

DM 3

PROBLÈME 1: $(X_n)_{n \geq 1}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X

Partie I. On suppose $(X_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

1) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et posons $\varepsilon = 1/m$.

D'après la définition d'une suite réelle et $\mathbb{Q}$:

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N(m) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(m), |\mathbb{P}(|X_n - X| > 1/m)| < \varepsilon'$$

En prenant $\varepsilon' = 1/m^2$, on obtient :

$$\forall n \geq N(m), \mathbb{P}(|X_n - X| > 1/m) < 1/m^2 \quad (*)$$

3) $\rightarrow \exists \phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow$ tq $\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(|X_{\phi(m)} - X| > 1/m) < 1/m^2$

On dispose pour chaque $m \geq 1$, un entier $N(m)$ tq $\forall n \geq N(m), (*)$ (Q2)

Soit $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} \phi(1) \geq N(1) \\ \phi(m+1) \geq \max \{ N(m+1), \phi(m)+1 \} \end{cases}$$

on aura $\mathbb{P}(|X_{\phi(m+1)} - X| > \frac{1}{m+1}) < \frac{1}{(m+1)^2}$

↑ pour garantir la croissance

Ainsi, ϕ est strictement croissante

Comme $\phi(m) \geq N(m)$, on obtient pour tout m :

$$\mathbb{P}(|X_{\phi(m)} - X| > 1/m) < 1/m^2$$

4) $A_m = \{ |X_{\phi(m)} - X| > 1/m \}$

Mq avec proba. 1 seuls un nombre fini des événements $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ arrivent.

Par Q3: $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$ (série de termes positifs + série de Riemann cv)

Lemme de Borel-Cantelli I: [si $\sum_m \mathbb{P}(A_m) < \infty$, alors $\mathbb{P}(A_m \text{ infiniment souvent}) = 0$]

On conclut donc : $\mathbb{P}(A_m \text{ infiniment souvent}) = 0$

i.e.

avec probas. 1, seuls un nombre fini des événements $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ arrivent.

5) $(X_{\phi(m)})_{m \geq 1} \xrightarrow{\text{p.s.}} X$

Sur l'événement de probabilité 1 où A_m n'arrive qu'un nombre fini de fois, il existe m_0 tel que $\forall m \geq m_0$,

A_m^c se produit, donc $|X_{\phi(m)} - X| \leq 1/m$

Donc $|X_{\phi(m)} - X| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ p.s. par thm des Gendarmes

Donc $X_{\phi(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X$ p.s.

6) $\leadsto$ toute suite extraite $(X_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ converge p.s. vers X . admet une ss suite extraite cv p.s. vers X

Soit $(X_{n_k})_{k \geq 1}$ une sous suite de (X_n) .

• Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X : \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors, pour (n_k) croissante, $\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ (toute sous suite d'une suite convergente converge vers la m. l.)

Donc $X_{n_k} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

• On peut alors reprendre la construction effectuée dans les questions 2-5 en remplaçant (X_n) par (X_{n_k})

On construit de la même manière une extraction $\psi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ tq $\mathbb{P}(|X_{n_{\psi(m)}} - X| > 1/m) < 1/m$

En posant $B_m = \{|X_{n_{\psi(m)}} - X| > 1/m\}$, on a $\sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(B_m) < \infty$

Donc par **BCI**, seulement un nombre fini de B_m se produisent avec probas $\neq 0$ (raisonnement Q4)

Donc $X_{n_{\psi(m)}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} X$ (raisonnement Q5)

CCL: toute sous suite extraite de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ admet une sous suite extraite qui cv p.s. vers X .

Partie II: On suppose que toute sous suite de $(X_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite qui converge p.s. vers X

7) $\forall$ sous-suite (X_{n_k}) , $\exists$ sous suite $(X_{n_{k_\ell}})$ tq $X_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{p.s.} X$

c.à.d. pour toute suite strictement croissante ϕ (définissant une sous suite $(X_{n_{\phi(k)}})$), il existe une suite d'indices strictement croissante ψ

(définissant une sous-sous suite $(X_{n_{\phi(\psi(\ell))}})$) telle que $X_{\phi(\psi(\ell))} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{p.s.} X$

$$\leadsto \forall \phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, (\forall k, \phi(k+1) > \phi(k)) \Rightarrow \exists \psi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, (\forall m, \psi(m+1) > \psi(m)) \wedge (X_{\phi(\psi(m))} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} X)$$

$$\text{ou: } \forall (\phi(k))_{k \geq 1} \text{ strictement } \nearrow, \exists (\psi(m))_{m \geq 1} \text{ strictement } \nearrow, X_{\phi(\psi(m))} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} X$$

8) Supposons $(X_n)_{n \geq 1} \not\xrightarrow{\mathbb{P}} X$ [contraposée]

a) Mq $\exists \varepsilon > 0, \delta > 0, (X_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| > \varepsilon) \geq \delta > 0$

$$X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} X : \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tq } \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_0) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$\therefore \varepsilon, \exists \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_0) \geq \delta$ (négation de la définition qu'une suite tend vers 0)

Ainsi, il existe une infinité d'indices n vérifiant cette inégalité

On peut donc définir $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| > \varepsilon_0) \geq \delta$

b) Mq aucune sous suite de $(X_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ ne converge p.s. vers X

Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-sous suite $X_{\phi(\psi(m))}$ tq $X_{\phi(\psi(m))} \xrightarrow[\psi(m) \rightarrow \infty]{p.s.} X$

Donc $X_{\phi(\psi(m))} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ (car cv p.s. $\Rightarrow$ cv $\mathbb{P}$)

$$\text{Donc } \mathbb{P}(|X_{\phi(\psi(m))} - X| > \varepsilon_0) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \text{ (vrai } \forall \varepsilon, \text{ en particulier } \varepsilon_0)$$

Contradiction avec $\mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| > \varepsilon_0) \geq \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Q. 8.a)

CCL: Aucune sous suite de $(X_{\phi(n)})$ ne converge p.s. vers X

9) **CCL problème I:**

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow \text{toute sous suite de } (X_n) \text{ admet une sous-sous suite qui converge p.s. vers } X$$

PROBLÈME 2: $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d, $P(X_n = \pm 1) = 1/2$, $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

i) a) $P(S_{2n} = 0) = ?$

Pour que $S_{2n} = 0$, il faut exactement n pas +1 et n pas -1.

Nombre de chemins: $\binom{2n}{n}$

Les X_i étant indépendantes $P(X_1 = x_1, \dots, X_{2n} = x_{2n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 2^{-2n}$

Probabilité de chaque chemin: $1/4^n$

Donc

$$P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad P(S_{2n+1} = 0) = 0$$

b) Equivalent en $+\infty$ de $P(S_{2n} = 0)$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Par Stirling: $(2n)! \sim \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$ et $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\text{donc } \binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{4\pi n} 2^{2n}}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\text{Donc } P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

c) Conséquence: $P(S_{2n} = 0) \rightarrow 0$ et $\sum_{n \geq 1} P(S_{2n} = 0) = +\infty$ (car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge)

NOTE: Cela ne suffit pas à conclure la récurrence (les événements $\{S_{2n} = 0\}$ ne sont pas indépendants). On établira la récurrence en 6-7 par une famille d'événements indépendants (méthode blocs + Borel Cantelli)

2) Soit $K \in \mathbb{Z}$

a) $P(S_n = K) = ?$

$P(S_n = K) = 0$ si $n \not\equiv K \pmod{2}$

Si K est pair, le nombre de pas +1 = $\frac{n+K}{2}$. (il faut que $N_+ - N_- = K$ et $N_+ + N_- = n$)

où $N_+ =$ pas +1 et $N_- =$ pas -1. En résolvant le système, $N_+ = \frac{n+K}{2}$

d'où

$$P(S_n = K) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+K}{2}} \text{ si } n \equiv K \pmod{2}$$

↑ il faut que $n+K$ soit pair

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = K) = ?$

Si $n \not\equiv K \pmod{2}$, $P(S_n = K) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Si $n \equiv K \pmod{2}$:

La suite $\left(\binom{n}{j}\right)_{0 \leq j \leq n}$ est unimodale et maximale au centre $j = \lfloor n/2 \rfloor$ (car $\binom{n}{j+1} / \binom{n}{j} = (n-j)/(j+1)$)

$$\text{donc } \binom{n}{\frac{n+K}{2}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Ainsi, $0 \leq P(S_n = K) \leq \frac{1}{2^n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \frac{C}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par 1b) avec $C = \sqrt{2/\pi}$ si n impair et $1/\sqrt{\pi}$ si n est pair)

donc

$$P(S_n = K) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$c) \mathbb{P}(|S_n| \leq K) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} ?$$

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq K) = \sum_{j=-K}^K \mathbb{P}(S_n = j) \leq (2K+1) \max_{|j| \leq K} \mathbb{P}(S_n = j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{par la question précédente})$$

$$\text{donc } \boxed{\mathbb{P}(|S_n| \leq K) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

$$3) \mathbb{P}(|S_n| \leq K) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

↓ (le rang dépend de K)

Donc $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, $\exists f(K)$ tel que $\mathbb{P}(|S_{f(K)}| \leq K) \leq \varepsilon$

$$\text{i.e. } \boxed{\forall \varepsilon \in]0, 1[, \forall K \in \mathbb{N}, \exists f(K) \in \mathbb{N}; \mathbb{P}(|S_{f(K)}| \leq K) \leq \varepsilon}$$

$$4) \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ et } \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow$$

$$A_n = \{X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} \leq -\phi(n)\} \cap \{X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \geq \psi(n)\}$$

Mq les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes

$$\text{Posons } Y_n^{(1)} = \sum_{i=\phi(n)+1}^{\psi(n)} X_i, \quad Y_n^{(2)} = \sum_{i=\psi(n)+1}^{\phi(n+1)} X_i, \quad A_n = \{Y_n^{(1)} \leq -\phi(n)\} \cap \{Y_n^{(2)} \geq \psi(n)\}$$

→ $Y_n^{(1)}$ ne dépend que des variables $\{X_{\phi(n)+1}, \dots, X_{\psi(n)}\}$

→ $Y_n^{(2)}$ ne dépend que des variables $\{X_{\psi(n)+1}, \dots, X_{\phi(n+1)}\}$

→ Pour $n \neq m$, les familles d'indices intervenant dans A_n et A_m sont disjointes ($\phi(n) < \psi(n) < \phi(n+1)$ et la croissance est stricte)

→ les X_i sont indépendantes donc toute fonction mesurable de blocs disjoints de X_i est indépendante des autres blocs [stabilité de l'indépendance]

Donc les A_n sont deux à deux disjointes

Comme cette propriété vaut pour tous les couples (n, m) distincts, on déduit :

$$\boxed{(A_n)_{n \geq 0} \text{ est mutuellement indépendante}}$$

$$5) \text{ Mq si } A_n \text{ arrive alors la marche aléatoire visite } 0 \text{ entre } \phi(n)+1 \text{ et } \phi(n+1)$$

[idée: chaque événement A_n est construit pour provoquer un changement de signe de la marche entre deux instants consécutifs]

Supposons A_n .

Sur $[\phi(n), \psi(n)]$

$$\text{ona: } S_{\psi(n)} - S_{\phi(n)} = \sum_{i=\phi(n)+1}^{\psi(n)} X_i \leq -\phi(n) \quad [\text{d'après la définition du premier événement de } A_n]$$

$$\text{donc } S_{\psi(n)} \leq S_{\phi(n)} - \phi(n) \leq 0 \quad [\text{car par construction, } |S_{\phi(n)}| \leq \phi(n)]$$

Sur $[\psi(n), \phi(n+1)]$:

$$S_{\phi(n+1)} - S_{\psi(n)} = \sum_{i=\psi(n)+1}^{\phi(n+1)} X_i \geq \psi(n) \quad [\text{seconde condition dans } A_n]$$

$$\text{d'où } S_{\phi(n+1)} \geq S_{\psi(n)} + \psi(n) \geq -\phi(n) + \psi(n) > 0 \quad [\text{car } \psi(n) > \phi(n)]$$

Entre ces deux instants, la marche est passée d'un niveau ≤ 0 à un niveau > 0

Comme chaque pas vaut ± 1 , elle doit atteindre exactement 0 à un moment $t \in [\phi(n)+1, \phi(n+1)]$

Donc

$$\boxed{A_n \Rightarrow \exists t \in [\phi(n)+1, \phi(n+1)] \text{ tq } S_t = 0}$$

6) Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) \geq (1-\varepsilon)^2/4$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Par Q3, $\forall K \in \mathbb{N} \exists f(K) \in \mathbb{N}$ tel que $P(|S_{f(K)}| \leq K) \leq \varepsilon$

On choisit par récurrence

$$\psi(n) - \phi(n) := f(\phi(n)) \text{ et } \phi(n+1) - \psi(n) := f(\psi(n))$$

On obtient donc, par symétrie et indépendance des X_i :

$$P\left(\sum_{i=\phi(n)+1}^{\psi(n)} X_i \leq -\phi(n)\right) = \frac{1}{2} P(|S_{f(\phi(n))}| \geq \phi(n)) \geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$$

et de même

$$P\left(\sum_{i=\psi(n)+1}^{\phi(n+1)} X_i \geq \psi(n)\right) \geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$$

Donc par indépendance des 2 blocs:

$$\forall n \quad P(A_n) \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{4}$$

7) Mq la marche symétrique passe une infinité de fois par 0

Q6: $P(A_n) \geq c > 0$ donc $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = +\infty$

BCII + Q4: $P(A_n \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent}) = 1$

Q5: Chaque A_n implique au moins une visite de 0 sur $[\phi(n)+1, \phi(n+1)]$

Donc l'événement $\{S \text{ visite } 0 \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent}\}$ a probas 1

$$\leadsto P(S \text{ passe par } 0 \text{ une infinité de fois}) = 1$$

8) Mq la marche passe infiniment souvent par 1

Par Q7), la marche visite 0 une infinité de fois p.s.

Notons T_K les temps de retour à 0: $T_0 = 0$ et $T_{K+1} = \inf\{n > T_K; S_n = 0\}$

Les X_i étant indépendantes, le pas suivant de chaque retour à 0 est indépendant du passé et vérifie $P(X_{T_K+1} = +1) = 1/2$

On pose $B_K = \{S_{T_{K+1}} = 1\} = \{X_{T_K+1} = +1\}$

Les événements (B_K) sont indépendants et de probas $1/2$ et $\sum_{k \geq 0} P(B_K) = +\infty$ donc par BCII:

$$P(B_K \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent}) = 1$$

Ainsi, la marche atteint 1 p.s.:

$$P(S_n = 1 \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent}) = 1$$

9) Mq la marche passe une infinité de fois par m

Q7-8: la marche atteint 0 et 1 une infinité de fois p.s.

$\forall m \in \mathbb{Z}$, on considère $(S_n - m)_{n \geq 0}$

Comme chaque X_i prend les valeurs ± 1 avec probabilité $1/2$, la loi de $(S_n - m)$ est la même que celle de (S_n) (invariance par translation)

En appliquant le raisonnement de Q7-8: on déduit que $(S_n - m)$ passe une infinité de fois par 0, c.à.d. S_n passe une infinité de fois par m p.s.

Donc $P(S_n = m \text{ } \infty^{\text{nt}} \text{ souvent}) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

10) La marche atteint simultanément tous les entiers

Comme chaque entier m est atteint une infinité de fois avec probabilité 1, l'événement $\{ \text{la marche atteint tous les entiers} \}$ est l'intersection des événements $E_m = \{ S_n = m \text{ pour souvent} \}$

Or chaque E_m est de probas 1; donc leur intersection dénombrable l'est aussi,

i.e.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} E_m\right) = 1, \text{ i.e. la marche visite tous les entiers une infinité de fois p.s.}$$

11) Heuristique

La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ fait à chaque pas un mouvement de ± 1 avec la même probas. Elle reste donc "centrée" en moyenne elle ne dérive ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

Comme les pas sont indépendants, la marche s'écarte parfois beaucoup de 0, mais la proba de revenir vers 0 n'est pas nulle.

Les grands écarts positifs et négatifs se compensent à long terme et la marche repasse par chaque point (en particulier 0) une ∞ de fois.

→ La marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est récurrente