

PARTIE 1

Soit $n \geq 1$. On réordonne $(x_1, \dots, x_n)$ pour obtenir $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ tq $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

o) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ pas tous distincts. On peut toujours définir le n -uplet trié non décroissant $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ avec $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ en conservant les répétitions.

(mais la permutation des indices qui réalise ce tri n'est pas unique dès qu'il existe des égalités)

$$x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \quad x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité

Soit μ une loi de Probas à densité sur $\mathbb{R}$, soit f une densité de μ .

Soit $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. de loi μ .

1) Par définition, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(B) = \int_B f(x) d\lambda(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f(x) d\lambda(x) = 0 \quad (\text{car } \lambda(\{x\}) = 0)$$

Pour $i \neq j$, la loi de (X_i, X_j) a densité $f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Donc } P(X_i = X_j) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x=y\}} f(x)f(y) dx dy = 0$$

($\{x=y\}$ est la mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^2$)

Par sous-additivité:

$$P\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{X_i = X_j\}\right) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(X_i = X_j) = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{P(X_i = X_j) = 0 \quad \forall i \neq j}$$

ou bien:

Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes de même loi continue.

alors $P(X=Y) = 0$.

preuve: Puisque X et Y sont indépendantes, on a:

$$P(X=Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x=y\}} dP_X(x) dP_Y(y)$$

Avec le thm de Fubini, on obtient

$$P(X=Y) = \int_{\mathbb{R}} dP_X(x) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x=y\}} dP_Y(y)$$

Puisque la loi de Y est continue, pour tout x fixé:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x=y\}} dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y=x\}} dP_Y = P_Y(\{x\}) = 0$$

d'où $P(X=Y) = 0$

(en posant $X = X_i$ et $Y = X_j$, on obtient le résultat)

Posons $A = \{ \forall i \neq j, X_i \neq X_j \}$ avec $P(A) = 1$ (Q1) (on s'en servira sur le reste de la partie I)

2) Soit $\omega \in A$. On note $x_i := X_i(\omega)$

existence:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \text{ posons } r(i) = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbb{1}_{\{x_j < x_i\}} \quad (\text{le rang}) \in \{1, \dots, n\}$$

Comme les x_i sont deux à deux distincts sur A , r est injective sur un ensemble fini, donc bijective.

Posons $Z(\omega) := r^{-1} \in \mathcal{S}_n$. $\forall k \in \{1, \dots, n\}, X_{Z(\omega)(k)} = x_{r^{-1}(k)}$ i.e. 'le k -ième plus petit des $x_1, \dots, x_n$ '

Par construction, on a $x_{Z(\omega)(1)} < x_{Z(\omega)(2)} < \dots < x_{Z(\omega)(n)}$

$$\text{Donc } (x_{Z(\omega)(1)}(\omega), \dots, x_{Z(\omega)(n)}(\omega)) = (x_{(1)}(\omega), \dots, x_{(n)}(\omega))$$

unicité:

$$\text{Soient } \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n \text{ tq } (x_{\sigma(1)}(\omega), \dots, x_{\sigma(n)}(\omega)) = (x_{(1)}(\omega), \dots, x_{(n)}(\omega)) = (x_{\tau(1)}(\omega), \dots, x_{\tau(n)}(\omega))$$

$$\text{Donc } \forall k, x_{\sigma(k)}(\omega) = x_{\tau(k)}(\omega)$$

Or les $x_i(\omega)$ sont tous distincts.

$$\text{Donc } \sigma(k) = \tau(k) \quad \forall k$$

$$\text{Donc } \boxed{\sigma = \tau}$$

3) Loi de Z

Z est uniforme sur $\mathcal{S}_n$: $\forall \sigma_0 \in \mathcal{S}_n, P(Z = \sigma_0) = \frac{1}{n!}$

preuve:

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, définissons

$$B_\sigma = \{ \omega \in A; x_{\sigma(1)}(\omega) < \dots < x_{\sigma(n)}(\omega) \}$$

Sur A , il y a exactement une permutation qui ordonne strictement les x_i (Q2) donc les B_σ sont deux à deux disjoints et:

$$A = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} B_\sigma, \text{ d'où } \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P(B_\sigma) = P(A) = 1 \quad (1)$$

Par symétrie i.i.d. (stabilité par permutation des coordonnées):

Soit $C = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 < \dots < x_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Alors:

$$B_\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \sigma(C) \Rightarrow \mathbb{P}(B_\sigma) = \mathbb{P}((x_1, \dots, x_n) \in \sigma(C))$$

Comme $(x_1, \dots, x_n)$ a une loi produit identique sur chaque coordonnée (i.i.d), pour toute permutation σ ,

$$\mathbb{P}((x_1, \dots, x_n) \in \sigma(C)) = \mathbb{P}((x_1, \dots, x_n) \in C)$$

Donc toutes les $\mathbb{P}(B_\sigma)$ sont égales

Avec (1) et $|\mathcal{S}_n| = n!$ on obtient: $\mathbb{P}(B_\sigma) = \frac{1}{n!}$ pour tout σ

Or $\{Z = \sigma\} = B_\sigma$ sur A ; comme $\mathbb{P}(A) = 1$, $(\{Z = \sigma\} \cap A = B_\sigma \text{ or } \mathbb{P}(A) = 1)$
égale p.s.

$$\boxed{\mathbb{P}(Z = \sigma) = \frac{1}{n!} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n}$$

4) Soit $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue bornée

(*) a) Mq $\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma\}}$

Par définition de Z (Q2) sur A ,

$$(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = (x_{Z(1)}, \dots, x_{Z(n)})$$

Donc p.s,

$$\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \phi(x_{Z(1)}, \dots, x_{Z(n)})$$

En particulier, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$

$$\boxed{\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma\}}}$$

ds cette somme, un seul terme est non-nul

b) Mq $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ est un n-échantillon de μ et qu'e

$$E(\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma\}}) = E(\phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}})$$

Par Q4a. $\forall \phi$ cb,

$$E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} E[\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma\}}] \quad (1)$$

Soit $\sigma_0 \in \mathcal{S}_n$ fixé, on permute les coordonnées $i \mapsto \sigma_0(i)$

Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est i.i.d, $(x_{\sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma_0(n)}) \stackrel{d}{=} (x_1, \dots, x_n)$

"réunion ordonnée" = "échantillon" selon σ est échantillon sur "échantillon" selon $\sigma_0 \circ \sigma$

Ainsi, par changement d'indices dans (1): ($z = \sigma_0^{-1} \circ \sigma$)

$$\begin{aligned} E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma_0\}}] &= E[\phi(x_{\sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma_0(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma_0\}}] \quad (\text{selection du terme } \sigma = \sigma_0 \text{ dans la somme (1)}) \\ &= E[\phi(x_{\sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma_0(n)}) \mathbb{1}_{\{x_{\sigma_0(1)} < \dots < x_{\sigma_0(n)}\}}] \quad \{Z = \sigma_0\} \Leftrightarrow x_{\sigma_0(1)} < \dots < x_{\sigma_0(n)} \\ &= E[\phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}}] \quad \text{invariance en loi des i.i.d} \end{aligned}$$

On a donc:

$$\boxed{E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \mathbb{1}_{\{Z = \sigma\}}] = E[\phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}}], \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad (*)}$$

c) Mq $E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = n! \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}} f(x_1) \dots f(x_n) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_n)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ Par 4b, en sommant (*) sur toutes les permutations σ :

$$E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} E[\phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}}]$$

Comme les x_i sont i.i.d:

$$E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = n! E[\phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}}]$$

Or, si les x_i ont une densité f , la loi du vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ est donnée par la densité produit $f(x_1) \dots f(x_n)$ par rapport à λ^n

Par formule de transfert:

$$E[\phi(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < \dots < x_n\}}] = \int_{\{x_1 < \dots < x_n\}} \phi(x_1, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_n) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_n)$$

Finalement,

$$\boxed{E[\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = n! \int_{\{x_1 < \dots < x_n\}} \phi(x_1, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_n) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_n)}$$

5) g cb de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$m_q E(g(X_{(k)})) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{\mathbb{R}} g(x) \mu(-\infty, x]^{k-1} \mu(x, +\infty)^{n-k} dx \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

On choisit dans 4c la fonction $\psi(x_1, \dots, x_n) = g(x_k)$

Alors:

$$E[g(X_{(k)})] = E[\psi(x_1, \dots, x_n)] = n! \int_{\{x_1 < \dots < x_n\}} g(x_k) \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_n) \quad (1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Intégrons en $x_k = x$. Dans (1)

$$E[g(X_{(k)})] = n! \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) A_{k-1}(x) B_{n-k}(x) d\lambda(x) \quad (2)$$

$$\text{où: } A_{k-1}(x) := \int_{\{x_1 < \dots < x_{k-1} < x\}} \prod_{i=1}^{k-1} f(x_i) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_{k-1})$$

$$B_{n-k}(x) := \int_{\{x < x_{k+1} < \dots < x_n\}} \prod_{i=k+1}^n f(x_i) d\lambda(x_{k+1}) \dots d\lambda(x_n)$$

Calculons $A_{k-1}(x)$:

En considérant le pavé $(-\infty, x]^{k-1}$. Il peut être partitionné en $(k-1)!$ régions disjointes

$$R_\sigma = \{(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} ; x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(k-1)}\} \quad \sigma \in \mathcal{S}_{k-1}$$

Comme la mesure produit est invariante par permutation des coordonnées, i.e. $\int_{R_\sigma} \prod_{i=1}^{k-1} f(x_i) d\lambda(x_i)$ ne dépend pas de σ
 et $\sum_{\sigma} \int_{R_\sigma} \prod_{i=1}^{k-1} f(x_i) d\lambda(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} f(x_i) d\lambda(x_i) = \left(\int_{-\infty, x]} f d\lambda \right)^{k-1}$

Ainsi, l'intégrale sur la région ordonnée $\{x_1 < \dots < x_{k-1} < x\}$ vaut la mesure totale du pavé, divisée par $(k-1)!$. On obtient donc:

$$A_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_{-\infty, x]} f(t) d\lambda(t) \right)^{k-1}$$

$B_{n-k}(x)$

De même, le pavé $(x, +\infty)^{n-k}$ est partitionné en $(n-k)!$ régions ordonnées disjointes. On a donc:

$$B_{n-k}(x) = \frac{1}{(n-k)!} \left(\int_{x, +\infty[} f(t) d\lambda(t) \right)^{n-k}$$

En remplaçant ces valeurs dans (2) on obtient:

$$E[g(X_{(k)})] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \left(\int_{-\infty, x]} f d\lambda \right)^{k-1} \left(\int_{x, +\infty[} f d\lambda \right)^{n-k} f(x) d\lambda(x)$$

En notant μ la loi de densité f et $F(x) = \mu(-\infty, x]$, on réécrit enfin:

$$E[g(X_{(k)})] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \mu(-\infty, x]^{k-1} \mu(x, +\infty)^{n-k} d\mu(x)$$

Partie II

6) Loi de $X_{(1)}$

Soit $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ avec $X_i \sim \text{Unif}[0,1]$ i.i.d

Fonction de répartition:

Par définition, $F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leq x)$

$$\rightarrow \text{si } x < 0 : X_{(1)} > 0 \text{ p.s.} \Rightarrow F_{X_{(1)}}(x) = 0$$

$$\rightarrow \text{si } x > 1 : X_{(1)} \leq 1 \text{ p.s.} \Rightarrow F_{X_{(1)}}(x) = 1$$

$$\rightarrow \text{si } 0 \leq x \leq 1 :$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - P(X_1 > x, \dots, X_n > x)$$

Par indépendance,

$$P(X_{(1)} > x) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = (1-x)^n \quad \text{car } P(X_i > x) = 1-x$$

$$\text{Donc } F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1-x)^n$$

densité:

$$\text{Pour } x \in [0,1], f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1}$$

En dehors de $[0,1]$, la densité est nulle, donc

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

La loi de $X_{(1)}$ est donnée par:

$$F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$X \sim \text{Bêta}(1, n)$$

ou :

par Q5:

on obtient le résultat en remplaçant $\mu(-\infty, x] = x$

et $\mu(x, +\infty) = 1-x$ et $f(x) = 1$

7) Loi de $X_{(2)} - X_{(1)}$

La densité jointe des statistiques d'ordre uniformes est

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \mathbb{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n < 1}$$

Densité jointe de $(X_{(1)}, X_{(2)})$:

En intégrant sur $x_3, \dots, x_n$:

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) = n! \int_{u < x_3 < \dots < x_n < 1} dx_3 \dots dx_n = n! I_{n-2}(v), \quad I_m(a) = \int_a^1 dt_1 \dots dt_m$$

On sait que $I_1(a) = 1-a$.

$$\text{Par récurrence, } I_m(a) = \int_a^1 I_{m-1}(t_1) dt_1 = \frac{(1-a)^m}{m!}$$

Donc

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) = \frac{n!}{(n-2)!} (1-v)^{n-2} \mathbb{1}_{0 < u < v < 1} = n(n-1)(1-v)^{n-2} \mathbb{1}_{0 < u < v < 1}$$

Changement de variables:

Posons $(y_1, y_2) = (u, v-u)$

$$u = y_1, \quad v = y_1 + y_2$$

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} & \frac{\partial u}{\partial y_2} \\ \frac{\partial v}{\partial y_1} & \frac{\partial v}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\det J| = 1$$

$$\text{et } 0 < u < v < 1 \Leftrightarrow 0 < y_1 < y_1 + y_2 < 1 \Leftrightarrow y_1 > 0, y_2 > 0, y_1 + y_2 < 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{y_1, y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) |\det J| \\ &= n(n-1)(1-y_1-y_2)^{n-2} \mathbb{1}_{y_1 > 0, y_2 > 0, y_1 + y_2 < 1} \end{aligned}$$

• Marginale de $Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}$

$$f_{Y_2}(y) = n(n-1) \int_0^{1-y} (1-y_1-y)^{n-2} dy_1$$

$$\stackrel{(t=1-y-y_1)}{=} n(n-1) \int_0^{1-y} t^{n-2} dt = \underbrace{n(1-y)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)}$$

Donc $X_{(2)} - X_{(1)} \sim \text{Béta}(1, n)$ avec la même densité que $X_{(1)}$

8) $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ indépendantes ?

Q7: la densité jointe de $(X_{(1)}, X_{(2)})$ est $f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) = n(n-1)(1-v)^{n-2} \mathbb{1}_{0 < u < v < 1}$

Q6: la densité marginale de $X_{(1)}$ est $f_{X_{(1)}}(u) = n(1-u)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$

Pour la marginale de $X_{(2)}$, on intègre la densité jointe sur u :

$$f_{X_{(2)}}(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) du$$

Le support impose $0 < u < v < 1$ donc $f_{X_{(2)}}(v) = \int_0^v n(n-1)(1-v)^{n-2} dv = n(n-1)v(1-v)^{n-2} \mathbb{1}_{[0,1]}(v)$

Si $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ étaient indépendantes, on devrait avoir pour tout (u, v) : $f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) = f_{X_{(1)}}(u) f_{X_{(2)}}(v)$

Mais: $\rightarrow$ la jointe est constante en u pour un v fixé

$\rightarrow$ le produit des marginales dépend de u

$\rightarrow$ la jointe est nulle dès que $u > v$ alors que le produit est strictement positif

(aussi: les variables d'ordres sont contraintes par $X_{(1)} \leq X_{(2)}$ donc impossible qu'elles

Donc $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ ne sont pas indépendantes (leur support n'est pas rectangulaire)

9) $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ indépendants ?

Q7: la densité jointe de $(Y_1, Y_2) = (X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)})$ est $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = n(n-1)(1-y_1-y_2)^{n-2} \mathbb{1}_{\{y_1 > 0, y_2 > 0, y_1+y_2 < 1\}}$

et $f_{Y_2}(y) = n(1-y)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

de même, la marginale de $Y_1 = X_{(1)}$ est (Q6) $f_{Y_1}(y_1) = n(1-y_1)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(y_1)$

si Y_1 et Y_2 étaient indépendants, on devrait avoir $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$

Mais: $\rightarrow$ le support de la jointe est $\{y_1+y_2 < 1\}$ donc la densité est nulle dès que $y_1+y_2 \geq 1$

$\rightarrow$ le produit des marginales reste positif sur $\{y_1+y_2 \geq 1\}$

Donc la factorisation est impossible

Donc $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ ne sont pas indépendants

10) Densité de $X_{(K)}$ ($1 \leq K \leq n$)

On a $f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \mathbb{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n < 1}$

$$\text{Donc } f_{X_{(K)}}(x) = n! \int_{0 < x_1 < \dots < x_{K-1} < x} \int_{x < x_{K+1} < \dots < x_n < 1} 1 dx_1 \dots dx_{K-1} dx_{K+1} \dots dx_n$$

$$= n! \underbrace{\int_{0 < x_1 < \dots < x_{K-1} < x} 1 dx_1 \dots dx_{K-1}}_{I_{K-1}(x)} \underbrace{\int_{x < x_{K+1} < \dots < x_n < 1} 1 dx_{K+1} \dots dx_n}_{J_{n-K}(x)}$$

Par récurrence: $I_m(a) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_m < a} dt_1 \dots dt_m = \frac{a^m}{m!}$ et $J_m(a) = \int_{a < t_1 < \dots < t_m < 1} dt_1 \dots dt_m = \frac{(1-a)^m}{m!}$

donc pour $x \in [0, 1]$

$$f_{X_{(K)}}(x) = n! \frac{x^{K-1}}{(K-1)!} \frac{(1-x)^{n-K}}{(n-K)!} = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} x^{K-1} (1-x)^{n-K}$$

et $f_{X_{(K)}}(x) = 0$ hors $[0, 1]$.

$\checkmark$ on aurait pu obtenir le résultat de la formule générale obtenue en Q5.

$\leadsto$ $f_{X_{(K)}}(x) = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} x^{K-1} (1-x)^{n-K} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ (Béta $(K, n-K+1)$)

11) $\mathbb{E}[X_{(K)}]$

Si $X_{(K)} \sim \text{Beta}(K, n-K+1)$

alors $\mathbb{E}[X_{(K)}] = \frac{K}{n+1}$

ou bien: $\mathbb{E}[X_{(K)}] = \int_0^1 x \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} x^{K-1} (1-x)^{n-K} dx$

IPP: posons $u = x^K \Rightarrow du = Kx^{K-1} dx$

$$dv = (1-x)^{n-K} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{n-K+1} (1-x)^{n-K+1}$$

$$= \left[\frac{-x^K}{n-K+1} (1-x)^{n-K+1} \right]_0^1 + \frac{K}{n-K+1} \int_0^1 x^{K-1} (1-x)^{n-K+1} dx$$

à $x=0$ $x^K=0$ et à $x=1$, $(1-x)^{n-K+1}=0$

$$= \frac{K}{n-K+1} \int_0^1 x^{K+1} (1-x)^{n-K+1} dx$$

en répétant K fois la même IPP.

$$= \frac{K! (n-K)!}{(n+1)!}$$

$$\text{donc } \mathbb{E}[X_{(K)}] = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \cdot \frac{K! (n-K)!}{(n+1)!} = \frac{n! K}{(n+1)!} = \frac{K}{n+1}$$

12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(nX_{(1)} \geq t)$

Pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(nX_{(1)} \geq t) = \mathbb{P}(X_{(1)} \geq \frac{t}{n}) = \mathbb{P}\left(\min_i X_i \geq \frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq \frac{t}{n}) = (1 - t/n)^n \quad \left(\begin{array}{l} \text{par Q6: } F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1-x)^n. \text{ on pose } x = t/n \end{array} \right)$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(nX_{(1)} \geq t) = e^{-t}$ et $nX_{(1)}$ admet une loi limite exponentielle de paramètre 1.

13) Même question avec $X_{(2)}$, puis $X_{(K)}$

Pour $x \in [0, 1]$, on sait $\mathbb{P}(X_{(K)} \leq x) = \sum_{j=K}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = \mathbb{P}(\text{Bin}(n, x) \geq K)$

Posons $Z_n = nX_{(K)}$ et prenons $x = \frac{t}{n}$ ($t \geq 0$)

$$\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \mathbb{P}(X_{(K)} \leq \frac{t}{n}) = \mathbb{P}(\text{Bin}(n, t/n) \geq K)$$

or quand $n \rightarrow +\infty$ et $p_n = t/n$, on a la convergence de Poisson $\text{Bin}(n, t/n) \xrightarrow{d} \text{Poisson}(t)$

$$\text{Donc } \forall t \geq 0, \mathbb{P}(Z_n \leq t) \rightarrow \mathbb{P}(\text{Poisson}(t) \geq K) = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} e^{-t} \frac{t^j}{j!}$$

La f.r. limite $t \mapsto 1 - \sum_{j=0}^{K-1} e^{-t} \frac{t^j}{j!}$ est celle de la Gamma (Erlang) $\Gamma(K, 1)$ (somme de K exponentielles i.i.d.)

$$\text{donc } nX_{(K)} \xrightarrow{d} \Gamma(K, 1), \mathbb{P}(nX_{(K)} \geq t) \rightarrow e^{-t} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{t^j}{j!} \quad (t \geq 0)$$

$$K=2: nX_{(2)} \Rightarrow \Gamma(2, 1) \text{ (densité limite } te^{-t} \mathbb{1}_{t \geq 0})$$

Partie III:

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$,

$\Rightarrow$ la densité de chaque X_k est $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$

14) densité de $X_{(K)}$

Dans Q5: $\mu(-\infty, x] = P(X \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$

$$\text{et } \mu(x, +\infty] = e^{-\alpha x}$$

Donc pour $x > 0$:

$$f_{X_{(K)}}(x) = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} (1 - e^{-\alpha x})^{K-1} (e^{-\alpha x})^{n-K} \alpha e^{-\alpha x}$$

$$\Rightarrow f_{X_{(K)}}(x) = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} (1 - e^{-\alpha x})^{K-1} e^{-\alpha(n-K+1)x} \alpha, \quad x > 0$$

15) $E[X_{(K)}]$

$$E[X_{(K)}] = \int_0^{\infty} x f_{X_{(K)}}(x) dx = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \int_0^1 \left(-\frac{1}{\alpha} \ln u \right) (1-u)^{K-1} u^{n-K} du$$

$$\begin{aligned} u &= e^{-\alpha x} \\ x &= -\frac{1}{\alpha} \ln u \\ dx &= -\frac{1}{\alpha u} du \end{aligned}$$

$$\text{donc } \int_0^{\infty} f_{X_{(K)}}(x) dx = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \int_0^1 (1-u)^{K-1} u^{n-K} du$$

$$= \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (-\ln u) (1-u)^{K-1} u^{n-K} du$$

$$\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

↳ fonctions gamma

$$= \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(n-K)!(K-1)!}{n!} (H_n - H_{n-K}) \quad \text{où } H_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow E[X_{(K)}] = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=n-K+1}^n \frac{1}{j}$$

↳ ou on développe

$$(1-u)^{K-1} = \sum_{r=0}^{K-1} \binom{K-1}{r} (-1)^r u^r$$

$$\text{et on utilise } \int_0^1 u^m (-\ln u) du = \frac{1}{(m+1)^2}$$

$\Rightarrow$ on obtient le même résultat

ou bien: la loi des ordres d'une exponentielle est bien connue:

$$X_{(K)} = \sum_{j=0}^{K-1} \frac{E_j}{\alpha(n-j)} \quad \text{où } E_j \sim \text{Exp}(1) \text{ i.i.d}$$

$$\text{donc directement } E[X_{(K)}] = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=n-K+1}^n \frac{1}{j}$$

16) Loi de $X_{(1)}$

Pour $x > 0$,

$$P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{i=1}^n e^{-\alpha x} = e^{-n\alpha x}$$

$$\text{Donc } F_{X_{(1)}}(x) = 1 - e^{-n\alpha x}, \quad f_{X_{(1)}}(x) = (n\alpha) e^{-n\alpha x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

$$X_1 \sim \text{Exp}(n\alpha)$$

17) loi de $X_{(2)} - X_{(1)}$

(Similairement à Q9)

Pour toute loi continue: $f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) = n(n-1) [1 - F(v)]^{n-2} f(u) f(v) \mathbb{1}_{0 < u < v}$

Ici $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \Rightarrow 1 - F(v) = e^{-\alpha v}$

$$\text{Donc } f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(u, v) = n(n-1) \alpha^2 e^{-\alpha u} e^{-(n-1)\alpha v} \mathbb{1}_{0 < u < v}$$

Changement de variables: $(y_1, y_2) = (u, v-u)$ (jacobien=1; $0 < u < v \Leftrightarrow y_1 > 0, y_2 > 0$)

$$\text{alors } v = y_1 + y_2 \text{ et } f_{y_1, y_2}(y_1, y_2) = n(n-1) \alpha^2 e^{-\alpha y_1} e^{-(n-1)\alpha(y_1 + y_2)} \mathbb{1}_{y_1 > 0, y_2 > 0}$$

$$= n(n-1) \alpha^2 e^{-n\alpha y_1} e^{-(n-1)\alpha y_2} \mathbb{1}_{y_1 > 0, y_2 > 0}$$

Marginales de $Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}$:

$$f_{Y_2}(y) = \int_0^{\infty} n(n-1) \alpha^2 e^{-n\alpha y_1} e^{-(n-1)\alpha y} dy_1 = (n-1) \alpha e^{-(n-1)\alpha y} \left(n \alpha \int_0^{\infty} e^{-n\alpha y_1} dy_1 \right)$$

$$= (n-1) \alpha e^{-(n-1)\alpha y} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(y)$$

$$X_{(2)} - X_{(1)} \sim \text{Exp}((n-1)\alpha)$$

18) Indépendance de $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$

de Q^2 avec $(y_1, y_2) = (u, v - u) = (X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)})$

$$f_{y_1, y_2}(y_1, y_2) = n(n-1)\alpha^2 e^{-n\alpha y_1} e^{-(n-1)\alpha y_2} \mathbb{1}_{y_1 > 0, y_2 > 0}$$

$$\text{Marginales: } f_{y_1}(y_1) = \int_0^\infty n(n-1)\alpha^2 e^{-n\alpha y_1} e^{-(n-1)\alpha y_2} dy_2 = n\alpha e^{-n\alpha y_1} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(y_1)$$

$$f_{y_2}(y_2) = \int_0^\infty n(n-1)\alpha^2 e^{-n\alpha y_1} e^{-(n-1)\alpha y_2} dy_1 = (n-1)\alpha e^{-(n-1)\alpha y_2} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(y_2)$$

$$\text{Factorisation: } f_{y_1, y_2}(y_1, y_2) = \underbrace{n\alpha e^{-n\alpha y_1}}_{f_{y_1}(y_1)} \underbrace{(n-1)\alpha e^{-(n-1)\alpha y_2}}_{f_{y_2}(y_2)} \mathbb{1}_{y_1 > 0, y_2 > 0}$$

$$\text{Donc } X_{(1)} \perp\!\!\!\perp (X_{(2)} - X_{(1)}), \quad X_{(1)} \sim \text{Exp}(n\alpha), \quad X_{(2)} - X_{(1)} \sim \text{Exp}((n-1)\alpha)$$

19) Indépendance de $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$

Changement de variables (espacements)

$$y_1 = x_1, \quad y_j = x_j - x_{j-1} \quad (2 \leq j \leq n) \quad \Leftrightarrow \quad x_j = \sum_{i=1}^j y_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

On calcule la matrice

$$J = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq j, i \leq n} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 1, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

$\Rightarrow J$ est triangulaire inférieure à diagonale $(1, \dots, 1)$.

$$\text{Donc } \left| \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| = \prod_{j=1}^n 1 = 1$$

(de même, le jacobien direct $\frac{\partial y}{\partial x}$ est triangulaire supérieure à diagonale 1, donc $\det = 1$)

Image du domaine

Le domaine $0 < x_1 < \dots < x_n$ devient $\{y_i > 0, i = 1, \dots, n\}$

Densité jointe des ordres (exponentielle)

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \alpha^n e^{-\sum_{j=1}^n x_j} \mathbb{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n}$$

$$\text{or } \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j y_i = \sum_{i=1}^n (n-i+1) y_i$$

$\Rightarrow$ changement de variable (avec $|J| = 1$)

$$\text{pour } y_i > 0 \quad f_{y_1, \dots, y_n}(y_1, \dots, y_n) = n! \alpha^n \exp\left(-\alpha \sum_{i=1}^n (n-i+1) y_i\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left((n-i+1) \alpha e^{-(n-i+1)\alpha y_i} \right) \quad \text{car } \prod_{i=1}^n (n-i+1) = n!$$

$\Rightarrow$ La densité factorise en produit de n densités exponentielles, donc

$$Y_i := X_{(i)} - X_{(i-1)} \text{ sont indépendants et } Y_i \sim \text{Exp}((n-i+1)\alpha), \quad i = 1, \dots, n \quad (X_{(0)} := 0)$$

PS: j'ai trouvé le DM très difficile.