

Partie I:

X distribuée sur le réseau $\alpha\mathbb{Z}$; $\alpha > 0$ si $P(X \in \alpha\mathbb{Z}) = 1$ et $\forall \beta > \alpha, P(X \in \beta\mathbb{Z}) < 1$
 si $\nexists$ un tel α : X est distribuée sur $0\mathbb{Z}$ identifié à $\mathbb{R}$.

→ aussi résultat
admis
plus tard

0) THM: [Classification des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$]

Tout sous-groupe fermé $H \subset \mathbb{R}$ est de la forme $H = \beta\mathbb{Z}$ pour un certain $\beta \geq 0$
 avec la convention $0\mathbb{Z} = \mathbb{R}$

preuve: (idée) si $H = \{0\}$ rien à faire

sinon, on pose $\alpha = \inf \{x > 0; x \in H\}$

- si $\alpha > 0$ alors $H = \alpha\mathbb{Z}$
- si $\alpha = 0$, H contient des élt. arbitrairement petits, donc $H = \mathbb{R}$

Application au cas de la marche aléatoire:

- si la loi de X est de type réseau, alors $\exists$ un plus petit pas $\alpha > 0$ tq $P(X \in \alpha\mathbb{Z}) = 1$
 Le plus petit sous-groupe fermé contenant le support de X est alors $\alpha\mathbb{Z}$.
- si la loi de X est non-réseau, i.e. $\nexists \alpha > 0$ tq $P(X \in \alpha\mathbb{Z}) = 1$

$\mathbb{R}$ tout entier

or $\mathbb{R}$ est le ss-groupe $\beta\mathbb{Z}$ avec $\beta = 0$.

→ C'est cohérent avec la structure des ss-groupes fermés de $(\mathbb{R}, +)$ jsp si j'ai bien compris la Q

X v.a.r distribuée sur le réseau $\alpha\mathbb{Z}$; $\alpha > 0$ (i.e. $P(X \in \alpha\mathbb{Z}) = 1$)

$S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$

point possible: $x \in \mathbb{R}$ possible si $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq 1 P(|S_n - x| < \varepsilon) > 0$

point récurrent: $x \in \mathbb{R}$ récurrent si $\forall \varepsilon > 0 P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1$

X_i intégrables i.i.d. m loi que X

1) a) Mq l'ensemble des points récurrents est une partie fermée de $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ récurrent}\}$

Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de points récurrents tq $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$. Mq $x \in \mathcal{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists M \in \mathbb{N}$ tq $\forall m \geq M, |x_m - x| < \varepsilon/2$.

Comme x_m est récurrent, $P(|S_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i.s.}) = 1$

or $|S_n - x| \leq |S_n - x_m| + |x_m - x| < \varepsilon$ si $|S_n - x_m| < \varepsilon/2$ et $|x_m - x| < \varepsilon/2$ ($m \geq M$)

↑ ineq Δ

Donc $P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1$

Ainsi x est récurrent.

Donc par la caractérisation séquentielle des fermés,

l'ensemble des points récurrents est fermé

1) b) Mq un point possible appartient à $\alpha\mathbb{Z}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un point possible.

Chaque $X_i \in \alpha\mathbb{Z}$ p.s. donc p.s. $S_n = X_1 + \dots + X_n \in n\alpha\mathbb{Z}$.

(les valeurs possibles de S_n sont donc les points $k\alpha$; $k \in \mathbb{Z}$)

Deux point distincts de $n\alpha\mathbb{Z}$ sont distants d'au moins α car $|k_1\alpha - k_2\alpha| = |k_1 - k_2|\alpha \geq \alpha$; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Soit $\varepsilon \in]0, \alpha/2[$

→ $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est de longueur $2\varepsilon < \alpha$: il ne peut donc contenir qu'un seul point de $n\alpha\mathbb{Z}$.

x est possible : $\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } \mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon) > 0$

$S_n \in n\alpha\mathbb{Z}$ p.s. : $\exists x - \varepsilon, x + \varepsilon \subset \text{contient nécessairement un point de } n\alpha\mathbb{Z}$

il ne peut y en avoir qu'un : $x \in n\alpha\mathbb{Z}$

or tout elt de $n\alpha\mathbb{Z}$ est aussi un multiple de α , car $Kn\alpha = (Kn)\alpha$ avec $Kn \in \mathbb{Z}$

donc $n\alpha\mathbb{Z} \subset \alpha\mathbb{Z}$, donc $x \in \alpha\mathbb{Z}$

Un point possible appartient à $\alpha\mathbb{Z}$

2) a) Mq $\forall \varepsilon > 0, n, K \geq 1 \{ |S_K - y| < \varepsilon \} \cap \{ S_{n+K} - S_K - (x-y) | < 2\varepsilon \text{ f.s.} \} \subset \{ |S_n - x| < \varepsilon \text{ f.s.} \}$

Soit ω tq $|S_K(\omega) - y| < \varepsilon$ et $|S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega) - (x-y)| < 2\varepsilon$ pour un nombre fini de n .

c. à d. : $\exists N_\varepsilon \text{ tq } \forall n \geq N_\varepsilon \quad |S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega) - (x-y)| \geq 2\varepsilon$

Ineq Δ :

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad |S_{n+K}(\omega) - x| \geq |S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega) - (x-y)| - |S_K(\omega) - y| \\ \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

Donc à partir d'un certain rang $|S_{n+K}(\omega) - x| \geq \varepsilon$

réindexation: posons $m = n+K$

Alors $\forall m \geq N(\varepsilon) + K \quad |S_m(\omega) - x| \geq \varepsilon$

Donc pour cet ω , $|S_n - x| < \varepsilon$ se produit finiment souvent.

Donc $\omega \in \{ |S_n - x| < \varepsilon \text{ f.s.} \}$

$$\{ |S_K - y| < \varepsilon \} \cap \{ |S_{n+K} - S_K - (x-y)| < 2\varepsilon \text{ f.s.} \} \subset \{ |S_n - x| < \varepsilon \text{ f.s.} \}$$

2) b) En déduire que si x est récurrent et y est possible alors $x-y$ est récurrent.

On cherche à mq $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - (x-y)| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1$

y possible : $\exists K \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \mathbb{P}(|S_K - y| < \varepsilon/3) > 0$

Posons $T_n := S_{n+K} - S_K$

les X_i sont i.i.d donc $S_{n+K} - S_K = X_{K+1} + \dots + X_{K+n}$ a la même loi que $S_n = X_1 + \dots + X_n$

De plus, les ensembles d'indices $\{1, \dots, K\}$ et $\{K+1, \dots, K+n\}$ sont disjoints.

$\Rightarrow T_n$ est indépendant de S_K

x est récurrent : $\mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon/3 \text{ i.s.}) = 1$

donc $\mathbb{P}(|T_n - x| < \varepsilon/3 \text{ i.s.}) = 1$ (m. loi que S_n)

Ineq Δ :

$$|T_n - (x-y)| \leq |T_n - x| + |S_K - y| < 2\varepsilon/3$$

Donc $\mathbb{P}(|T_n - (x-y)| < 2\varepsilon/3 \text{ i.s.}) > 0$

Donc $\mathbb{P}(|S_{n+K} - S_K - (x-y)| < 2\varepsilon/3 \text{ i.s.}) > 0$

Par Q2.a. : sur $\{ |S_K - y| < \varepsilon/3 \} \cap \{ S_{n+K} - S_K - (x-y) | < 2\varepsilon/3 \text{ f.s.} \}$ on a $\{ S_n - (x-y) | < \varepsilon \text{ f.s.} \}$

Donc $\mathbb{P}(|S_n - (x-y)| < \varepsilon \text{ i.s.}) > 0$

Loi du 0-1 de Kolmogorov:

$\{ |S_n - (x-y)| < \varepsilon \text{ i.s.} \}$ est un événement asymptotique, donc sa probabilité vaut 0 ou 1.

Comme elle est > 0 , elle vaut 1.

(ne dépend pas des $X_1, \dots, X_n$, ne change pas le fait que pour n assez grand $|S_n - (x-y)| < \varepsilon$ se produise ∞ fois souvent)

$\Rightarrow |x-y|$ est récurrent

3) a) Conditions une partie de $\mathbb{R}$ soit un sous groupe

Soit $H \subset \mathbb{R}$.

$$H \text{ sous groupe} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \in H \\ x, y \in H \Rightarrow x - y \in H, (\Leftrightarrow H \neq \emptyset \text{ et } \forall x, y \in H, x - y \in H) \end{cases}$$

b) Mq $\mathcal{R}$ ss gpe fermé de $\mathbb{R}$.

(On note $\mathcal{R} := \{x; x \text{ récurrent}\}$)

$$\rightarrow 0 \in \mathcal{R} \quad \text{si } \mathcal{R} = \emptyset \text{ ss gpe fermé de } \mathbb{R}.$$

Supposons $\mathcal{R} \neq \emptyset$, soit $x \in \mathcal{R}$.

Alors x est aussi possible, car $\mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1 \Rightarrow \exists n; \mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon) > 0$

Q2b) si x est récurrent et y est possible, alors $x - y$ est récurrent

En prenant $y = x$, on obtient $x - x = 0 \in \mathcal{R}$

Donc $0 \in \mathcal{R}$

$$\rightarrow x, y \in \mathcal{R} \Rightarrow x - y \in \mathcal{R}$$

Résultat de Q2b et y récurrent $\Rightarrow y$ possible

De plus $\mathcal{R}$ est fermé (Q1a)

Donc $\mathcal{R}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$

3) c) Mq $\alpha\mathbb{Z}$ est le plus petit ss groupe fermé contenant tous les états possibles

Posons $\mathcal{P} := \{x; \exists n, \mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon) > 0 \text{ pour un } \varepsilon > 0\}$

Par Q1b) $\mathcal{P} \subset \alpha\mathbb{Z}$

Donc $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous groupe fermé contenant $\mathcal{P}$

$\alpha\mathbb{Z}$ est minimal: (on veut mq si H ss gpe fermé tq $\mathcal{P} \subset H$, alors $\alpha\mathbb{Z} \subset H$)

Soit H un ss gpe fermé tq $\mathcal{P} \subset H$.

$$\text{Supp}(X) = \{x; \mathbb{P}(|S_1 - x| < \varepsilon) > 0\} \subset \mathcal{P} \quad \begin{matrix} \text{par définition} \\ \text{3c point possible avec } n=1 \text{ et} \\ \text{Supp}(X) \\ = \text{les valeurs que } X \text{ peut} \\ \text{prendre avec probas non nulle} \end{matrix}$$

donc $\text{Supp}(X) \subset H = \beta\mathbb{Z}$ pour un $\beta > 0$ par le résultat admis

$\alpha > 0$ (cas réseau) est défini comme le plus petit pas tel que la loi de X soit concentrée sur le réseau $\alpha\mathbb{Z}$

donc par définition de $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha\mathbb{Z}$ = plus petit sous-groupe fermé contenant $\text{Supp}(X)$

donc $\alpha\mathbb{Z} \subset \beta\mathbb{Z}$ (si $\beta < \alpha$, alors $\beta\mathbb{Z}$ serait un plus petit réseau contenant le support, contradiction)

Donc $\alpha\mathbb{Z} = \bigcap \{H \text{ ss gpe fermés}; \mathcal{P} \subset H\}$ i.e. $\alpha\mathbb{Z}$ est le plus petit ss gpe fermé contenant tous les états possibles.

Application
directe
de la Q. précédente
avec $\mathcal{R}$ non vide?

4) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un point récurrent

a) 0 est récurrent

$x \in \mathcal{R}$, par Q2b) avec $(x, y = x)$, on a $0 \in \mathcal{R}$.

ou: $\mathcal{R}$ est un sous-groupe (Q4), $0 \in \mathcal{R}$, donc 0 est récurrent

b) y possible, $-y$ récurrent

Soit $y \in \mathcal{P}$

Q4a) $0 \in \mathcal{R}$

Q2b) avec $x = 0, y$ donne

$$0 - y = -y \in \mathcal{R}$$

donc $-y$ est récurrent

c) Tous les points de $\alpha\mathbb{Z}$ sont récurrents

tout point récurrent est possible, donc $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}$

Q1b) un point possible $\in \alpha\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{R} \subset \mathcal{P} \subset \alpha\mathbb{Z}$ (*)

Q4b) si $y \in \mathcal{P}$ alors $-y \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ est un sous-groupe donc $-y \in \mathcal{R} \Rightarrow y \in \mathcal{R}$

Donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$.

Q3c) $\alpha\mathbb{Z}$ est le plus petit ss gpe fermé contenant $\mathcal{P}$

or $\mathcal{R}$ est un ss gpe fermé (qn) contenant $\mathcal{P}$

donc $\alpha\mathbb{Z} \subset \mathcal{R}$ (**)

En combinant (*) et (**):

$\alpha\mathbb{Z} \subset \mathcal{R} \subset \alpha\mathbb{Z}$ donc $\mathcal{R} = \alpha\mathbb{Z}$

$\leadsto$ Tous les points de $\alpha\mathbb{Z}$ sont récurrents

Partie II:

I intervalle borné de $\mathbb{R}$ tq $I \cap \alpha\mathbb{Z} \neq \emptyset$

5) Mq si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \in I) < \infty$, alors aucun point de $\alpha\mathbb{Z}$ n'est récurrent

Soit $x \in I \cap \alpha\mathbb{Z}$

I est fermé borné, donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{ |S_n - x| < \varepsilon \} \subset \{ S_n \in I \}$

$\leadsto \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon) \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \in I) < \infty$ (*)

Supposons par l'absurde que x est récurrent

alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1$

Par BCI: $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|S_n - x| < \varepsilon) = \infty$ contradiction avec (*)

Donc x n'est pas récurrent.

Comme $x \in I \cap \alpha\mathbb{Z}$ était arbitraire:

$\leadsto$ aucun point de $I \cap \alpha\mathbb{Z}$ n'est récurrent

On suppose $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \in I) = \infty$ (HI)

6) Soit $\varepsilon > 0 < \frac{\text{longueur}(I)}{2}$. Mq $\exists x \in \alpha\mathbb{Z} \cap I$ $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(|S_k - x| < \varepsilon) = \infty$

I est un intervalle borné, $\alpha\mathbb{Z}$ est discret, donc $I \cap \alpha\mathbb{Z} = \{x_1, \dots, x_m\}$ est fini.

Soit $\varepsilon > 0$ tq:

$\rightarrow \varepsilon < \frac{\text{longueur}(I)}{2}$

$\Rightarrow \forall x_j \in I,]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[\subset I$

$\rightarrow \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[$ a de longueur $2\varepsilon < \alpha$

$\leadsto$ (m raisonnement que Nb) deux points distincts du réseau sont distants d'au moins α , donc:

$]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[$ contient au plus un point de $\alpha\mathbb{Z}$ (**)

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\{ S_n \in I \} \subset \bigcup_{j=1}^m \{ |S_n - x_j| < \varepsilon \}$ (***)

En effet, si $S_n \in I \cap \alpha\mathbb{Z}$, alors par (**), $\exists ! x_j \in I \cap \alpha\mathbb{Z}$ tq $|S_n - x_j| < \varepsilon$

$$(***) \Rightarrow P(S_n \in I) \leq \sum_{j=1}^m P(|S_n - x_j| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow +\infty = \sum_{n \geq 0} P(S_n \in I) \leq \sum_{j=1}^m \underbrace{\sum_{n \geq 0} P(|S_n - x_j| < \varepsilon)}_{HI}$$

Comme la somme d'un nombre fini m de séries positives $= +\infty$, au moins l'une d'entre elles diverge.

$$\leadsto \exists x \in I \cap \mathbb{Z} \text{ tq } \sum_{k \geq 0} P(|S_k - x| < \varepsilon) = +\infty \quad (1)$$

On fixe x, ε vérifiant (1). $A_K := \{ |S_K - x| < \varepsilon; \forall n \geq 1, |S_{K+n} - x| \geq \varepsilon \}$, $K \in \mathbb{N}$

$$7) M_q \{ |S_K - x| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{n+K} - S_K| \geq 2\varepsilon \} \subset A_K$$

puis que $P(A_K) \geq P(|S_K - x| < \varepsilon) P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon)$

Pour tout ω et $\forall n \geq 1$

$$S_{n+K}(\omega) - x = (S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega)) + (S_K(\omega) - x)$$

si $|S_K(\omega) - x| < \varepsilon$ et $|S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega)| \geq 2\varepsilon$, alors

$$|S_{n+K}(\omega) - x| \geq |S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega)| - |S_K(\omega) - x| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

$$\text{donc } \{ |S_K - x| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{n+K} - S_K| \geq 2\varepsilon \} \subset A_K$$

$(S_{n+K} - S_K)_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} (S_n)_{n \geq 1}$ et est indep de S_K (m raisonnement que dans 2)b)

Donc

$$P(\forall n \geq 1, |S_{n+K} - S_K| \geq 2\varepsilon) = P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon)$$

donc en utilisant l'inclusion précédemment obtenue, on obtient:

$$P(A_K) \geq P(|S_K - x| < \varepsilon) P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon) \quad (2)$$

$$8a) M_q (P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ finiment souvent}) \geq P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon) \left(\sum_{K \geq 0} P(|S_K - x| < \varepsilon) \right))$$

Les événements A_K sont deux à deux disjoints (le 'dernier-temps' où $|S_n - x| < \varepsilon$ ne peut pas être deux indices différents).

De plus, $\bigcup_{K \geq 0} A_K = \{ |S_n - x| < \varepsilon \text{ f.s.} \}$

$$\text{donc } P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ f.s.}) = \sum_{K \geq 0} P(A_K) \stackrel{(2)}{\geq} P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon) \sum_{K \geq 0} P(|S_K - x| < \varepsilon)$$

$$b) P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon) = 0$$

Par (1), $\sum_K P(|S_K - x| < \varepsilon)$ est infinie, donc $P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon) \sum_{K \geq 0} P(|S_K - x| < \varepsilon)$ est soit 0, soit $+\infty$
 $\leq P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ f.s.}) \stackrel{K \geq 0}{\leq} 1$ car c'est une proba

$$\text{donc } P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq 2\varepsilon) = 0$$

$$9) \delta, \varepsilon \text{ tq } 0 < \delta < \varepsilon \text{ et } K \in \mathbb{N}$$

$$a) M_q \{ |S_K| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{K+n}| \geq \varepsilon \} \subset \{ |S_K| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{K+n} - S_K| \geq \varepsilon - \delta \}$$

Soit $\omega \in \{ |S_K| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{K+n}| \geq \varepsilon \}$

$$\text{Ineq } \Delta: |S_{K+n}(\omega) - S_K(\omega)| \geq |S_{K+n}(\omega)| - |S_K(\omega)| \geq \varepsilon - \delta$$

$|u - v| \geq ||u| - |v||$ Ineq $\Delta 2$
 donc en particulier
 $|u - v| \geq |u| - |v|$

$$\text{donc } \omega \in \{ |S_K| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{K+n} - S_K| \geq \varepsilon - \delta \}$$

b) Mq $P(|S_k| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) = 0$

Par Q9a) $P(|S_k| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) \leq P(|S_k| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{k+n} - S_k| \geq \varepsilon - \delta)$

On a $(S_{k+n} - S_k)_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} (S_n)_{n \geq 1}$ et $(S_{k+n} - S_k)_{n \geq 1} \perp S_k$

Donc

$P(|S_k| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{k+n} - S_k| \geq \varepsilon - \delta) = P(|S_k| < \delta) P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq \varepsilon - \delta)$

Par Q8b avec $\frac{\varepsilon - \delta}{2} (> 0)$, on a $P(\forall n \geq 1, |S_n| \geq \varepsilon - \delta) = 0$

Donc $P(|S_k| < \delta, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) = 0$

c) $P(|S_k| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) = 0$

$\{|S_k| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{m \geq 1} \{|S_k| \leq \varepsilon - 1/m, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}$

Pour chaque m , on pose $\delta_m = \varepsilon - 1/m$ (le but étant d'appliquer qb)

Par Q9b) $(0 < \delta_m < \varepsilon)$

$P(|S_k| \leq \delta_m, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) \leq P(|S_k| < \delta_m, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) = 0$ (**)

En combinant (*) et (**): $P(|S_k| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) \leq \sum_{m \geq 1} 0 = 0$ (union dénombrable d'événements de probas nulle $\Rightarrow$ probas nulle)

Donc $P(|S_k| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) = 0$

d) Mq $\forall \varepsilon > 0, P(|S_n| < \varepsilon \text{ f.s.}) = 0$

L'événement ' $|S_n| < \varepsilon \text{ f.s.}$ ' s'écrit:

$\{|S_n| < \varepsilon \text{ f.s.}\} = \bigcup_{k \geq 0} \{|S_k| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}$

Par Q9c) pour tout k ,

$P(|S_k| < \varepsilon, \forall n \geq 1, |S_{k+n}| \geq \varepsilon) = 0$

donc par sous-additivité et union dénombrable, $P(|S_n| < \varepsilon \text{ f.s.}) \leq \sum_{k \geq 0} 0 = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, P(|S_n| < \varepsilon \text{ f.s.}) = 0$

10) 0 récurrent + thm démontre

Par complémentarité

$\{|S_n| < \varepsilon \text{ i.s.}\} = \mathbb{Z} \setminus \{|S_n| < \varepsilon \text{ f.s.}\}$

Par Q9d) $P(|S_n| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Donc

$\uparrow$ définition de la récurrence

0 est récurrent :)

THM: Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le réseau $\alpha\mathbb{Z}$

Pour un intervalle borné I tq $I \cap \alpha\mathbb{Z} \neq \emptyset$, on a:

0 est récurrent $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} P(S_n \in I) = +\infty$
et dans ce cas, tous les points de $\alpha\mathbb{Z}$ sont récurrents

Partie III:

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ intégrables

11) $\mathbb{E}(X_1) > 0$, mq $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Les X_n sont intégrables et iid

Par la loi forte des grands nombres $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1] =: m > 0$ (*)

$\forall \epsilon > 0$ soit vraie, $\exists N_\epsilon$ tq $\forall n \geq N_\epsilon$, $\frac{S_n(\omega)}{n} \geq \frac{m}{2}$ (en prenant $\epsilon = m/2$)
donc $S_n(\omega) \geq \frac{m}{2} \cdot n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

donc $S_n \xrightarrow{} +\infty$ p.s.

12) $\mathbb{E}[X_1] \neq 0 \Rightarrow$ aucun point de $\mathbb{R}$ n'est récurrent

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} m$ par LFGN (X_n intégrables + iid)

si $m > 0$: alors comme dans Q11) $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty$

si $m < 0$: Q11) appliquée à $(-X_n)$ ($\sim \mathbb{E}[-X_1] = -m > 0$)

donne $-S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty \Rightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} -\infty$

$\forall m \neq 0$, on a: $|S_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty$ (*)
 $\uparrow$ ($S_n(\omega)$ sort définitivement de tout intervalle borné)

$[x \in \mathbb{R} \text{ est récurrent si } \forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - x| < \epsilon \text{ i.s.}) = 1]$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $I = [x - \epsilon, x + \epsilon]$ un intervalle borné (l'événement $|S_n - x| < \epsilon$ équivaut à $S_n \in I$)

Par (*), pour presque tout ω $\exists N_\epsilon$ tq $n \geq N_\epsilon \Rightarrow S_n(\omega) \notin I$

Donc $\mathbb{P}(S_n \in I \text{ i.s.}) = 0$

donc $\mathbb{P}(|S_n - x| < \epsilon \text{ i.s.}) = 0$

Autrement dit x n'est pas récurrent.

x étant arbitraire,

si $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$ aucun point de $\mathbb{R}$ n'est récurrent

13) $\mathbb{E}[X_1] = 0$. I intervalle borné de $\mathbb{R}$.

$N := \sum_{n \geq 0} 1_I(S_n)$, $T := \inf \{n \geq 1; S_n \in I\}$

(j'ai fait b avant a car ça paraissait plus logique)

b) valeurs possibles de N et T

$N = \sum_{n \geq 0} 1_I(S_n)$ donc $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

($N = +\infty$ signifie $\sum \mathbb{P}(S_n \in I) = +\infty$)

$T \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

c) Que représentent T et N

T : premier instant où $S_n \in I$ (la marche visite l'intervalle I)

N : nombre d'indices n vérifiant (le nombre total de visites dans I)

a) Mq N, T sont des v.a.

Γ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable si $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

T et N prennent des valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, il suffit de vérifier que $\{T=k\}$ et $\{N=m\}$ sont dans $\mathcal{F}$.

(infimum d'entiers positifs est son plus petit elt)

I: Pour $k \geq 1$: $T=k \Leftrightarrow S_k \in I$ et $\forall j < k, S_j \notin I$

$$\text{Donc } \{T=k\} = \{S_k \in I\} \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} \{S_j \notin I\}$$

→ pour tout j, S_j mesurable car v.a.

→ $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \{S_j \in I\} = S_j^{-1}(I) \in \mathcal{F}$

→ $\{S_j \notin I\} = \{S_j \in I\}^c \in \mathcal{F}$ complémentaire d'un ensemble mesurable.

→ $\mathcal{F}$ stable par intersection finie

Donc $\{T=k\}$ est dans $\mathcal{F}$.

Ainsi,

T est mesurable

N: Pour $m \in \mathbb{N}$

$$\{N=m\} = \bigcup_{\substack{A \subset \mathbb{N} \\ |A|=m}} \left(\underbrace{\bigcap_{k \in A} \{S_k \in I\}}_{\text{mesurable}} \cap \underbrace{\bigcap_{k \notin A} \{S_k \notin I\}}_{\text{mesurable}} \right)$$

↓
union de nombreable donc mesurable
mesurable car intersection finie

Donc

↗ $A_m = \{A \subset \mathbb{N}; |A|=m\}$ dénombrable
car on peut coder tout $A \subset \mathbb{N}$ fini de cardinal m
comme un elt de $(\mathbb{N}^m)$, $\rightarrow$ dénombrable

N est mesurable

14) Mq $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{T=k\}} N d\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}(N) = \int_{-\infty}^{\infty} N d\mathbb{P} = \int_{\{T < \infty\}} N d\mathbb{P} \quad \text{car } N \geq 0 \text{ et } N=0 \text{ sur } \{T=\infty\}$$

(si on n'entre jamais dans I , on ne compte aucune occurrence)

Pour $m \geq 1$, posons

$$A_m := \{T \leq m\} = \bigcup_{k=1}^m \{T=k\}$$

↗ forment une partition de $\{T < \infty\}$

Les $\{T=k\}$ sont 2 à 2 disjoints, donc $(A_m)_{m \geq 1}$ suite croissante d'ensembles

$$\forall m \geq 1, \int_{A_m} N d\mathbb{P} = \int_{\bigcup_{k=1}^m \{T=k\}} N d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^m \int_{\{T=k\}} N d\mathbb{P} \quad \text{car les } \{T=k\} \text{ disjoints}$$

$N \geq 0$, les $N \mathbb{1}_{A_m}$ sont croissantes et $N \mathbb{1}_{A_m} \rightarrow N \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} = N$

Donc par thm convergence monotone:

$$\begin{aligned} \int_{\{T < \infty\}} N d\mathbb{P} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} N d\mathbb{P} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_{\{T=k\}} N d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{T=k\}} N d\mathbb{P} \end{aligned}$$

(l'échange $\lim - \sum$ est justifié car il s'agit d'une somme croissante de termes positifs)

Donc $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{T=k\}} N d\mathbb{P}$

15) Soit $K \geq 1$. Mq $\{T=K\} \in \sigma(X_1, \dots, X_K)$

On a $\{T=K\} = \{S_K \in \bigcap_{j=1}^{K-1} \{S_j \notin I\}\}$ (cf Q13a)

↓ on applique un raisonnement similaire

$$\forall j \leq K, S_j = X_1 + \dots + X_j$$

Chacun des $X_1, \dots, X_j$ est $\sigma(X_1, \dots, X_K)$ -mesurable

Une somme finie de fonctions mesurables est mesurable donc S_j est $\sigma(X_1, \dots, X_K)$ mesurable.

Donc S_j est $\sigma(X_1, \dots, X_K)$ -mesurable

$I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $\{S_j \in I\} = S_j^{-1}(I) \in \sigma(X_1, \dots, X_K)$

Par complément, $\{S_j \notin I\} \in \sigma(X_1, \dots, X_K)$

$\sigma(X_1, \dots, X_K)$ tribu donc stable par intersection finie

Donc

$$\boxed{\{T=K\} \in \sigma(X_1, \dots, X_K)}$$

16) $a =$ longueur de I .

Soit $K \geq 1$ et $\omega \in \{T=K\}$

a) Mq $1_I(S_K(\omega)) = 1, \forall n < K, 1_I(S_n(\omega)) = 0$

Par définition de $T, (T = \inf \{n \geq 1; S_n \in I\})$

$$T(\omega) = K \Leftrightarrow \begin{cases} S_K(\omega) \in I \\ S_n(\omega) \notin I \quad \forall n < K \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{1_I(S_K(\omega)) = 1 \text{ et } \forall n < K, 1_I(S_n(\omega)) = 0}$$

b) Mq $N(\omega) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} 1_{I-S_K(\omega)}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$

$$\leq 1 + \sum_{n \geq 1} 1_{[-a, a]}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$$

1° inég.

$$N(\omega) = \sum_{n \geq 0} 1_I(S_n(\omega)) = 1_I(S_K(\omega)) + \sum_{n \geq K} 1_I(S_n(\omega))$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} 1_I(S_{n+K}(\omega)) \quad \text{par Q16a) (*)}$$

$\forall n \geq 1$ et pour tout ω ,

$$S_{n+K}(\omega) \in I \Rightarrow S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega) \in I - S_K(\omega) \quad \text{où } I - S_K(\omega) = \{x - S_K(\omega); x \in I\}$$

$$\begin{matrix} A \subset B \\ \Rightarrow 1_A \leq 1_B \end{matrix}$$

$$\hookrightarrow \text{Donc } 1_I(S_{n+K}(\omega)) \leq 1_{I-S_K(\omega)}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$$

Dans (*):

$$N(\omega) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} 1_{I-S_K(\omega)}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega)) \quad (**)$$

2° inég: (on veut remplacer $I - S_K(\omega)$ par $[-a, a]$)

I est un intervalle de longueur a

et $S_K(\omega) \in I$ (car $\omega \in \{T=K\}$) donc I est de longueur a contenant $S_K(\omega)$

$I - S_K(\omega)$ est encore un intervalle de longueur a (une translation conserve la longueur)

$$\text{et } 0 = S_K(\omega) - S_K(\omega) \in I - S_K(\omega)$$

↑
 $\in I$

$$\hookrightarrow I - S_K(\omega) \text{ intervalle de longueur } a \text{ contenant } 0 \text{ donc } I - S_K(\omega) \subset [-a, a]$$

↓

détails
Soit J un intervalle de longueur a contenant 0 d'extrémités u et v . ($u < v$)

On a $u - v = -a$.

$0 \in J = [u, v]$ donc $u \leq 0 \leq v$

$\forall x \in [u, v], |x| \leq a$

$\hookrightarrow$ donc $J \subset [-a, a]$

$$I - S_K(\omega) \subset [-a, a]$$

$$\text{donc } \forall n \geq 1, \{S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega) \in I - S_K(\omega)\} \subset \{S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega) \in [-a, a]\}$$

$$\text{donc } \mathbb{1}_{I - S_K(\omega)}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega)) \leq \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$$

→ En remplaçant dans $(*)$ chaque indicatrice $\mathbb{1}_{I - S_K(\omega)}$ par cette majoration, on obtient la deuxième inégalité.
Donc on a bien $\forall \omega \in \{T=K\}$,

$$N(\omega) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{I - S_K(\omega)}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega)) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$$

calcul un peu
en dérivant dérivée

$$c) \text{ En déduire que } \int_{\{T=K\}} N dP \leq P(T=K) \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq a) \right)$$

$$Q16) b): \forall \omega \in \{T=K\} \quad N(\omega) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$$

donc $\forall \omega$:

$$\mathbb{1}_{\{T=K\}}(\omega) N(\omega) \leq \mathbb{1}_{\{T=K\}}(\omega) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T=K\}}(\omega) \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K}(\omega) - S_K(\omega))$$

en prenant l'espérance:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} N] \leq P(T=K) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K} - S_K)] \quad (*)$$

$$Q15) (\{T=K\} \in \sigma(X_1, \dots, X_K))$$

donc $\mathbb{1}_{\{T=K\}}$ est $\sigma(X_1, \dots, X_K)$ -mesurable

et $S_{n+K} - S_K = X_{K+1} + \dots + X_{K+n}$ ne dépend que des $X_{K+1}, \dots, X_{K+n}$ tous indep

Donc $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} \mathbb{1}_B(S_{n+K} - S_K)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}}] \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(S_{n+K} - S_K)]$$

pour $B = [-a, a]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K} - S_K)] &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{T=K\}} dP \int_{\Omega} \mathbb{1}_{[-a, a]}(S_{n+K} - S_K) dP \\ &= P(T=K) P(|S_{n+K} - S_K| \leq a) = P(T=K) P(|S_n| \leq a) \end{aligned}$$

X_i i.i.d donc $(S_{n+K} - S_K)_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} (S_n)_{n \geq 1}$

Donc $(*)$ devient:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} N] \leq P(T=K) + \sum_{n \geq 1} P(T=K) P(|S_n| \leq a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} N] = P(T=K) \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq a) \right) \quad (3)$$

$$d) \text{ Conclure que } \mathbb{E}(N) \leq P(T < +\infty) \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq a) \right)$$

En sommant (3) sur $K \geq 1$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T=K\}} N] \leq \sum_{K=1}^{\infty} P(T=K) \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq a) \right) \quad (**)$$

Les $\{T=K\}_{K \geq 1}$ 2 à 2 disjoints et leur union est $\{T < +\infty\}$ (Q14)

$$\text{donc } \sum_{K=1}^{\infty} P(T=K) = P(T < +\infty)$$

$$\text{et par Q14) } \mathbb{E}(N) = \sum_{K=1}^{\infty} \mathbb{E}[N \mathbb{1}_{\{T=K\}}]$$

$$\text{Donc en remplaçant dans } (**) \text{ on obtient: } \mathbb{E}(N) \leq P(T < +\infty) \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq a) \right)$$

$$17) M \geq 1. \text{ Mq } \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M) \leq \sum_{K=-M}^{M-1} \sum_{n \geq 1} P(K \leq S_n < K+1) \\ \leq 2M(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1))$$

1^{ère} ineq:

$$\{ |S_n| < M \} = \{ -M < S_n < M \} = \bigcup_{K=-M}^{M-1} \{ K \leq S_n < K+1 \} \quad \text{car }]-M, M[= \bigcup_{K=-M}^{M-1} [K, K+1[$$

$$\text{donc } P(|S_n| < M) = \sum_{K=-M}^{M-1} P(K \leq S_n < K+1) \quad (\text{réunion disjointe}) \quad (\text{les } [K, K+1[\text{ sont disjoints})$$

en sommant sur $n \geq 1$,

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M) = \sum_{K=-M}^{M-1} \sum_{n \geq 1} P(K \leq S_n < K+1) \quad \text{↑ termes positifs}$$

2^{ème} ineq:

$$\forall K \in \{-M, \dots, M-1\}, \text{ on note } I_K := [K, K+1[\text{ et } \quad \text{longueur } 1$$

$$N^{(K)} = \sum_{n \geq 0} 1_{I_K}(S_n) \quad \text{nb de visites de } I_K \text{ et } T^{(K)} \text{ le 1^{er} temps d'entrée dans } I_K.$$

Par (3) (Q16c): (a=2)

$$E[N^{(K)}] \leq P(T^{(K)} < +\infty) \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) \right) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) \quad \text{car } P(T^{(K)} < +\infty) \leq 1$$

$$\text{et } \forall n, \{ K \leq S_n < K+1 \} = \{ S_n \in I_K \},$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} P(K \leq S_n < K+1) = \sum_{n \geq 1} P(S_n \in I_K) = E[N^{(K)}]$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} P(K \leq S_n < K+1) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{K=-M}^{M-1} \sum_{n \geq 1} P(K \leq S_n < K+1) \leq 2M \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) \right) \quad \text{en sommant sur } K = \overbrace{-M, \dots, M-1}^{2M \text{ val}}$$

Donc on a bien:

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M) \leq \sum_{K=-M}^{M-1} \sum_{n \geq 1} P(K \leq S_n < K+1) \leq 2M(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1))} \quad \text{CL}$$

18) Soit $\varepsilon > 0$

$L, J \sim$ partie entière

$$a) \text{ Mq } P(|S_n| \leq L n \varepsilon J) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Par hypothèse, les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont intégrables i.i.d et $E[X_1] = 0$

$$\text{Par LFGN } \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$$

$$\text{Soit } \omega \text{ tq } \frac{S_n(\omega)}{n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \exists N_\omega \text{ tq } \forall n \geq N_\omega, |S_n(\omega)| \leq n \varepsilon$$

$$\text{et } |S_n(\omega)| \leq n \varepsilon \Rightarrow |S_n(\omega)| \leq [L n \varepsilon J] + n \varepsilon - 1 \leq L n \varepsilon J \quad \text{car } [L n \varepsilon J] \geq n \varepsilon - 1$$

$$\text{Donc } 1_{\{|S_n| \leq L n \varepsilon J\}}(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 1$$

$$\text{On pose } f_n(\omega) = 1_{\{|S_n| \leq L n \varepsilon J\}}(\omega), f(\omega) = 1$$

$$|f_n| \leq 1 \quad \forall n \text{ et } f_n \xrightarrow[\text{p.s.}]{} f$$

Thm convergence dominée:

$$\int_{\Omega} f_n dP \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f dP = 1$$

$$\text{or } \int_{\Omega} f_n dP = \int_{\Omega} 1_{\{|S_n| \leq L n \varepsilon\}} dP = P(|S_n| \leq L n \varepsilon)$$

donc

$$\boxed{P(|S_n| \leq L n \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

$$b) \text{ Mq } \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \geq \sum_{1 \leq n < m/\sqrt{\varepsilon}} P(|S_n| < L n \varepsilon)$$

Soit $m \geq 1$

$\forall 1 \leq n < \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}$ on a $n \varepsilon < m \sqrt{\varepsilon}$ donc $L n \varepsilon \leq L m \sqrt{\varepsilon}$ car $L \cdot$ croissante

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \{ |S_n| < L n \varepsilon \} &\subset \{ |S_n| < L m \sqrt{\varepsilon} \} \\ \Rightarrow P(|S_n| < L n \varepsilon) &\leq P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq n < m/\sqrt{\varepsilon}} P(|S_n| < L n \varepsilon) \leq \sum_{1 \leq n < m/\sqrt{\varepsilon}} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \leq \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \text{ en sommant sur } 1 \leq n < m/\sqrt{\varepsilon}$$

$\uparrow$ plus grande qu'une somme partielle

$$\text{donc } \boxed{\sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \geq \sum_{1 \leq n < m/\sqrt{\varepsilon}} P(|S_n| < L n \varepsilon)}$$

$$c) \text{ En déduire que } \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \geq 1/\varepsilon$$

Soit $\delta > 0$.

Par Q18a) $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $P(|S_n| \leq L n \varepsilon) \geq 1 - \delta$

($\sim P(|S_n| < L n \varepsilon) \geq 1 - \delta$ pour n assez grand)

Soit m assez grand pour que $\frac{m}{\varepsilon} > N$.

$$\sum_{1 \leq n < m/\varepsilon} P(|S_n| < L n \varepsilon) \geq \sum_{N \leq n < m/\varepsilon} P(|S_n| < L n \varepsilon) \geq (\frac{m}{\varepsilon} - N)(1 - \delta) (*)$$

Par Q18b) en divisant par $m \varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m \varepsilon} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) &\geq \frac{1}{m \varepsilon} \sum_{1 \leq n < m/\varepsilon} P(|S_n| < L n \varepsilon) \\ \Rightarrow \frac{1}{m \varepsilon} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) &\geq \frac{1}{m \varepsilon} \left(\frac{m}{\varepsilon} - N \right) (1 - \delta) = (1 - \delta) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{N}{m \varepsilon} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \varepsilon} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \geq (1 - \delta) \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \delta > 0$$

$$\text{Donc } \boxed{\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}) \geq 1/\varepsilon} \quad (S)$$

19) Conclure que $\sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) = +\infty$ + critère de récurrence

Pour chaque m , posons $M_m = L m \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{N}$

En appliquant (4) avec $M = M_m$:

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M_m) \leq 2 M_m \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) \right)$$

$$M_m = L m \sqrt{\varepsilon} \sim m \sqrt{\varepsilon}$$

Pour m assez grand:

$$\frac{1}{m \sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M_m) \leq 2 \frac{M_m}{m \sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1)\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1)\right) (*)$$

$$\text{D'autre part, } \{|S_n| < M_m\} \supset \{|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon}\}$$

$$\text{donc } \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M_m) > P(|S_n| < L m \sqrt{\varepsilon})$$

$$\text{donc } \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M_m) > 1/\varepsilon \quad (**) \text{ par (S)}$$

En combinant (*) et (**):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq 2 \left(1 + \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1)\right)$$

Supposons par l'absurde que $\sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) < +\infty$

on aurait $\frac{1}{\varepsilon} \leq C \quad \forall \varepsilon > 0$, où C est une constante

ce qui est impossible quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) = +\infty$$

CRITÈRE DE RECURRENCE :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de v.a. i.i.d. intégrables tq $E[X_1] = 0$

et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$ $S_0 = 0$

Alors $\sum_{n \geq 0} P(|S_n| \leq 1) = +\infty$ et la marche aléatoire est récurrente

(en particulier, en appliquant le critère de récurrence de la partie II avec $I = [-1, 1]$ on en déduit que 0 est un point récurrent et, dans le cas réseau, tous les points du réseau sont récurrents.