



Exercice 1:

1) Mq $\forall \alpha > 0 \quad \forall t > 0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{1}{t^\alpha} \mathbb{E}(|X|^\alpha)$
 * Markov: $\mathbb{P}[Y \geq x] \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{x} \quad (x > 0, Y \text{ v.a.} \geq 0)$

$$\mathbb{P}[|X| \geq t] = \mathbb{P}[|X|^\alpha \geq t^\alpha] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^\alpha]}{t^\alpha}$$

$\uparrow$ $y \mapsto y^\alpha$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ $\uparrow$ ineq Markov ($|X|^\alpha \geq 0$)

2) Mq $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda t}} = \exp(-\lambda t + \ln \mathbb{E}[e^{\lambda X}])$

Pour $\lambda > 0, x \mapsto e^{\lambda x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{donc } \{x \geq t\} = \{e^{\lambda x} \geq e^{\lambda t}\}$$

$\downarrow t \in \mathbb{R}$ $\downarrow$ ineq Markov

$$\leadsto \mathbb{P}[X \geq t] \leq \mathbb{P}[e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\ln \mathbb{E}[e^{\lambda X}]} = \exp(-\lambda t + \ln \mathbb{E}[e^{\lambda X}])$$

3) Mq si $n \geq 1, X_1, \dots, X_n$ i.i.d. pour $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq t\right) \leq \exp\left(-n \sup_{\lambda > 0} (\lambda t - \ln(\exp(\lambda X_1)))\right)$

Par Q2, $\forall \lambda > 0, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \geq nt] &\leq \exp(-\lambda nt + \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1 + \dots + X_n}])) \\ &= \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1 + \dots + X_n}]) \\ &= \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] \dots \mathbb{E}[e^{\lambda X_n}]) \quad \text{indep} \\ &= n \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]) \quad \begin{matrix} X_1, \dots, X_n \\ \downarrow \text{ont la même loi} \end{matrix} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq t\right] \leq \exp(-n(\lambda t - \ln(\exp(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}])))$$

En optimisant le majorant en $\lambda > 0$ (minoration de l'exposant), on obtient:

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq t\right] \leq \exp\left(-n \sup_{\lambda > 0} \{\lambda t - \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}])\}\right)$$

$\uparrow$ Chernoff

Exercice 2: [APARTÉ]

ex: Mq si $X \sim \text{Cauchy}(a)$

$Y \sim \text{Cauchy}(b)$

X, Y indep. Alors $X+Y \sim \text{Cauchy}(a+b)$

Méthode de la fonction muette:

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 bornée

$$\text{On a: } \int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_{X+Y} = \int_{\mathbb{R}^2} g(X(\omega) + Y(\omega)) d\mathbb{P}(\omega)$$

$\uparrow$ thm de transfert

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y)$$

$\uparrow$ thm de transfert

X, Y indep donc $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$
 Comme X, Y à densité f_X, f_Y .

PROP.: si μ, ν mesures à densité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors $\mu \otimes \nu$ est à densité sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de densité $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$

• μ a densité f par rapport à γ si $\mu(A) = \int f(\omega) 1_A d\gamma(\omega)$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x+y) f_X(x) dx \right) f_Y(y) dy \\ &\stackrel{z=x+y}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) f_X(z-y) dz \right) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(z-y) f(y) dy \right) dz$$

$:= f_x * f_y(z)$ produit de convolution.

On a mq: $\int g dP_{x+y} = \int g(z) (f_x * f_y)(z) dz$

Par méthode de la fonction muette, on a montré que

P_{x+y} est la loi à densité sur $\mathbb{R}$, de densité $x \mapsto (f_x * f_y)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_x(x-u) f_y(u) du$

Ici, on a donc $X+Y \sim$ loi à densité, de densité $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{\pi(u^2+a^2)} \frac{b}{\pi(x^2+b^2)} du$

$$= \frac{a+b}{\pi} \cdot \frac{1}{u^2+(a+b)^2}$$

idée : décomposer en éléments simples

$$\frac{1}{u^2+a^2} \cdot \frac{1}{(x-u)^2+b^2} = \frac{Au+B}{u^2+a^2} + \frac{Cu+D}{(x-u)^2+b^2}$$

Thm [Fubini] : pour l'intégrale de Riemann (ou Lebesgue)

si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne

Alors: $\int \left(\int |f(x,y)| dx \right) dy < \infty$ et, dans ce cas, $\int \left(\int f(x,y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$

$$\Leftrightarrow \int \left(\int |f(x,y)| dy \right) dx < \infty \quad \left| \quad = \int \left(\int |f(x,y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \right.$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy < \infty \quad \left| \quad = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d\lambda_2(x,y) \right.$$

Thm [Fubini Tonelli]

$$\int_{\Omega \times \Omega'} f(x,y) d(\mu \times \nu)(x,y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

1) loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d $\sim \text{Cauchy}(a)$

Par récurrence:

$$X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} \sim C(a(n+1))$$

$\swarrow$
indep.

Donc $\forall n, \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim C(an)$

On cherche la loi de $\frac{Z_n}{n}$

→ Méthode de la fonction muette:

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 bornée

$$\int g dP_{\frac{Z}{n}} \stackrel{\text{thm transfert}}{=} \int g\left(\frac{Z(\omega)}{n}\right) dP(\omega)$$

$$\stackrel{\text{thm transfert}}{=} \int g\left(\frac{z}{n}\right) \frac{an}{\pi(z^2+a^2n^2)} dz \quad y = \frac{z}{n} = \int g(y) \frac{an}{\pi((ny)^2+a^2n^2)} n dy$$

$$= \int g(y) \frac{a}{\pi(y^2+a^2)} dy$$

CCL: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim \text{Cauchy}(a) \quad \forall n \geq 1$

rg: * si $X \sim \text{Cauchy}(a)$

$$\lambda X \sim \text{Cauchy}(\lambda a) \quad \forall \lambda > 0$$

Q1: $X \sim C(a)$

$$\leadsto X_1 + \dots + X_n$$

$\sim C(na)$ par

récurrence

Poser $Z_n = X_1 + \dots + X_n$

loi de Z_n/n :

fst muette, thm

transfert, P = densité

de la loi changement

de variable $y = \frac{z}{n}$

2) $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ cv vers une cte ?

On a :

$$\forall c, \forall \varepsilon, \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - c\right| \geq \varepsilon\right) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{a}{\pi(u^2 + a^2)} du \not\rightarrow 0$$

En particulier, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ne converge pas vers c (par contraposition)

Q: $\mathbb{P}[\forall c \in \mathbb{R}, Z_n \not\rightarrow c] = 1$?

$$\forall c \in \mathbb{R}, \mathbb{P}[Z_n \rightarrow c] = 0$$

$$\mathbb{P}[\exists c \in \mathbb{R}, Z_n \rightarrow c] \leq \sum_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{P}[Z_n \rightarrow c] = 0$$

3) contredit la loi forte des grands nombres?

Ne contredit pas car :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{\mathbb{R}} \frac{a|u|}{\pi(a^2 + u^2)} du = +\infty$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{a|u|}{\pi(a^2 + u^2)} du$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \ln(a^2 + A^2) = +\infty$$

Q2:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq c\right) \not\rightarrow 0^n \text{ (intégrale)}$$

Q3: Non car

$$\mathbb{E}[X_1] = +\infty$$

↑ def de $\mathbb{E}$
+ def de $\int_{\mathbb{R}}$

Exercice 3: [...]

$(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d $S_n = X_1 + \dots + X_n$

1) $n \geq 1$. Exprimer X_n en fonction de S_n et S_{n-1}

$$\forall n \geq 1, X_n = S_n - S_{n-1}$$

2) Mq si $\frac{S_n(\omega)}{n}$ cv, alors $\frac{X_n(\omega)}{n}$ cv vers 0

Soit $\omega \in \mathbb{R}$

$$\text{si } \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(\omega), \text{ alors } \frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

$$= \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(\omega) - \ell(\omega) = 0$$

3) En déduire que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ converge}\right) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) < 1$

si $\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{n} \text{ cv}\right] > 0$

$$\text{On a: } \left\{ \frac{S_n(\omega)}{n} \text{ cv} \right\} \subseteq \left\{ \frac{X_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}\left[\frac{X_n}{n} \rightarrow 0\right] > 0$$

$$\text{donc } \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \not\rightarrow 0\right) < 1$$

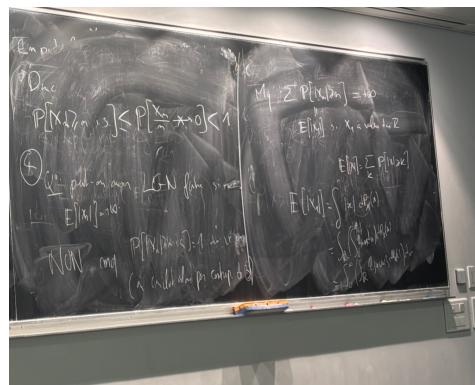
$$\text{or } \forall \omega \left(|X_n(\omega)| \geq n \text{ i.s.} \right) \Rightarrow \left(\frac{X_n}{n} \not\rightarrow 0 \right)$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) \leq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \not\rightarrow 0\right) < 1$$

Q: Peut-on avoir LGN faible si $\mathbb{E}[|X_n|] = +\infty$?

Non: par contraposée de Q3 (on aurait $\mathbb{P}(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) = 1$)

4) $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$



TD 9 - Convergence en loi

Ex. 1:

Soit $(X_n)_n, X$ v.a.r. et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty$. On suppose $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$. Montrons que $f(X_n) \xrightarrow{\text{loi}} f(X)$

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty$ bornée, alors pour $Y_n = f(X_n), n \geq 1, Y = f(X)$:

$$\mathbb{E}[g(Y_n)] = \mathbb{E}[g(f(X_n))] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[g(f(X))] = \mathbb{E}[g(Y)]$$

$\mathcal{C}^\infty$ bornée

car $\begin{cases} g \circ f \mathcal{C}^\infty \text{ bornée} \\ X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \text{ en loi} \end{cases}$

donc

$$Y_n \xrightarrow{\text{loi}} Y$$

Cours:

$$\begin{aligned} X_n &\xrightarrow{\text{loi}} X \text{ ssi} \\ \forall f \mathcal{C}^\infty \text{ bornée} \\ \mathbb{E}[f(X_n)] &\xrightarrow{} \mathbb{E}[f(X)] \end{aligned}$$

Idee:

f continue, g bornée
 $\Rightarrow g \circ f \mathcal{C}^\infty$ bornée

Q: Trouver des $(X_n), X, f$ tq $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$, f pas continue et $f(X_n) \not\xrightarrow{\text{loi}} f(X)$

avec $f = 1_{\mathbb{R}^+}$

(on peut poser quel espace de probas, par ex. $\Omega = (\{0\}, \{\emptyset, \Omega\}, \mathbb{P})$
(voir: TMM Porte-Manteau))

$$\text{Si } X_n(\omega) = 1/n \quad \forall \omega \in \Omega; n \geq 1$$

$$\text{et } X(\omega) = 0$$

$$\text{Alors } X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

$$(\mathbb{E}[g(X_n)] = g(1/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(0) = \mathbb{E}[g(X)] \quad \forall g \text{ continue bornée})$$

Mais $f(X_n) \xrightarrow{\text{loi}} f(X)$, $f = 1_{\mathbb{R}^+}$

Car $\forall g \mathcal{C}^\infty$ bornée avec $g(0) \neq g(1)$ (ex: $g = \sin$)

$$\text{Or } \mathbb{E}[g(f(X_n))] = \mathbb{E}[g(1)] = g(1) \not\xrightarrow{} g(0) = \mathbb{E}[g(f(X))]$$

O.L.S.

Ex. 2:

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. indépendantes

$$M_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}, V_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

1) Fonctions de répartition de V_n et M_n

Pour le max:

$$\{V_n \leq x\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}$$

$\hookrightarrow$ tous les X_i doivent être $\leq x$

par indep des X_i

$$F_{V_n}(x) = \mathbb{P}(V_n \leq x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x)$$

Pour le min:

$$\{M_n > x\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i > x\}$$

$\hookrightarrow$ tous les X_i doivent être $> x$

$$\text{donc } \mathbb{P}(M_n > x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x) = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x))$$

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x))$$

$$\text{Q1: } F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$M_n > x \Rightarrow \min > x$$

$$\Rightarrow X_i > x \quad \forall i$$

$$V_n \leq x \Rightarrow \max \leq x \Rightarrow X_i \leq x \quad \forall i$$

Q2) si les X_i sont i.i.d.,

$$F_{X_i}(x) = F_{X_1}(x) \quad \forall i.$$

$$\text{Q3) } F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{V_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M_n \xrightarrow{p} 0, V_n \xrightarrow{p} 1$$

2) si $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d.

$$\text{alors } \forall u \in \mathbb{R}, F_{V_n}(u) = (F_{X_1}(u))^n$$

$$\forall n \geq 1, F_{M_n}(u) = 1 - (1 - F_{X_1}(u))^n$$

3) a) i.i.d. $\sim U[0,1]$

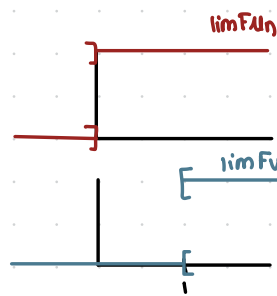
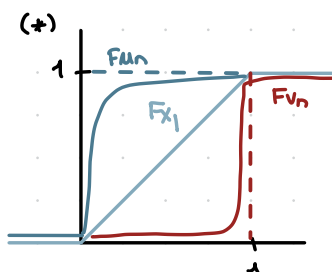
Fonctions de répartition:

$$\text{Pour } M_n: F_{M_n}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$$

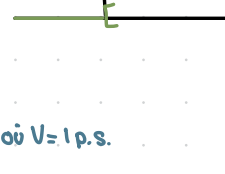
$$\text{si } x \leq 0, F_{X_1}(x) = 0 \text{ donc } F_{M_n}(x) = 0$$

$$\text{si } x > 0, (1 - F_{X_1}(x))^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{donc } F_{M_n}(x) = 1$$



F_U où $U = 0$ p.s.



Pour V_n : $F_{V_n}(x) = (F_{X_1}(x))^n = x^n \quad \forall 0 \leq x \leq 1$

$$F_{V_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{V_n}(x) = 0$ si $x < 1$, 1 sinon

Convergence en loi:

On a montré que

$F_{U_n}(u) \xrightarrow{\text{loi}} F_U(u)$ où $U = 0$ p.s. pour tout pt de continuité de F_U (i.e. tout $u \neq 0$)

Donc $U_n \xrightarrow{\text{loi}} U$

On a aussi mq $F_{V_n}(w) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_V(w)$ où $V = 1$ p.s. pour tout w

Donc $V_n \xrightarrow{\text{loi}} V$

b) $X_1 \sim \text{Exp}(\alpha)$

Donc $F_{X_1}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Fonction de répartition:

$$F_{U_n}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^n$$

$$F_{V_n}(x) = (F_{X_1}(x))^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

($\forall x \geq 0$)

Convergence en loi: U_n :

$$(1 - e^{-\lambda x})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

car si $x = 0$ $e^0 = 1$ donc $1 - 1 = 0$

si $x > 0$ $1 - e^{-\lambda x} \in]0, 1[$

$$F_{U_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

"

$1_{[0, +\infty[}$ pour $x \neq 0$

Donc $U_n \xrightarrow{\text{loi}} 0$

V_n :

$$1 - e^{-\lambda x n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ et pour } x < 0 \quad F_{X_1}(x) = 0$$

Ici, $F_{V_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour tout x

(*)

Or il n'existe aucune v.a.r. V tq $F_V = 0$ hors des discontinuités de F_V .

NOTES:

Q: Mq $n U_n \xrightarrow{\text{loi}} U$; $U \sim \text{Exp}(1)$

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d $\sim \mathcal{U}(0, 1]$

$\forall x > 0$, $F_{n U_n}(x) = \mathbb{P}(n U_n \leq x) = \mathbb{P}(U_n \leq \frac{x}{n})$

$$= F_{U_n}(\frac{x}{n}) = 1 - (1 - \frac{x}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-x} \quad \forall x \geq 0$$

La fonction limite est: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow$ fonction de répartition d'une v.a. $\sim \text{Exp}(1)$.

si $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $\sim \text{Exp}(\alpha)$

$\forall x \geq 0$

$$\mathbb{P}(U_n > x) = \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) \stackrel{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^n e^{-\alpha x} = e^{-\alpha n x}$$

$$\mathbb{P}(n U_n \leq x) = \mathbb{P}(U_n \leq \frac{x}{n}) = 1 - \mathbb{P}(U_n > \frac{x}{n}) = 1 - e^{-\alpha n x / n} = 1 - e^{-\alpha x}$$

donc $n U_n \sim \text{Exp}(\alpha)$

* résultat d'analyse:

si $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, alors G n'a qu'un nombre au plus dénombrable de discontinuités.

↓ ETAPES

Ex 3:

1) $X \geq 0$ mq $E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt$

(astuce)

RQ: Si X à densité $f_X C^0$, mq $\int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$

IPP

Ici, X v.a.r. à valeurs ≥ 0 .

On a $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x 1 dt \right) dP_X(x)$ ← suggestion de l'énoncé

formule de transfert

Fubini pour des fonctions ≥ 0

$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\infty} 1_{\{x \geq t\}} dt \right) dP_X(x)$

$= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[t, +\infty[}(x) dP_X(x) \right) dt$

or $\int 1_A d\mu = \mu(A) \quad \forall (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace de probabilité et tout $A \in \mathcal{F}$

Ici: $\int_{\mathbb{R}} 1_{[t, +\infty[} dP_X = P_X([t, +\infty[)$

$= 1 - P(X < t)$

$= 1 - F_X(t)$ ↓ si $P(X=t)=0$

On note $A = \{t \in \mathbb{R}; P(X=t) > 0\}$ les intégrales son égales sur $\mathbb{R} \setminus A$ et $\text{leb}(A)=0$ car A dénombrable

(*) On a donc $\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[t, +\infty[} dP_X \right) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt$

↑ preuve: $\forall I \subseteq \mathbb{R}$, finie,

$\sum_{t \in I} P(X=t) = P(X \in I) \leq 1$

Donc $(P(X=t), t \in \mathbb{R})$ sommable donc un nombre au plus dte $\neq 0$

2) X v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - F_X(n))$

$\sum_{k \geq 0} P(X \geq k) = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=k}^{\infty} P(X=j) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} P(X=j)$
 $= \sum_{j=0}^{\infty} j P(X=j) = E[X]$

3) Mq $E[X^p] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) p t^{p-1} dt$

5

$E[X^p] = \int_{\mathbb{R}} x^p dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x p t^{p-1} dt \right) dP_X(x)$

calcul que 01

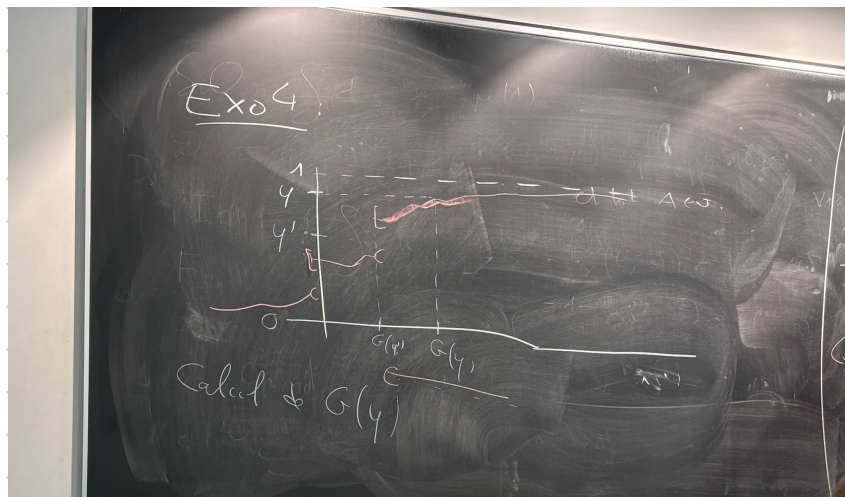
$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\infty} p t^{p-1} 1_{\{x \geq t\}} dt \right) dP_X(x)$

$= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[t, +\infty[}(x) dP_X(x) \right) p t^{p-1} dt$

$E[X^p] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) p t^{p-1} dt$

↑ pour savoir si une v.a. admet des moments d'ordre p

Exo 4:



TD 10 - Fonctions caractéristiques

RAPPEL:

X v.a.r.

Fonction caractéristique : $\psi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], t \in \mathbb{R}$$

(est bien définie car $|e^{it}| \leq 1$)

* si X admet une densité f_X ,

$$\text{alors } \psi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx$$

* si X a densité f ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \psi_X(t) dt \quad (*)$$

Ex1: Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes:

$X \sim \text{Ber}(p)$

$$\text{On a: } \mathbb{P}(X=0) = 1-p, \mathbb{P}(X=1) = p$$

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

$$= \mathbb{P}(X=0)e^{it \cdot 0} + \mathbb{P}(X=1)e^{it \cdot 1}$$

$$= (1-p) + pe^{it}$$

$X \sim \text{Geo}(p)$

$$* \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, \psi_X(u) = \sum_{n \geq 1} e^{iun} \cdot (1-p)^{n-1} p$$

$$= p \sum_{n \geq 1} (e^{iu}(1-p))^{n-1}$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{n \geq 1} (e^{iu}(1-p))^n$$

$$= \frac{p}{(1-p)} \cdot \frac{e^{iu}(1-p)}{1 - e^{iu}(1-p)} = \frac{pe^{iu}}{1 - (1-p)e^{iu}}$$

Si X a densité f_X :

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx$$

↑
formule
de transfert

Si X v.a. discrète

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \mathbb{P}(X=k)$$

$X \sim P(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X=K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} \quad (K=0, 1, 2, \dots)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_X(t) = \sum_{K \geq 0} e^{itK} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda} \sum_{K \geq 0} \frac{(e^{it} \cdot \lambda)^K}{K!}$$

DL de exp
 $= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$

$$\text{Donc } \psi_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

$X \sim \text{Exp}(\alpha)$: densité de $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}; x \geq 0$

$$\psi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{(-\alpha + it)x} dx \quad \left(\text{posons } c := -\alpha + it, \frac{1}{c} e^{cx} \right)$$

$$\psi_X(t) = \alpha \left(\frac{-1}{-\alpha + it} \right) = \frac{\alpha}{\alpha - it}$$

$X \sim \text{Unif}[a, b]$ $a < b$ dans $\mathbb{R}$

X est a densité sur $\mathbb{R}$ de densité $f_X(x) = \mathbb{1}_{[a, b]}(x) \frac{1}{b-a}$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_X(t) = \int_a^b e^{itx} f_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx$$

↑
formule de
transfert

$$= \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{e^{itx}}{it} \right]_a^b$$

$$= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Ex 2

$\alpha > 0, X, Y \sim \text{Exp}(\alpha) \quad X \perp\!\!\!\perp Y, Z = X - Y$

2) $\varphi_Z(t)$:

$\forall t \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{it(X-Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{-itY}] \\ &= \varphi_X(t) \varphi_Y(-t) = \frac{\alpha}{\alpha - it} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + it} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + t^2} \end{aligned}$$

$\uparrow$ $X, Y \sim \text{Exp}(\alpha)$

1) Loi de Z

Méthode de la fonction muette

$\forall g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} g(z) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \alpha e^{-\alpha y} g(x-y) dx dy$$

$\xrightarrow{\text{transfert}}$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \alpha e^{-\alpha y} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \alpha e^{-\alpha x} g(x-y) dx \right) dy \\ &\stackrel{\substack{Z=x-y \\ x=z+y}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \alpha e^{-\alpha y} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{z+y \geq 0\}} \alpha e^{-\alpha(z+y)} g(z) dz \right) dy \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha z} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{z+y \geq 0\}} \alpha e^{-2\alpha y} dy \right) dz$$

$$\begin{aligned} \text{si } z \geq 0: & \int_0^{\infty} \alpha e^{-2\alpha y} dy = \frac{1}{2} \\ \text{si } z \leq 0: & \int_{-z}^{\infty} \alpha e^{-2\alpha y} dy = \frac{e^{2\alpha z}}{2} \end{aligned}$$

donc z a densité f où.

$$f(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} & \text{si } z \geq 0 \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha z} & \text{si } z \leq 0 \end{cases} = \frac{\alpha e^{-\alpha |z|}}{2}$$

3) $\varphi_\omega(t), \omega \sim \text{Cauchy}(\lambda)$ de densité $\frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}$

$$\text{Par } (*), f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itz} \varphi_Z(t) dt$$

$$\text{i.e. } \frac{\alpha e^{-\alpha |z|}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \frac{\alpha^2 dt}{\alpha^2 + t^2} \quad (**)$$

Si $\omega \sim \text{Cauchy}(\lambda), \omega$ a densité $f_\omega(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$

On prend $(**)$ avec $z = -i\mu, \alpha = \lambda$:

$$\lambda \frac{e^{-\lambda |\mu|}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \lambda \varphi_\omega(\mu)$$

$\uparrow$ pas de signe - dans la fct caractéristique

$$\text{Donc } \varphi_\omega(\mu) = e^{-\lambda |\mu|}; \mu \in \mathbb{R}$$

4) $u \perp\!\!\!\perp v \sim \text{Cauchy}(\lambda) \sim \text{Cauchy}(\mu)$

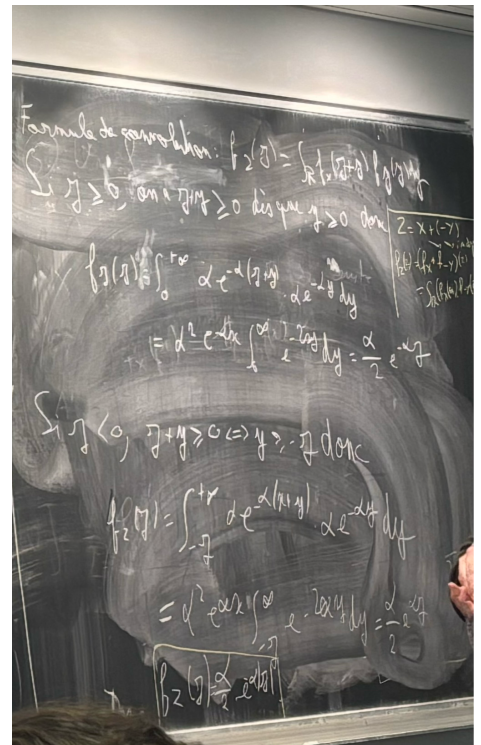
$\forall \alpha, \beta > 0, \alpha u + \beta v \sim \text{Cauchy}(\alpha\lambda + \beta\mu)$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha u + \beta v}(t) &= \mathbb{E}[e^{it(\alpha u + \beta v)}] = \mathbb{E}[e^{it\alpha u} \cdot e^{it\beta v}] \stackrel{\text{indep}}{=} \mathbb{E}[e^{it\alpha u}] \mathbb{E}[e^{it\beta v}] \\ &= \varphi_u(\alpha t) \varphi_v(\beta t) \\ &= e^{-\lambda |\alpha t|} \cdot e^{-\mu |\beta t|} \stackrel{\alpha, \beta > 0}{=} e^{-\lambda |\alpha| |t| - \mu |\beta| |t|} = e^{-(\alpha\lambda + \beta\mu) |t|} = \varphi_{\tilde{\omega}}(t) \text{ où } \tilde{\omega} \sim \text{Cauchy}(\alpha\lambda + \beta\mu) \end{aligned}$$

On a donc montré que $\varphi_{\alpha u + \beta v}(t) = \varphi_{\tilde{\omega}}(t)$ où $\tilde{\omega} \sim \text{Cauchy}(\alpha\lambda + \beta\mu)$

Or la fonction caractéristique caractérise la loi,

donc $\alpha\lambda + \beta\mu \sim \text{Cauchy}(\alpha\lambda + \beta\mu)$



Ex. 3:

1) $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\varphi_{X+Y}(t)$

$$\begin{aligned} X, Y \text{ indep alors } \varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}] \\ &\stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] \\ &= \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \end{aligned}$$

2) Pour n.v.a. indep,

Par récurrence immédiate, pour $X_1, \dots, X_n$ indep,

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) ; t \in \mathbb{R}$$

3) $\varphi_X(t)$ où $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Si $X_1, \dots, X_n \text{ iid } \sim \text{Ber}(p)$

Alors $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$

$$\text{Donc par 2) } \varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) = (1-p + pe^{it})^n$$

[pas fait en TD] $\varphi_X \stackrel{\text{loi d'un max}}{\sim} \varphi_{\text{loi somme indep}}, \varphi_X$.

4) $\varphi_{X_K}(\mu) = \exp(\lambda_K(e^{i\mu} - 1))$

$$\text{donc } \varphi_{X_1 + \dots + X_n}(\mu) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(\mu)$$

$$= \exp((\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(e^{i\mu} - 1))$$

$$\text{donc } X_1 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

$$5) \varphi_{X_K}(\mu) = \frac{\lambda_K}{\lambda_K - i\mu} \quad \forall X_K \sim \text{Exp}(\lambda_K)$$

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i - i\mu}$$

$$(\text{si } \lambda_K = \lambda \forall K, \varphi_{X_1 + \dots + X_n}(\mu) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\mu}\right)^n)$$

6) $X_K \sim \mathcal{N}(m_K, \sigma_K^2)$

$$\varphi(\mu) = \exp(i\mu m - \frac{1}{2} \sigma^2 \mu^2) \text{ pour } \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

donc

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(\mu) = \prod_{i=1}^n \exp(i\mu m_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \mu^2)$$

$$= \exp(i\mu \sum_{K=1}^n m_K - \frac{1}{2} \mu^2 \sum_{K=1}^n \sigma_K^2)$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\sum_{K=1}^n m_K, \sum_{K=1}^n \sigma_K^2\right)$$

TD 11

Rappels: X v.a.r.

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$$

* $\phi_X = \phi_Y \Rightarrow X$ et Y de même loi

3 façons de déterminer la loi d'une v.a.:

- la méthode de la fonction muette
- la fonction de répartition: $F_X = F_Y \Rightarrow X$ et Y de même loi
- la fonction caractéristique

THM. [Paul-Levy]

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a.r., X v.a.r.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad (\forall f \text{ continue bornée}, \mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)])$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(u) \rightarrow \phi_X(u)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \text{ tq } F_X \text{ continue en } t, F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(t)$$

Ex.1: étudier la convergence en loi des (X_n) :

1) $X_n = a_n + X$ ou X v.a. fixée arbitraire et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de nombres réels

$$\begin{aligned} \phi_{X_n}(u) &= \mathbb{E}[e^{iu(a_n + X)}] \\ &= e^{iu a_n} \mathbb{E}[e^{iuX}] \quad \text{linéarité} \\ &= e^{iu a_n} \phi_X(u) \end{aligned}$$

si $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$:

$$\phi_{X_n}(u) \rightarrow e^{iu a} \phi_X(u) = \phi_{a+X}(u)$$

$$\text{Donc } X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a+X \quad [\text{Thm Paul-Levy}]$$

$$\text{Donc } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a+X$$

inversement,

• si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers Y , montrons que a_n converge

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ borné

[si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, $\forall t$ $F_Y(t)$ continue, $F_{X_{K_n}}(t) \rightarrow F_Y(t)$ croissant $\rightarrow \{t, F_Y(t) \text{ non continue}\}$ dénombrable]

Supposons par l'absurde que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non borné

$$(\text{sous-suite}) a_{K_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$X_{K_n} = a_{K_n} + X \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$$

$$F_{X_{K_n}}(t) = \mathbb{P}(X_{K_n} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t - a_{K_n}) = F_X(t - a_{K_n})$$

$$\text{or } t - a_{K_n} \rightarrow -\infty, \text{ donc } F_X(t - a_{K_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall t, F_{X_{K_n}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\leadsto a_n$ borné

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$$

$$\text{donc } e^{iu a_n} \phi_X(u) \rightarrow \phi_Y(u)$$

$$\bullet \phi_X(0) = 1$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tq } u \in [-\delta, \delta], \phi_X(u) \neq 0$$

$$\Rightarrow u \in [-\delta, \delta], e^{iu a_n} \rightarrow \frac{\phi_Y(u)}{\phi_X(u)} = L(u)$$

Mq a_n converge:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ borné: si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, $\exists$ deux sous-suites tq $a_{k_n} \longrightarrow b$ $b \neq c$
 $a_{\ell_n} \longrightarrow c$

$$\forall u \in [-\delta, \delta]$$

$$e^{i\omega b} = e^{i\omega c} = 1$$

$$e^{i\omega(b-c)} = 1$$

$\forall u \in [-\delta, \delta], \omega(b-c) \in 2\pi\mathbb{Z}$. On prend $u_1, u_2 \in [-\delta, \delta], \frac{u_1}{u_2} \notin \mathbb{Q}$
 $\hookrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{u_1(b-c)}{u_2(b-c)} \in \mathbb{Q}$ contradiction

2) $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$

$$\phi_{X_n}(u) = (1-p+pe^{iu})^n, \text{ où } p = \lambda/n$$

$$= (1 + \frac{1}{n} \cdot \lambda(e^{iu} - 1))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(\lambda(e^{iu} - 1)) = \phi_X(u) \text{ où } X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \left[(1 + \frac{\lambda}{n})^n \longrightarrow e^\lambda \right]$$

$$\text{donc } X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

3) $X_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}, Y_n \sim \mathcal{P}(n)$

$$\phi_{X_n}(u) = \mathbb{E}[e^{iu \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}}]$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} \mathbb{E}[e^{i\frac{u}{\sqrt{n}} Y_n}] \quad \text{linéarité}$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} \phi_{Y_n}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{def de } \phi$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} \exp(n(e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}} - 1)) \quad \phi \text{ de } \mathcal{P}(\lambda)$$

$$e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}} = 1 + i\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o(1/n) \quad (e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \phi_{X_n}(u) = e^{-iu\sqrt{n}} e^{n(i\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o(1/n))}$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} e^{iu\sqrt{n} - \frac{u^2}{2} + o(1)}$$

$$= e^{-u^2/2 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-u^2/2} = \phi_X(u) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0,1), X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

4) $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ avec $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu, \sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$

$$\phi_{X_n}(u) = e^{i\mu_n u - \frac{1}{2}\sigma_n^2 u^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} = \phi_X(u) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$$

Ex. 2: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indep tq $\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = 1/2$

1) À quelle condition sur a_n la suite de v.a. X_n converge-t-elle en loi vers 0?

$$\phi_{X_n}(u) = \mathbb{E}[e^{iuX_n}]$$

$$= \frac{1}{2} e^{iua_n} + \frac{1}{2} e^{-iua_n} = \cos(ua_n)$$

$$\text{si } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \phi_X(u) \text{ où } X = 0$$

rq: même façon si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$, alors $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\sim a_n$ borné: X_n converge

2) $S_n = X_1 + \dots + X_n$
 Mq $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi $\Rightarrow \sum_n a_n^2$ converge

DEM: $\phi_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(u) = \prod_{k=1}^n \cos(ua_k)$

LEMME: $0 < b_k \leq 1$, $\prod_{k=1}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L > 0$

alors $\sum_{k=1}^n (1-b_k)$ converge

DEM: $\sum_{k=1}^n -\ln b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln L$

$\sum_{k=1}^n (-\ln b_k)$ $\sum_{k=1}^n (1-b_k)$ convergence de ces deux séries positifs sont équivalent

donc $\sum_{k=1}^n (1-b_k)$ converge

$\rho_k \rightarrow 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x}{1-x} \rightarrow 1$

$\phi_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^n \cos(ua_k) \rightarrow \phi_S(u)$

$\phi_S(0)=1, \exists \delta > 0$ tq $\forall u \in [-\delta, \delta], \phi_S(u) \neq 0$ donc par le lemme:
 $u \in [-\delta, \delta], \sum_{k=1}^n (1-\cos(ua_k))$ converge

si on a $a_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

alors $1-\cos(ua_k) \sim \frac{(ua_k)^2}{2}$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{(ua_k)^2}{2}$ converge

alors $\sum_{k=1}^n a_k^2$ converge.

$\phi_{S_n}(u) \rightarrow \phi_S(u)$

$\forall u \in [-\delta, \delta], \phi_S(u) \neq 0$

$\cos(ua_n) = \frac{\phi_{S_n}(u)}{\phi_{S_{n-1}}(u)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$\forall u \in [-\delta, \delta], \cos(ua_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3) Mq $\sum_n a_n^2$ diverge, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ borné $\Rightarrow Y_n = \frac{S_n}{\sum_{k=1}^n a_k^2}$ converge en loi

DEM: On mq $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probas

$E[X_n] = 0, \text{Var}(X_n) = a_n^2$

$E[Y_n] = 0$

$\text{Var}[Y_n] = \frac{\text{Var}(S_n)}{(\sum_{k=1}^n a_k)^2} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}$

$\forall \varepsilon > 0, P(|Y_n - 0| > \varepsilon) \stackrel{TC}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(Y_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $Y_n \xrightarrow{P} 0$
 $\Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} 0$

Ex 3: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v. a. dans $\mathbb{Z}$, $X_n \xrightarrow{d} X$

i) $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$

(liée ex 4 TD 10)

[Thm. de Porte-manteau implique directement ce résultat

$\hookrightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow F \text{ fermé, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F) \text{ (} \mathbb{Z} \text{ fermé dans } \mathbb{R} \text{)}$

DEM: $x_n \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$

$\chi_n \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$
 donc $\phi_{\chi_n}(2\pi) = \mathbb{E}[e^{i2\pi\chi_n}] = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{hypothèse}} \phi_X(2\pi)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{i2\pi x}] = 1$$

$$Y = e^{i2\pi X}, |Y| = 1, \text{var}(Y) = \mathbb{E}[|Y - \mathbb{E}[Y]|^2] \\ = \mathbb{E}[|Y|^2] - |\mathbb{E}[Y]|^2 = \mathbb{E}[1] - 1 = 0$$

$$\text{Var}(Y) = 0, \text{ alors } Y = \mathbb{E}(Y) \text{ p.s.}$$

c. a. d. $e^{i2\pi x} = 1$ p. S.

donc $x \in \mathbb{Z}$ p.s.

i.e. $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$

(methode similaire : ex 4 TD10)

2) $M_q \mathcal{Z}(\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}} + q$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \left(P(X_n = j) \right)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \alpha_j, \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j = 1$$

Il suffit de mq. $\mathbb{P}(X_n = j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha_j$

$$\bullet \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(t), \forall t \text{ tq } F_X \text{ continue en } t.$$

$X \in \mathbb{Z}$ p.s., alors F_X continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} t = j + 1/2, & \text{alors } F_{X_n}(j + \frac{1}{2}) & \longrightarrow F_X(j + 1/2) \\ j \in \mathbb{Z} & \quad \quad \quad \text{"} & \quad \quad \quad = F_X(j) \end{array}$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq j+1/2) = F_{X_n}(j)$$

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{Z} \quad F_{X_n}(j) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(j)$$

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= F_{X_n}(j) - F_{X_n}(j-1) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(j) - F_X(j-1) = \alpha_j \end{aligned}$$

Ex4: 1)

Ex4: 1)
2) difficile (condition de Linderberg
TCL: version générale)

1) $X_K^n \sim \text{Ber}(\alpha/n)$ indépendants

$$y_k^n \sim \text{Ber}(\beta/n)$$

$$\mu_n = \sum_{1 \leq k \leq n} (\lambda x_k^n + \delta y_k^n)$$

$$\phi_{\mu_n}(u) = \mathbb{E}[e^{iu(\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda x_k^n)}]$$