

DM Probas

PROBLÈME 1:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$1) \overline{A_\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \quad [\text{lois de Morgan}]$$

$$2) B_n = A_n \setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} A_k$$

$$\bigcup_{0 \leq k \leq -1} A_k = \emptyset$$

$$\text{Donc } B_0 = A_0 \setminus \emptyset = A_0$$

3) Mq les B_n sont 2 à 2 disjoints

Soient $m, n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a: } B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \quad B_m = A_m \setminus \bigcup_{k=0}^{m-1} A_k$$

Supposons $m < n$.

$$x \in B_m \cap B_n \Rightarrow (x \in A_m) \wedge (x \notin \bigcup_{k=0}^{m-1} A_k) \wedge (x \in A_n) \wedge (x \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k)$$

$$\text{En particulier, } (x \in A_m) \wedge (x \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k)$$

$$\text{Or } A_m \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \quad (\text{car } m < n) \Rightarrow x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \quad \text{contradiction}$$

$$\text{Donc } B_m \cap B_n = \emptyset \quad \forall m \neq n$$

4) Mq $A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$$\bullet A_\infty \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Soit $w \in A_\infty$,

i.e. w appartient à au moins un des ensembles A_n .

L'ensemble des n tq $w \in A_n$ est non vide

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier possible tq $w \in A_{n_0}$

• Si $n_0 = 0$, alors $w \in A_0 = B_0$

• Si $n_0 > 0$, alors $w \in A_{n_0}$ et $w \notin A_{n_0-1}$

donc $w \in B_{n_0}$ par définition

Dans les deux cas, $w \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$$\text{donc } A_\infty \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

$$\bullet \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset A_\infty$$

Soit $w \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $w \in B_{n_0}$

Donc $w \in A_{n_0} \setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n_0-1} A_k$, donc $w \in A_{n_0}$

Donc $w \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\text{Donc } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset A_\infty$$

Donc par double inclusion, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A_\infty$

5) Mq $P(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq n} P(B_k)$ (on dispose du triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$)

On a: $A_\infty = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ (Q.3+4 $\Rightarrow \{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une partition dénombrable de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$)

$$\text{Donc } IP(A_\infty) = \sum_{n \geq 0} IP(B_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N IP(B_k) \quad (\text{par définition de la série infinie (somme dénombrable)})$$

6) $P(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_n$

Par définition de B_n , $B_0 = A_0$

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} A_k = A_n \setminus A_{n-1}; n \geq 1$$

Donc $\sum_{k=0}^n P(B_k) = \overset{Q.2}{P(A_0)} + \sum_{k=0}^n P(A_k) - P(A_{k-1})$
 $= P(A_0) + \underbrace{P(A_n) - P(A_0)}_{\text{série télescopique}} = P(A_n)$

La suite de terme général $P(A_n)$ est convergente car elle est croissante ($A_n \subset A_{n+1}$) et majorée par 1. Donc elle converge et vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

En remplaçant dans le résultat de la Q5:

$$P(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

7) $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

$$A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \overline{A_{n+1}} \supset \overline{A_n}$$

En appliquant Q6 à la suite croissante $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_n})$$

Donc $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1 - P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n})$
 $= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_n})$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - P(\overline{A_n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

Donc $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

8) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ni croissante ni décroissante?

Sans l'hypothèse de monotonie, on ne peut pas en général conclure que $P(A_n)$ converge.

On peut poser $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{m \geq 0} \bigcap_{k \geq m} A_k$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k$

↑
événements qui finissent
par être toujours vrais

↑
événements qui se produisent
infiniment souvent

On peut encadrer $P(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n)$

PROBLÈME 2

$\forall \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, E(\varphi(X)) = \sum_{n \geq 0} P(X=n) \varphi(n) \quad \forall s \in [0,1], g_X(s) = E(s^X)$
 $\hookrightarrow$ fonction génératrice de la loi X

1) g_X bien définie + dérivées de tout ordre Soit X v.o. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\forall s \in [0,1], 0 \leq P(X=n) s^n \leq P(X=n)$$

or $\sum_{n \geq 0} P(X=n) = 1$ donc $\sum_{n \geq 0} P(X=n)$ cv absolument

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} P(X=n) s^n$ converge absolument (par comparaison)

$\Rightarrow$ la fonction g_X est bien définie $\forall s \in [0,1]$

c'est une série entière de rayon au moins 1, donc elle admet des dérivées de tout ordre. En dérivant terme par terme:

$$g_X^{(k)}(s) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) P(X=n) s^{n-k}$$

2) $X \sim \mathcal{B}(1/2)$

$$\text{Si } X \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ alors } g_X(s) = \sum_{n \geq 0} P(X=n) s^n = (1-p)s^0 + ps^1 = (1-p) + ps$$

$$\text{Donc pour une loi de Bernoulli symétrique } (p=1/2): g_X(s) = \frac{1+s}{2}$$

3) g_X caractérise la loi de X

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

• Si X et Y ont la même loi, alors elles ont même fonction génératrice

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } g_X = g_Y \text{ alors } g_X(s) - g_Y(s) &= \sum_{n \geq 0} P(X=n) s^n - \sum_{n \geq 0} P(Y=n) s^n \\ &= \sum_{n \geq 0} [P(X=n) - P(Y=n)] s^n = 0 \end{aligned}$$

Donc le polynôme $g_X - g_Y$ possède une infinité de racines

Donc les coef du polynôme sont tous nuls

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k)$

Donc X et Y suivent la même loi

4) $E(X^k) < \infty \iff \lim_{s \rightarrow 1^-} g_X^{(k)}(s)$ finie

$$g_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) P(X=n) s^{n-k}$$

en $s \rightarrow 1^-$:

$$g_X^{(k)}(1^-) = E[X(X-1) \dots (X-k+1)]$$

$(\Rightarrow) X(X-1) \dots (X-k+1) \leq X^k$ pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\text{donc } E[X(X-1) \dots (X-k+1)] \leq E[X^k]$$

$$\text{donc si } E(X^k) < \infty, E[X(X-1) \dots (X-k+1)] = \lim_{s \rightarrow 1^-} g_X^{(k)}(s) < \infty$$

$(\Leftarrow)$ Si $E[X(X-1) \dots (X-k+1)] < \infty$

$$\text{On a, } \forall n \in \mathbb{N}, n^k \leq C_k (1 + [n(n-1) \dots (n-k+1)]) \text{ où } C_k := \max \{(2k)^k, 2^k\}$$

[si $n < 2^k$ alors $n^k \leq (2^k)^k$

si $n \geq 2^k$ alors $n(n-1) \dots (n-k+1) \geq (n/2)^k$, d'où $n^k \leq 2^k (n(n-1) \dots (n-k+1))$]

$$\text{Donc } E(X^k) = \sum_{n \geq 0} n^k P(X=n) \leq C_k (1 + \sum_{n \geq 0} n(n-1) \dots (n-k+1) P(X=n)) = C_k (1 + E[X(X-1) \dots (X-k+1)]) < \infty$$

5) $E(X)$ et $V(X)$ = ?

On a: $G'_X(s) = \sum_{k=1}^n k P(X=k) s^{k-1}$

$G''_X(s) = \sum_{k=1}^n k(k-1) P(X=k) s^{k-2}$

donc $G'_X(1) = \sum_{k=1}^n k P(X=k) = E(X)$

et $G''_X(1) = \sum_{k=1}^n k(k-1) P(X=k)$
 $= \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k) - \sum_{k=1}^n k P(X=k)$
 $= E(X^2) - E(X)$

Donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
 $= G''_X(1) + E(X) - (G'_X(1))^2$
 $= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

6) $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ v.a. indep. $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Mq $g_{S_n} = \prod_{1 \leq i \leq n} g_{X_i}$

$g_{S_n}(s) = \sum_{n \geq 0} P(S_n=n) s^n$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(S_n=k) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n = k}} P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$

$= \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n = k}} \prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)$ (par indépendance)

donc $g_{S_n}(s) = \sum_{k \geq 0} P(S_n=k) s^k = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n = k}} \left(\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i) \right) s^k$
 $= \sum_{x_1, \dots, x_n \geq 0} \left(\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i) \right) s^{x_1 + \dots + x_n}$
 $= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x_i \geq 0} P(X_i=x_i) s^{x_i} \right) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}$

7) Fonction génératrice d'une loi Binomiale

Soit $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$

Par Q6 et Q2: $g_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^n (1-p) + ps$

$= [(1-p) + ps]^n$

8) X_i m loi $\rightarrow$ valeurs $\in \{1, \dots, n\}$
 $U, X_1, X_2, \dots, X_n$ indep. $Y = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$

Mq $g_Y = g_U \circ g_{X_1}$

Puis $E(Y) = E(U)E(X_1)$

$g_Y(s) = E(s^Y) = E\left(s^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \sum_{u=1}^n P(U=u) E(s^{x_1 + \dots + x_u})$ (loi de l'espérance totale selon la valeur de U)
 $= \sum_{u=1}^n P(U=u) \prod_{i=1}^u E(s^{x_i})$ (indépendance des X_i)
 $= \sum_{u=1}^n P(U=u) (g_{X_1}(s))^u$ (X_i i.i.d.)
 $= g_U(g_{X_1}(s))$
 $= g_U \circ g_{X_1}(s)$

$$\begin{aligned}
 \text{et } E(Y) &= g'_Y(1) \\
 &= g'_U(g_{X_1}(1)) \cdot g'_{X_1}(1) \\
 &= g'_U(1) \cdot g'_{X_1}(1) \quad (g_{X_1}(1)=1, g_U(1)=1) \\
 &= E(U) \cdot E(X_1)
 \end{aligned}$$

9) $g_X(u)$ bien définie tq $|u| \leq 1$

$$\text{et tq } \forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_X(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$$

• $g_X(e^{i\theta})$ est bien définie. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\text{Par définition, } g_X(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) e^{in\theta}$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, |e^{in\theta}| = 1.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} |P(X=n) e^{in\theta}| = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1, \text{ donc } g_X(e^{i\theta}) \text{ converge absolument}$$

$$\text{Donc } g_X(e^{i\theta}) \text{ est bien définie } \forall \theta \in \mathbb{R}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Notons } I_k = \int_0^{2\pi} g_X(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$$

$$I_k = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) e^{in\theta} \right) e^{-ik\theta} d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta \quad \text{par cv absolue, on peut permuter somme et intégrale (Fubini)}$$

Calcul de l'intégrale:

$$\bullet \text{ si } n=k \quad \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

$$\bullet \text{ si } n \neq k \quad \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \left[\frac{e^{i(n-k)\theta}}{i(n-k)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i(n-k)2\pi} - 1}{i(n-k)} = 0 \quad \text{car } e^{i(n-k)2\pi} = 1$$

Donc la somme se réduit au seul terme $n=k$

$$I_k = 2\pi P(X=k)$$

$$\text{Donc } P(X=k) = \frac{1}{2\pi} I_k$$

$$\text{d'où le résultat: } P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_X(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

10) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ tq $(g_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ cv simplement sur le cercle unité vers g_X

$$\text{Mq } \forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=k)$$

Par la question précédente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_n=k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{X_n}(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \quad \text{et } P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_X(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$$

$$\text{et } |g_{X_n}(e^{i\theta})| \leq 1$$

$$\text{Par hypothèse, } \forall \theta \in [0, 2\pi], g_{X_n}(e^{i\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g_X(e^{i\theta}) \quad (\text{cv simple de } g_{X_n} \text{ vers } g_X \text{ sur le cercle unité})$$

Par le théorème de convergence dominée (Lebesgue)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_X(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$$

$$= P(X=k)$$