathcal{A}', \forall k$. Alors $\bigcup_{k \geq 1} B_k = \bigcup_{i \in J} A_i$
 $\uparrow \bigcup_{i \in J_n} A_i$

Si $B \in \mathcal{A}', B = \bigcup_{i \in I} A_i$

$$\text{Alors } B^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \neq i} A_j = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus I} A_i$$

montrer par double inclusion

5) Atomes de $\sigma(\mathcal{A})$

Les atomes de $\sigma(\mathcal{A})$ sont $A_1, \dots, A_n$

Soit B atome de $\sigma(\mathcal{A})$

Alors $B = \bigcup_{i \in I} A_i$, avec $I \neq \emptyset$
 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

En particulier, $\exists i \text{ tq } A_i \subseteq B$
 $\uparrow$
 $\neq \emptyset$ atome

Donc $B = A_i$

Inversement, $\forall i, A_i \neq \emptyset$ et si $\bigcup_{j \in I} A_j \subseteq A_i$

Alors $I = \{i\}$ car les (A_j) distincts, donc $\bigcup_{j \in I} A_j = \emptyset$ ou A_i

Exercice 3

Masses de Dirac

$x \in \mathbb{R}$, S_x est une mesure borélienne définie par : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), S_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de nbs ds $[0,1]$ tq $\sum_{n \geq 0} p_n = 1$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de nbs réels. $\mu = \sum_{n \geq 0} p_n \delta_{x_n}$

1) μ mesure de probabilité

On doit vérifier $\mu(\mathbb{R}) = 1$

$$\mu(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} p_n \delta_{x_n}(\mathbb{R}) = \sum_{n \geq 0} p_n = 1$$

2) X v.a. de loi μ .

Soit $U \sim \text{Unif}([0,1])$

On pose $X = \inf \{x : \mu(-\infty, x] \geq U\}$

$$\Omega = \mathbb{N}$$

$$p_n = 2^{-n} \quad n \geq 1, \quad p_1 = 1/2, \quad p_2 = 1/4, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1 \quad (\text{série géométrique})$$

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n$$

3) Espérance de X :

$$\int X d\delta_{\omega} = X(\omega)$$

$$\int f d(u+v) = \int f du + \int f dv$$

$$\int X d\mu = \int X d\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{x_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int X d\delta_{x_n}$$

$$4) \text{ Variance de } X. \quad = \sum_{n=1}^{\infty} p_n X(x_n)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_n X^2(x_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n X(x_n)\right)^2$$

5) $E(|X|) < +\infty \Leftrightarrow X$ est intégrable

TD 3

Exo 1 X v. a. $\mathcal{U}[0,1]$

o) construction de X

$$([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \frac{\text{Leb}(\cdot \cap [0,1])}{\text{Leb}([0,1])})$$

$$(\text{Unif sur } [a,b] \rightsquigarrow ([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \frac{\text{Leb}(\cdot \cap [a,b])}{b-a}))$$

Exo: Si (ε_n) n.i.i.d. de loi $\text{Ber}(1/2)$ Alors $U = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n 2^{-n} \sim \text{Unif}([0,1])$

$\mathbb{P}$ rationnel?

i) $\forall x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ on a que $\mathbb{P}(X=x) = \text{Leb}(\{x\}) = \text{Leb}([x,x]) = 0$

Par union dénombrable d'ensembles disjoints $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Q} \cap [0,1]) = \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mathbb{P}[X=x] = 0$

2) $\mathbb{P}$ que 7 apparaisse dans l'écriture décimale de X

Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

et notons le développement décimal de U : $U = 0, Y_0 Y_1 Y_2 \dots$ avec $Y_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$

a) Loi de Y_0 :

$\forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$\mathbb{P}(Y_0 = k) = 1/10$$

b) Montrons que $U = \frac{Y_0}{10} + \frac{U'}{10}$ où $U' \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendant de Y_0

$\Rightarrow$ démonstration de l'indépendance

On écrit:

$$\mathbb{P}(U \in \frac{k}{10} + \frac{1}{10} [a,b]) = \mathbb{P}(Y_0 = k, U' \in [a,b])$$

$\leftarrow U$ suit la loi uniforme

$$\text{or: } \mathbb{P}(U \in \frac{k}{10} + \frac{1}{10} [a,b]) = \mathbb{P}(U \in [\frac{k+a}{10}, \frac{k+b}{10}]) = \frac{b-a}{10}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_0 = k, U' \in [a,b]) = \frac{1}{10} (b-a)$$

$$\text{Donc } Y_0 \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, 9\})$$

$$U' \sim \mathcal{U}([0,1])$$

$$\text{et } Y_0 \perp U'$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[U \text{ n'a pas de } 7] = \mathbb{P}[Y_0 \neq 7] \cdot \mathbb{P}[U' \text{ n'a pas de } 7] \text{ indépendants}$$

$$= 9/10 \mathbb{P}[U' \text{ n'a pas de } 7] \text{ } U' \text{ et } U \text{ ont m\^me loi}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(U \text{ n'a pas de } 7) = 0$$

3) $Y = \pi(X - 1/2)$. Loi de Y (Loi de $f(X)$ $\rightarrow$ formule de transfert (variables aléatoires à densité))

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, alors

$$E(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx$$

$$E(Y) = \int f(x) d\mathbb{P} = \int f(\pi(x - 1/2)) d\mathbb{P}_X(x) \quad \text{fini et abél. bel. densité}$$

$\hookrightarrow X \sim \mathcal{U}([0,1])$ sa densité est 1

$$\text{formule de transfert} = \int_0^1 f(\pi(x - 1/2)) dx \quad \text{alab Lebesgue 3a Riemann!}$$

$$\mu = \pi(x - 1/2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u) \frac{du}{\pi} = \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{\pi} 1_{[-\pi/2, \pi/2]} du$$

$$\text{(changement de variable)}$$

$$x = \frac{u}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$dx = \frac{du}{\pi}$$

$\Rightarrow$ donc $Y \sim \text{Unif}([-\pi/2, \pi/2])$ (rappel: densité de la loi uniforme

$$\hookrightarrow \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$$

Formule de transfert:

$$E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathbb{P}_X$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathbb{P}_X \quad \text{où } \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) \\ = \int_B f d\lambda \quad \text{loi à densité si } \exists f \text{ tel } f=1$$

$$\text{[Thm pour intégrer par rapport à une mesure à densité]} \quad \int g d\mathbb{P}_X = \int g f d\lambda$$

[Méthode de la fonction muette] (cf.)

Pour montrer que $\mu = \nu$ (deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$)

Il suffit de montrer que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bornée, on a $\int f d\mu = \int f d\nu$
continue

4) Loi de $\tan(Y)$?

$$\int f dP_{\tan Y} = \int f \circ \tan dP_Y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tan(y)) \frac{dy}{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{du}{\pi(1+u^2)}$$

Formule de transfert: $\int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_X(x)$

Posons $Z = \tan(Y)$

$$\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mesurable, } \int f(z) dP_Z(z) = \int f(\tan(y)) dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(\tan(y)) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-\pi/2, \pi/2]} dy$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tan(y)) \frac{dy}{\pi} \quad (\text{car } Y \sim U(-\pi/2, \pi/2])$$

donc $dP_Y(y) = \frac{1}{\pi} dy$

$z = \tan(y)$
 $y = \arctan(z)$ et quand $y \in [-\pi/2, \pi/2]$; $z \in \mathbb{R}$
 $dy = \frac{dz}{1+z^2}$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{1}{\pi(1+z^2)} \mathbb{1}_{[-\pi/2, \pi/2]} dz$$

densité de F .

donc Z est la loi de densité sur $\mathbb{R}$, de densité $\frac{1}{\pi(1+z^2)}$

Ex2 X v.a. $\sim \text{Unif}[0,1]$

U = longueur du plus petit intervalle parmi $[0, x]$ et $[x, 1]$, x plus grand

mesures, images vs lois à densité

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow[\text{mes}]{f: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')} (\Omega', \mathcal{F}')$$

μ mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$

La mesure de μ par f est $\forall A \in \mathcal{F}', \nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ $\begin{matrix} \mu \circ f^{-1} \\ \nu = f_* \mu \end{matrix}$

$$E[Y] = \int f(y) dP = \int_{\mathbb{R}} \overbrace{f(\pi(x-1/2))}^{g(x)} dP \stackrel{\text{transfert}}{=} \int_{\mathbb{R}} \overbrace{f(\pi(x-1/2))}^{\text{étapes sans Zafrou!}} dP_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\pi(x-1/2)) \times \text{densité} d\lambda$$

$$= \int_{[0,1]} \frac{1}{\pi} d\lambda$$

$$= \int_0^1 f(\pi(x-1/2)) dx$$

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_B f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_B d\lambda$$

TD 4

Ex1

$$\mathbb{R}^d \quad x = (x^1, \dots, x^d) \quad \|x\|_2 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^d)^2}$$

$$y = (y^1, \dots, y^d) \quad \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d x^i y^i, \quad \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$$

Hyp: $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|u_i\|_2 = 1$

Mq: $\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \text{ tq } \|\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_n u_n\|_2 \leq \sqrt{n}$

Prenons $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ v.a. i.i.d., $\forall i \quad \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = 1/2$$

On définit $S = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_n u_n$

$$\|S\|_2^2 = \langle S, S \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i, \sum_{j=1}^n \varepsilon_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle u_i, u_j \rangle \quad [\text{bilinearité}]$$

$$\mathbb{E}[\|S\|_2^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle u_i, u_j \rangle\right]$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] \langle u_i, u_j \rangle$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \hookrightarrow \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_2^2 = n$$

par définition de l'espérance

$$\mathbb{E}[\|S\|_2^2] = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}^n} \frac{\mathbb{P}(\varepsilon_1 = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon_n)}{2^n} \|\varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n\|_2^2$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}^n} \|\varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n\|_2^2 = n$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \text{ tq } \|\varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n\|_2^2 \leq n$$

1) On pose $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ v.a. de probas $1/2$.

$$S = \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n$$

$$\|S\|_2^2 = \langle S, S \rangle$$

2) $\mathbb{E}(\|S\|_2^2) =$

↳ définition de $\mathbb{E}$

↳ définition de $\mathbb{E}$

$$\hookrightarrow n$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i^2] = 1 \times 1/2 + 1 \times 1/2 = 1 \quad \text{indépendants}$$

$$i \neq j, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \mathbb{E}[\varepsilon_i] \mathbb{E}[\varepsilon_j] = 0$$

Ex.2:

Rappels: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité

$$X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Loi de X : mesure sur $\mathbb{R}$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

La méthode de la fonction muette:

$$\forall f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue bornée, } \mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathbb{P}_X(x)$$

a) $X(\omega) = a \cdot 1_A(\omega) + b \cdot 1_B(\omega)$

$$X \in \{0, a, b, a+b\}$$

Supposons que $0, a, b, a+b$ 2 à 2 distincts

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(\{0\}), X^{-1}(\{a\}), X^{-1}(\{b\}), X^{-1}(\{a+b\})\})$$

$$= \sigma(\{(A \cup B)^c, A \setminus B, B \setminus A, A \cap B\}) \text{ tribu engendrée par } X$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) \\ \mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(A \setminus B) \\ \mathbb{P}(X=b) = \mathbb{P}(B \setminus A) \\ \mathbb{P}(X=a+b) = \mathbb{P}(A \cap B) \end{cases}$$

1) Ecrire les valeurs possibles de X

2) $X^{-1}(vp)$

↳ ce sont des ensembles

↳ Expliciter la loi de X

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x(\omega)) d\mathbb{P}(X)$$

Par exemple, si $a=b$, $\sigma(X) = \sigma\{X^{-1}(0), X^{-1}(a), X^{-1}(2a)\}$

$$= \sigma(\{ (A \cup B)^c, A \Delta B, A \cap B \})$$

$$P(X=0) = P((A \cup B)^c)$$

↳ différence symétrique

$$P(X=a) = P(A \Delta B)$$

(elts de A qui ne sont pas dans B

$$P(X=2a) = P(A \cap B)$$

elts de B qui ne sont pas dans A)

b) $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\omega & 0 \leq \omega \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq \omega \leq 1 \end{cases} \quad X: \Omega \rightarrow [0,1]$$

$$(*) \quad \sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}([0,1])\}$$

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \{\omega \in [0, 1/2], 2\omega \in B\} & 1 \notin B \\ \{\omega \in [0, 1/2], 2\omega \in B\} \cup [1/2, 1] & 1 \in B \end{cases}$$

$$\sigma(X) = \{C \cup D \mid C \in \mathcal{B}([0, 1/2]), D \in \{\emptyset, [1/2, 1]\}\}$$

• $\forall f$ continue bornée

$$\neq dP(\omega) = d\lambda(\omega)$$

$$= d\omega \text{ dans } [0,1] \quad (\lambda([0,1]) = 1)$$

$$E[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_0^{1/2} f(2\omega) d\omega + \int_{1/2}^1 f(1) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} f(1) \quad \begin{matrix} x=2\omega \\ 2\omega=x \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d\delta_1(x)$$

↳ 1 quand $x=1$, 0 sinon (mesure de Dirac)

$$= \int_0^1 f(x) d(\frac{1}{2} \cdot \lambda + \frac{1}{2} \delta_1)(x) \quad \begin{matrix} \text{Loi de } X: \\ \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \delta_1 \end{matrix}$$

c) $X(\omega) = \omega^2, X: \Omega \rightarrow [0,1]$

$$B \in \mathcal{B}([0,1])$$

$$X^{-1}(B) = \sqrt{B} \cup -\sqrt{B} \quad (\sqrt{B} = \{\sqrt{x}, x \in B\})$$

$$\sigma(X) = \{C \cup (-C), C \in \mathcal{B}([0,1])\} \quad (? \mathcal{B}([-1,1]))$$

$\forall f$ continue bornée, $P = \mathcal{N}_2$

$$E[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{-1}^1 f(\omega^2) \frac{1}{2} d\omega$$

$$= \int_0^1 f(\omega^2) \frac{1}{2} d\omega$$

$$x = \omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{x}$$

$$= \int_0^1 f(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} 1_{[0,1]}(x) dx$$

densité

↳ (pour se ramener à l'espace de départ?)

Ex 3: (???)

Rappels: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

P_X loi à densité

$$\exists f_X, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = \int_B f_X(x) dx$$

$$dP_X(x) = f_X(x) dx$$

$$0) f_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$1) f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (-x) (e^{-x^2/2})' dx \\ &= [-xe^{-x^2/2}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-x) e^{-x^2/2} dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 y^2/2} dx dy \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} dr \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

2a) Loi de $m + \sigma X = Y$

$\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$E[f(Y)] = E[f(m + \sigma X)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(m + \sigma x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$y = m + \sigma x \leftrightarrow x = \frac{y-m}{\sigma}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma} dy \quad \text{densité de } Y: \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$Y = m + \sigma X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

$$b) E(Y) = E[m + \sigma X] = m + \sigma E[X]$$

$$= m$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(m + \sigma X) = \sigma^2 \text{Var}(X) = \sigma^2$$

3) $X, Y \text{ indep} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$Z = \frac{Y}{X}$$

$\forall f$ continue bornée,

$$E[f(Z)] = E\left[f\left(\frac{Y}{X}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dx dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{x}\right) e^{-x^2 + y^2/2} dx dy$$

$$\begin{cases} x = x \\ z = \frac{y}{x} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = xz \end{cases} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix} = x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-\frac{1+z^2}{2} x^2} |x| dx dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1+z^2}{2} x^2} |x| dx \right) dz$$

$$= 2 \int_0^{\infty} x e^{-\frac{1+z^2}{2} x^2} dx = 2 \left(\frac{-1}{1+z^2} e^{-\frac{1+z^2}{2} x^2} \right)_0^{\infty}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

densité de Z .

$\rightarrow 1/Z = X/Y$ même loi que Y/X .

si X est à densité f_X

// Y ——— f_Y

et si X, Y sont indépendantes

alors (X, Y) est à densité $f_{X,Y}^{(X,Y)} = f_X^{(X)} \cdot f_Y^{(Y)}$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

$$4) a) R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad S = \frac{x}{R}$$

$\forall f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$\mathbb{E}[f(\mathbb{R}^2, S)] = \mathbb{E}\left[f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-x^2 + y^2/2} dx dy$$

fonction paire pour y

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ s = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{r} \cdot s \\ y = \sqrt{r} \cdot \sqrt{1-s^2} \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{s}{2\sqrt{r}} & \sqrt{r} \\ \frac{\sqrt{1-s^2}}{2\sqrt{r}} & \sqrt{r} \cdot \frac{(-s)}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-s^2}{2\sqrt{1-s^2}} - \frac{\sqrt{1-s^2}}{2}$$

$$= \frac{-s^2 - (1-s^2)}{2\sqrt{1-s^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-s^2}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 f(r, s) \frac{1}{2\pi} e^{-r/2} \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}} dr ds$$

valeur absolue

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(r, s) \frac{e^{-r/2}}{2\pi \sqrt{1-s^2}} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(r) \mathbb{1}_{[-1, 1]}(s) dr ds$$

densité de $(\mathbb{R}^2, S)$

$$f_{\mathbb{R}^2}(r) = \int_{\mathbb{R}} f(r, s) (r, s) ds$$

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} f(r, s) (r, s) dr$$

5) fonction muette

TD 5 30/09/25

$$X \sim N(0,1) \quad X_n = \frac{1}{n} X \quad \forall n \geq 1$$

0) (TD précédent)

si $X \sim N(0,1)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $a+bX \sim N(a, b^2)$

Ici, $X_n = \frac{1}{n} X \sim N(0, 1/n^2)$ [changement de variable dans l'expression de la densité]

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{n}x\right) \frac{1}{n} dx$$

$$\forall f \text{ continue bornée:}$$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}X\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{n}x\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x_n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x_n^2}{2}} \frac{1}{n} dx_n$$

$$\equiv \int_{\mathbb{R}} f(x_n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_n^2/2} dx_n$$

donc $\sim N(0, 1/n^2)$!

1) convergence p.s. ?

(en général, $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$ où X_n, X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ veut dire $\mathbb{P}[X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(\omega)] = 1$)

Pour convergence p.s., on veut mq $\mathbb{P}[X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0] = 1$

Ici, pour tout ω , $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

* pour $\mathbb{P}$ -p.p., A est vérifiée
veut dire $\mathbb{P}[A \text{ est vérifiée}] = 1$

Donc pour $\mathbb{P}$ -presque tout ω , $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ i.e. $X_n \xrightarrow[p.s.]{} 0$

ou L^r ?

[Def: $X_n \xrightarrow[L^r]{} X_\infty$ où X_n, X_∞ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ssi $|X_n|^r$ et $|X_\infty|^r$ intégrables et $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^r] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$]

Ici, $|X_n|^r, |X|^r$ intégrables ($N(0, \sigma^2)$ tous les moments sont finis)

$$\text{et } \mathbb{E}[|X_n - 0|^r] = \frac{1}{n^r} \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{n^r} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $X_n \xrightarrow[L^r]{} 0$

NOTES:

Candidat limite. la loi δ_0 "Dirac en 0" tq $\delta_0(A) = \mathbb{1}_{\{0 \in A\}}$, ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}[|X_n - X_\infty| \geq \varepsilon] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

convergence p.s. $\Rightarrow$ convergence en proba.

convergence $L^r \Rightarrow$

$$\leadsto \mathbb{P}[|X_n - X_\infty| \geq \varepsilon] = \mathbb{P}[|X_n - X_\infty|^r \geq \varepsilon^r]$$

$$\text{Markov} \rightarrow \leq \frac{1}{\varepsilon^r} \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^r] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

p.s. $\nRightarrow L^r$: prenons X tq $\mathbb{E}[|X|^r] = \infty$, alors $X \xrightarrow[p.s.]{} X$

si $X_n \xrightarrow[L^r]{} X_\infty$

Mais pas L^r car $X \notin L^r$

$L^r \not\Rightarrow$ p.s.

2) $Y_n = f(X_n)$, $f(x) = \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$

" $X_n \xrightarrow[p.s.]{} 0$ donc $f(X_n) \xrightarrow[p.s.]{} f(0)$ " Δ ! Il faut f c.o

Pour $n \geq 1$, $Y_n = \mathbb{1}_{]0, +\infty[}\left(\frac{1}{n}X\right) = \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(X)$

Donc $Y_n \xrightarrow[p.s.]{} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(X)$ (et aussi $L^r, \mathbb{P}$)

$|Y_n - Y| = 0$ p.s., donc $\mathbb{E}[|Y_n - Y|^r] = 0$

donc $Y_n \xrightarrow[L^r]{} Y$

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{} Y$

Ex 2: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1) $X_n \xrightarrow[*]{} X$, $Y_n \xrightarrow[*]{} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow[*]{} X + Y$

* p.s.

Soit $E_1 = \{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(\omega)\}$

$E_2 = \{\omega : Y_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Y(\omega)\}$

Par hyp, E_1 et E_2 de proba. 1 sous $\mathbb{P}$.

Donc $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1$

$$\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ \mathbb{P}(E_1) & + & \mathbb{P}(E_2) \\ \hline & & \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) \end{array}$$

$$\text{or } E_1 \cap E_2 = \{ \omega : X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega), Y_n \longrightarrow Y(\omega) \}$$

$$\subseteq \{ \omega : X_n(\omega) + Y_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) + Y(\omega) \}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X_n(\omega) + Y_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) + Y(\omega)) = 1$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$L^r, r \geq 1$

$$[\text{note: } |X_n + Y_n - (X + Y)|^r = |(X_n - X) + (Y_n - Y)|^r \leq |X_n - X|^r + |Y_n - Y|^r]$$

sinon:

si $r \in]0, 1[$

$$\text{Inégalité de Minkowski: } (\mathbb{E}[|X - Y|^r])^{1/r} \leq (\mathbb{E}[|X|^r])^{1/r} + (\mathbb{E}[|Y|^r])^{1/r}$$

$$[\text{dans } \mathbb{R}^n : \|X + Y\|_r \leq \|X\|_r + \|Y\|_r$$

$$\text{où } \|X\|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{1/r}]$$

↳ passage à la généralisation (D!)

passer par des fonctions étagées et utiliser J]

en Probas

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$

$$* \mathbb{P}[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \varepsilon] \xrightarrow{?} 0$$

$$\text{On a } |(X_n + Y_n) - (X + Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

$$\text{Donc } \{ \omega : |X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \varepsilon \} \subseteq \{ \omega : |X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon \}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \varepsilon] \leq \mathbb{P}[|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon] \quad [\text{si } a+b \geq \varepsilon \text{ alors } a \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } b \geq \frac{\varepsilon}{2}]$$

$$\leq \mathbb{P}[|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \cup \mathbb{P}[|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$$

$$\leq \mathbb{P}[|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}] + \mathbb{P}[|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$$

$$2) X_n \xrightarrow{\mathbb{P}^s} X, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}^s} Y \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}^s} XY$$

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}^s} X, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}^s} Y$$

$$\text{alors } E_1 = \{ \omega : X_n \longrightarrow X \} \text{ a proba } 1$$

$$E_2 = \{ \omega : Y_n \longrightarrow Y \} \text{ idem}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1$$

$$\hookrightarrow \subseteq \{ \omega : X_n Y_n \longrightarrow XY \}$$

$$3) X_n \xrightarrow{L^1} X, Y_n \xrightarrow{L^1} Y \not\Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{L^1} XY$$

On n'a pas forcément $X_n Y_n$ intégrable!

On veut mq X, Y intégrable $\not\Rightarrow XY$ intégrable

prenons X tq $\mathbb{P}[X = K] = \frac{c}{K^2}$, et $Y = X$

$$\text{Alors } \mathbb{P}[XY = n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \\ \frac{c}{K^2} & \text{si } n = K^2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}[X^2] = \sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}[X^2 = n] = \sum_{K \geq 0} K^2 \mathbb{P}[X^2 = K^2]$$

$$\text{donc } X^2 \text{ pas intégrable} = \sum_{K \geq 0} K^2 \frac{c}{K^{2+\varepsilon}} = +\infty$$

$$\text{ou bien: } X_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n^2}]}$$

$$Y_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n^2}]}$$

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|] = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\mathbb{E}[|Y_n - 0|] = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{or } X_n Y_n = n^2 \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n^2}]}$$

$$\mathbb{E}[|X_n Y_n - 0|] = \frac{1}{n} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ex 3: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. $\sim \text{Ber}(p)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = X_n X_{n+1}$$

1) Loi de Y_n ?

$$\forall n \geq 1, Y_n \text{ a la loi } \text{Ber}(p)$$

$$\text{car } Y_n \in \{0, 1\} \text{ et } \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1)$$

$$= \mathbb{P}[X_n = 1] \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] \text{ indep de } X_n \text{ et } X_{n+1}$$

$$= p^2$$

2) $\text{Cov}(Y_n, Y_m)$

Disons $n \leq m$

si $m = n$

$$\text{Cov}(Y_n, Y_n) = \text{Var}(Y_n) = p^2(1 - p^2) \quad (Y_n \sim \text{Ber}(p^2))$$

si $m = n+1$:

$$\begin{aligned}\text{cov}(Y_m, Y_n) &= \mathbb{E}[Y_m Y_n] - \mathbb{E}[Y_m] \mathbb{E}[Y_n] \\ &= \mathbb{E}[X_n X_{n+1}^2 X_{n+2}] - \underbrace{(p^2)^2}_{Y_i \sim \text{Ber}(p^2)} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X_n] \mathbb{E}[X_{n+1}^2] \mathbb{E}[X_{n+2}]}{p^3} = p^3 \\ &= p^3 - p^4 \\ &= p^3(1-p)\end{aligned}$$

si $m > n+1$

$$Y_m = f(X_m, X_{m+1})$$

$$Y_n = f(X_n, X_{n+1})$$

or $\{n, n+1\} \cap \{m, m+1\} = \emptyset$ et $(X_j)_j$ mutuellement indep

Donc (lemme des coalitions) $\sigma(X_m, X_{m+1})$ indep de $\sigma(X_n, X_{n+1})$

Donc Y_n indep de Y_m

$$\text{Donc } \text{cov}(Y_m, Y_n) = 0$$

5) $\text{var}(Y_1 + \dots + Y_n) = \mathbb{E}[(Y_1 + \dots + Y_n)^2] - (\mathbb{E}[Y_1 + \dots + Y_n])^2$
 $\rightarrow$ développer + utiliser (4).

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_i Y_j\right] - \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k]\right)^2 \quad [\text{développement de } (\sum Y_k)^2] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[Y_i Y_j] - \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k]\right)^2 \quad [\text{linéarité de } \mathbb{E}] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[Y_i Y_j] - \left(\sum_{k=1}^n p^2\right)^2 \quad [\text{car } Y_k \in \{0, 1\} \Rightarrow Y_k^2 = Y_k, \mathbb{E}[Y_k] = p^2] \\ &= np^2 - n^2 p^4 + 2 \sum_{1 \leq i < n \leq j} \mathbb{E}[Y_i Y_j] \\ &= np^2 - n^2 p^4 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[Y_i Y_{i+1}] + 2 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j \geq i+2}} \mathbb{E}[Y_i Y_j] \quad [\text{séparation voisins/éloignés}] \\ &= np^2 - n^2 p^4 + 2(n-1)p^3 + \frac{1(n-1)(n-2)}{2} p^4 \quad [\mathbb{E}[Y_i Y_{i+1}] = p^3; \mathbb{E}[Y_i Y_j] = p^4 \text{ si } |i-j| \geq 2] \\ &= np^2 + 2(n-1)p^3 + [(n-1)(n-2) - n^2] p^4 \\ &= np^2 + 2(n-1)p^3 - (3n-2)p^4 \\ &= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)\end{aligned}$$

TD 6

Ex 1:

$(X_n)_{n \geq 1}$ tq $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n=1) = 1/n, \mathbb{P}(X_n=0) = 1 - 1/n$

1) Mq X_n cv vers 0 en probas

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Alors $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n=1) = 1/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
 $\uparrow$
 $\varepsilon \in]0, 1[$

Donc $X_n \xrightarrow{\text{probas}} 0$

2) Mq $X_n \xrightarrow{L^1} 0$

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \cdot \mathbb{P}(X_n=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_n=1)$$

$$\mathbb{E}[X_n] = 1/n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} 0$

3) Mq $\mathbb{P}(X_n=1 \text{ infiniment souvent}) = 1$

Rappel:

B-C I. Si $\sum \mathbb{P}(A_i) < \infty$ alors $\mathbb{P}(A_n \text{ n'est vraie que pour un nombre fini de } n) = 1$

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n \geq N} A_n\right]$$

B.C. II: si $\sum \mathbb{P}(A_i) = +\infty$ et les A_i sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A_i \text{ } \infty \text{ souvent}) = 1$

Contre exemple si on ne suppose pas l'indépendance.

On prend $X_0 \sim \text{Ber}(1/2)$ et $X_1 = X_2 = \dots = X_0$

Alors $\mathbb{P}(X_n=1 \text{ infiniment souvent}) = \mathbb{P}(X_0=1) = 1/2$

or $\sum \mathbb{P}(X_n=1) = \sum 1/2 = +\infty$

On a $\sum_n \mathbb{P}(X_n=1) = \sum_n 1/n = +\infty$

Or les événements $\{X_n=1\}_{n \geq 1}$ sont indép

Donc par le lemme de Borel-Cantelli (II), on a $\mathbb{P}(\exists \text{ suite de } n \text{ tq } X_n=1) = 1$

4) Mq $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$

On a $\{\omega: X_n(\omega) \not\rightarrow 0\} \supseteq \{\omega: X_n(\omega)=1 \text{ infiniment souvent}\}$

Donc $\mathbb{P}(X_n \not\rightarrow 0) \geq \mathbb{P}(X_n=1 \text{ } \infty \text{ souvent}) = 1$

i.e. p.s. X_n ne tend pas vers 0

5) ss suite $(X_n)_{n \geq 1} \rightarrow 0$ p.s.

$(Y_n)_{n \geq 1} = (X_{n^2})_{n \geq 1}$

En effet, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Y_n=1) = \sum_n \mathbb{P}(X_{n^2}=1) = \sum_n 1/n^2 < \infty$

Donc $\mathbb{P}(Y_n=1 \text{ } \infty \text{ souvent}) = 0$ i.e. $\mathbb{P}(\{n: Y_n=1\} \text{ est fini}) = 1$ (par BCI).

Donc $1 = \mathbb{P}(Y_n=1 \text{ un nombre } < \infty \text{ de fois})$

$\leq \mathbb{P}(Y_n=0 \text{ pour } n \text{ assez grand})$

$\leq \mathbb{P}(Y_n \rightarrow 0)$

Donc $\mathbb{P}(Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) = 1$, i.e. $Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$

Ex 2:

$$(X_n)_{n \geq 1} : \forall n \geq 1, \mathbb{P}[X_n = n^2] = 1/n^2, \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - 1/n^2$$

1) Mq $(X_n)_{n \geq 1}$ c.v.p.s

$$\text{On a } \sum_n \mathbb{P}[X_n \neq 0] = \sum_n 1/n^2 < \infty$$

Donc $\mathbb{P}[X_n \neq 0 \text{ } \infty^{\text{t}} \text{ souvent}] = 0$, i.e. $\mathbb{P}[X_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand}] = 1$

En particulier, $X_n \xrightarrow{P.S.} 0$

2) $(X_n) \not\xrightarrow{L^1} 0$

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|] = 0 \cdot \mathbb{P}[X_n = 0] + n^2 \cdot \mathbb{P}[X_n = n^2] = 1 \quad \forall n \geq 1$$

Donc $\mathbb{E}[|X_n - 0|] \not\rightarrow 0$

Donc $X_n \not\rightarrow 0$ dans L^1

Ex 3:

1) Mq $\limsup_n X_n$ v.a.

On suppose $(X_n)_n$ v.a.r

$$\text{On a } \omega \mapsto (Z_n(\omega))_{n \geq 1} \xrightarrow{\omega \mapsto n} \limsup_n Z_n(\omega)$$

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{mes par hyp}} (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\quad} {}^{\mathbb{N}}(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$$

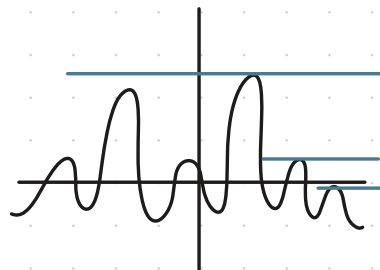
↑ mes par hyp

↑ $\sigma(\text{ouvert de } \bar{\mathbb{R}})$

$$= \sigma([a, b]; -\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$$

→ On veut montrer que $\limsup_n X_n$ v.a. à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$

$$\inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} X_k$$



Il suffit donc de montrer qu'un inf ou sup de v.a.r. est une var aléatoire.

Si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a.r.

$$\text{Soit } Z : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \omega \mapsto \sup_n Y_n(\omega)$$

Pour $u \in \bar{\mathbb{R}}$, on a :

$$Z^{-1}([-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \leq a\}$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega : \sup_{k \geq n} Y_k(\omega) \leq a\}$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{Y_n^{-1}([-\infty, a])}_{\substack{\uparrow \text{mesurable} \\ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}$$

$\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Donc $Z^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par intersection dénombrable

Les $([-\infty, a]; a \in \bar{\mathbb{R}})$ engendrent la tribu $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ (car les $[a, b] = ([-\infty, b] \cap [-\infty, a]^c) \cup [a, a]$ sont dedans et engendrent $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$).

2) $\{\omega : (X_n)_{n \geq 1} \text{ admet une limite}\}$ est un événement

$$\{X_n \text{ admet une limite}\} = \{\limsup_n X_n = \liminf_n X_n\} = Z^{-1}(\{(x, x); x \in \mathbb{R}\}) \text{ où } Z = (\limsup_n X_n, \liminf_n X_n) \\ \text{est mes}(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{or } \{(x, x); x \in \bar{\mathbb{R}}\} = \{(+\infty, +\infty), (-\infty, -\infty)\} \cup (Y \circ Z)^{-1}\{0\} \text{ où } Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y$$

On en déduit que $\{X_n \text{ admet une limite}\}$ est un événement (i.e. appartient à $\mathcal{F}$)

3) Comparer $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \{X_n > a\}$, $\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > a\}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > a\}$

Si $(A_n)_n$ sont des évènements, (i.e. éléments de $\mathcal{F}$), $\limsup A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{N \geq n} A_N$

Donc $\limsup \{X_n \geq a\} \rightarrow$ en un sens

Par contre $\{\limsup_n X_n \geq a\} = \{\omega \in \Omega : \limsup X_n(\omega) \geq a\}$

$$[\limsup \{X_n \geq a\}] = \{X_n \geq a \text{ i.o.}\} \subseteq \{(\limsup X_n) \geq a\}$$

- pour $\subseteq$

Soit ω tq $X_n(\omega) \geq a$. ∞^+ souvent, i.e. $\forall N, \exists n \geq N$ $X_n(\omega) \geq a$

Donc $\inf_N \sup_{n \geq N} X_n(\omega) \geq a$

Do not $\limsup_n X_n(\omega) \geq a$

Donc $\limsup_n \{X_n \geq a\} \subseteq \{\limsup_n X_n \geq a\}$

α - μ

$$[\limsup \{x_n > a\}] = \{x_n > a \text{ une ote de fois}\} \neq \{\limsup x_n > a\}$$

$$4) \liminf \{X_n \geq a\} = \bigcup_{n \geq N} \bigcap \{X_n \geq a\}$$

$$= \{x_n \geq a \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\} \subsetneq \{\liminf x_n \geq a\}$$

NOTE: (14/10/25)

"Mq $\limsup_n X_n$ est une v.a."

On a montré que les $Z^{-1}([-\infty, a])$ était $\mathcal{F}$ -mesurable que Y_i v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

$$\hookrightarrow Z = \sup Y_i$$

Pour conclure: $T = \{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) ; Z^{-1}(B) \in \mathcal{F} \}$ est une tribu qui contient les $]-\infty, a]$, donc $T \supseteq \sigma(\underbrace{]-\infty, a]}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} ; a \in \mathbb{R})$.

$$B(\mathbb{R})$$

RAPPEL:

Si on se donne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a.

La tribu asymptotique des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est $\bigcap_{N \geq 0} \sigma(X_n, n \geq N)$

Un événement asymptotique est un élément de $\mathcal{A}$.

Ex1: $(X_n)_{n \geq 1}$, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

1) Mq les événements sont asymptotiques pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\rightarrow \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = +\infty \right\}$$

Si $(x_i)_i$ sont des réels, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} |x_i| = +\infty$ (car $\sum_{i=0}^{N-1} |x_i| < \infty$)

Donc $\left\{ \sum_{i \geq 0} |x_i| = +\infty \right\} = \left\{ \sum_{i \geq N} |x_i| = +\infty \right\} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \quad \forall N \geq j$

Donc $\left\{ \sum_{n \geq 0} |x_i| = +\infty \right\} \in \bigcap_{N \geq 0} \sigma(X_n, n \geq N) = \mathcal{A}$.

$$\rightarrow \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} (x_1 + \dots + x_n) \geq 10 \right\}$$

Si $(x_i)_i$ sont des réels. On a $\frac{x_1 + \dots + x_n}{\mu_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ pour tout K fixé
 $\uparrow$ car $\mu_n \rightarrow +\infty$

$$\text{Donc } \limsup_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{\mu_n} = \limsup_n \frac{x_{K+1} + \dots + x_n}{\mu_n}$$

$$\text{Donc } \left\{ \limsup_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{\mu_n} \geq 10 \right\} = \left\{ \limsup_n \frac{x_{K+1} + \dots + x_n}{\mu_n} \geq 10 \right\} \in \sigma(X_{K+1}, X_{K+2}, \dots)$$

$$\text{donc } \mathcal{A} = \bigcap_K \sigma(X_{K+1}, X_{K+2}, \dots)$$

$$\rightarrow \left\{ \sup_{n \geq 1} X_n = +\infty \right\}$$

Similairement, pour (x_i) des réels, $\forall N$, $\max(x_1, \dots, x_N) < +\infty$

$$\text{et donc } \sup_{n \geq 0} x_n = +\infty \Leftrightarrow \sup_{n \geq N+1} x_n = +\infty$$

On en déduit que $\left\{ \sup_{n \geq \infty} X_n = +\infty \right\} \in \sigma(X_{N+1}, X_{N+2}, \dots)$ pour tout N

Donc il appartient à $\mathcal{A}$.

$$(\leadsto \mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \cap E] = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(E))$$

$\uparrow$ indep

2) Mq les événements ne sont pas asymptotiques pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$$

Posons:

$$X_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$\downarrow$ 'ça dépend de la 1^{ère} valeur'

$$X_1(\omega) = 10 \cdot 1_{\{1\}}(\omega) \text{ pour } \omega \in \{0, 1\}$$

$$X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_n(\omega) = 0 \text{ pour } n \geq 1$$

les (X_i) sont des v.a.

Mais $\{\omega : \sum_{n \in \mathbb{N}^+} |X_n| > 10\} = \{1\}$

$\begin{matrix} \nearrow \\ = \emptyset \text{ si } 0 \notin B \\ = \neg \text{ si } 0 \in B \end{matrix}$

Mais $\sigma(X_N, X_{N+1}, \dots) = \sigma(X_n'(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), n \geq N)$

$= \sigma(\{\emptyset, \neg\}) = \{\emptyset, \neg\}$

On a donc $\mathcal{A} = \bigcap_{N \geq 1} \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots) \subseteq \sigma(X_2, X_3, \dots) = \{\emptyset, \neg\}$

Donc $\{\sum_{n \geq 0} |X_n| > 10\} \stackrel{(*)}{=} \{1\} \notin \mathcal{A}$ i.e. ce n'est pas un événement asymptotique.

$\rightarrow \{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (X_1 + \dots + X_n) > 10\}$

Avec les $(X_i)_i$ construits sur $(\{0, 1\}, P(\{0, 1\}))$. On a :

$\{\sum_n |X_n| > 10\} = \{X_1 > 10\} \notin \mathcal{A}$ (cf. ci-dessus)

$= \{\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_1 + \dots + X_n > 10\}$ car $\forall \omega, \forall n \geq 2, X_n(\omega) = 0$

$= \{\sup_{n \geq 1} X_n > 10\}$

3) Construire une suite de v.a. indépendantes de sorte que ces événements aient probabilité $1/2$.

Il suffit de définir P proba sur $(\{0, 1\}, P(\{0, 1\}))$ par

$P(\emptyset) = 0$ $P(\{0, 1\}) = 1$
 $P(\{0\}) = 1/2$ $P(\{1\}) = 1/2$.

Alors les $(X_n)_{n \geq 1}$ définies à la question (*) vérifie :

- $\rightarrow (X_n)_n$ mutuellement indep
- $\rightarrow X_1 \sim \text{Ber}(1/2), X_n = 0$ p.s. pour $n > 1$

$\rightarrow$ preuve: si $B_1, \dots, B_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$P[X_1 \in B_1, \dots, X_N \in B_N] = P[X_1 \in B_1, 0 \in B_2, \dots, 0 \in B_N]$
 $= P[X_1 \in B_1] \mathbb{1}_{0 \in B_2} \mathbb{1}_{\dots} \mathbb{1}_{0 \in B_N}$
 $= P[X_1 \in B_1] P[X_2 \in B_2] \dots P[X_N \in B_N]$

$\leadsto$ Tous ces événements ont proba $P[X_1 > 10] = 1/2$.

Rmq: Soit X_1, X_2 i.i.d tq $P(X_1 = \pm 1) = 1/2$ et $X_3 = X_1 X_2$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ Mais (X_1, X_2, X_3) pas mut indep

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_3$ car $P[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1] = 0 \neq 1/8 = P[X_1 = 1]P[X_2 = 1]P[X_3 = -1]$

$X_2 \perp\!\!\!\perp X_3$

Ex. 2:

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, T$ tribu asymptotique

* une v.a. X est dite asymptotique pour la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\sigma(X) \subset T$ (où $\sigma(X)$ est la tribu de X)

1) Mq $\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n$ v.a. asymptotiques pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pose $Z = \limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$Z^{-1}([a, +\infty[) = \{\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n > a\}$

$= \{\forall p, \text{ on a } X_n > a - 1/p \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent}\}$

$= \{\forall p, \text{ on a } X_n > a - 1/p \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent après } n \in N_0\}$

$= \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \{X_n > a - 1/p\} \in \sigma(X_{N_0}, X_{N_0+1}, \dots)$

Donc $Z^{-1}([a, +\infty[) \in \bigcap_N \sigma(X_{N_0}, X_{N_0+1}, \dots)$

Or $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} (= \sigma(Z))$ tribu (car $\mathcal{A}$ tribu, ...) contenant les $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ qui engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
Donc $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

sinon: $\limsup_{n \geq N} X_n = \limsup_{n \geq N} X_n$ est $\sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)$ -mesurable
Donc $\limsup_{n \geq N} X_n$ est $\bigcap_N \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)$ -mes. $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} (X \text{ G-mesurable} \\ \text{veut dire } \sigma(X) \subseteq \mathcal{G}) \end{array}$

2) $\text{Ma} \exists \tilde{X} \text{ v.a. sur } (\Omega, \mathcal{F}) \text{ tq } P[X = \tilde{X}] = 1 \text{ et } \tilde{X} \text{ est asymptotique.}$

pu: $\tilde{X}(\omega) = \limsup_n X_n(\omega)$ si $\omega \in \{\exists \lim X\}$
 $\uparrow$ v.a. a. $\uparrow$ ev. a. $\sim \tilde{X}$ v.a. a.
 $= 0$ sinon (si cv ps ne dit rien sur les événements de proba. nulle)
Alors $\tilde{X}$ est asymptotique.

3)a) On suppose $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes.

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P(X_n \in B \text{ o.s. souvent}) \in \{0, 1\}$?

Loi du 0-1: $\{X_n \in B \text{ o.s. souvent}\} = \{X_n \in B \text{ o.s. souvent après } n = N \text{ pour tout } N\}$
 $\in \mathcal{A}$ la tribu asymptotique de $(X_1, X_2, \dots)$

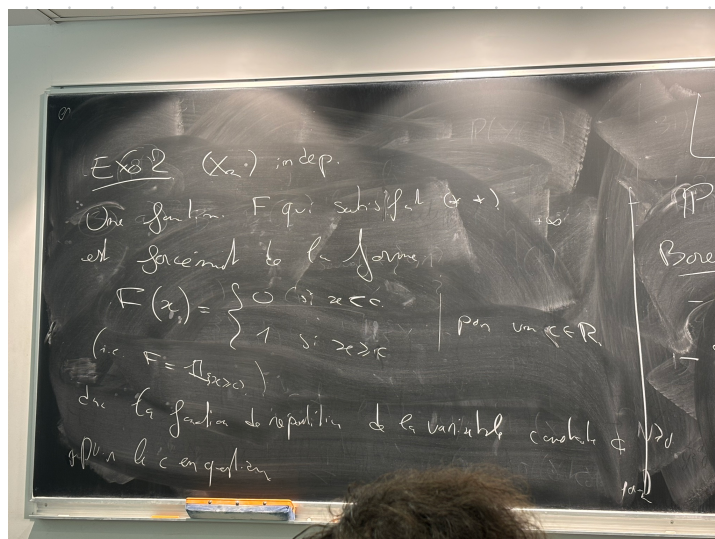
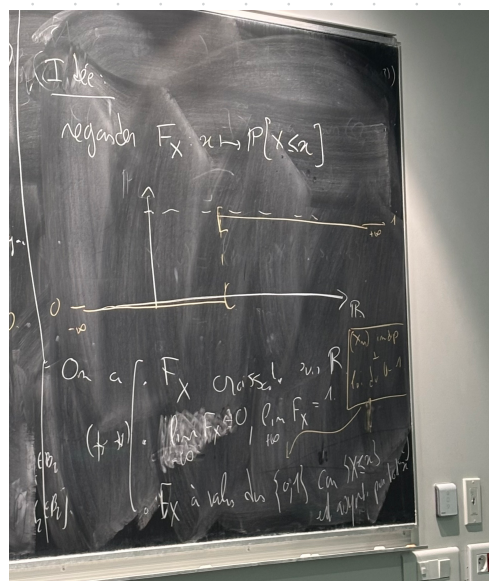
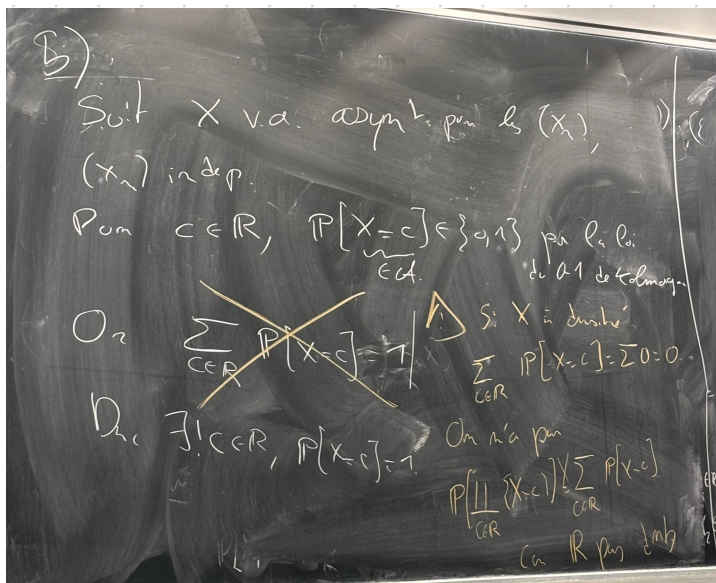
or les X_i sont indep, donc par la loi du 0-1 (de Kolmogorov)

$P[X_n \in B \text{ o.s. souvent}] \in \{0, 1\}$

Borel-Cantelli

- si $\sum P[X_n \in B] < \infty$, alors $P[\cdot] = 0$ par BCI

- si $\sum P[X_n \in B] = \infty$, alors $P[\cdot] = 1$ par BCII, en utilisant que (X_n) indep.



Ex 3: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d $\sim \mathcal{N}(0,1)$

0) Mq $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0, \exists c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{u_n} = c$

