



Chapitre 1 - Le modèle probabiliste

Soit Ω un ensemble quelconque

1) EVÉNEMENTS / TRIBUS

DEF: 1) un événement associé à l'expérience aléatoire est un ensemble de résultats dont on peut calculer la probabilité

On note $\mathcal{F}$ la collection de tous les événements

2) Une tribu ou σ -algèbre sur Ω est une collection $\mathcal{F}$ de parties de Ω qui vérifie:

- $\emptyset, \Omega$ sont dans $\mathcal{F}$
- Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$ [stabilité par passage complémentaire]
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors leur union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est aussi dans $\mathcal{F}$ [stabilité par $\cup$ dénombrable]

PROP: [On définit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{A \subset \Omega; A \in \mathcal{F} \text{ et } A \in \mathcal{G}\}$]

Une intersection quelconque de tribus est une tribu

i.e. si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur Ω , alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \{A \subset \Omega; \forall i \in I, A \in \mathcal{F}_i\}$ est une tribu

2) PROBABILITÉ

DEF: Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω . Une probabilité sur $\mathcal{F}$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments 2 à 2 disjoints, $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$

REM: Dans le cas où Ω est fini, $\mathcal{F} = P(\Omega)$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

DEF: Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où :

- Ω est un ensemble
- $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω
- P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$

3) TRIBU BORELIENNE

PROP: Soit $\mathcal{A}$ une collection de parties de Ω . Il existe une unique tribu $\sigma(\mathcal{A})$ qui vérifie:

- $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$
- $\forall \mathcal{F}$ tribu, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$

La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ s'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, c'est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{A}$.

DEF: La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant les intervalles.

Elle est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(Les ouverts ne sont pas des tribus ($\Rightarrow$ pas stable par complémentaire). On prend la plus petite tribu qui contient les ouverts)

PREUVE: $\bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ tribu} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$ et est contenue dans toute tribu qui contient $\mathcal{A}$.
C'est donc la plus petite tribu qui contient $\mathcal{A}$.

DEF: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne si elle est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ex: Si X est une v.a., et f fct borélienne, alors $f(X)$ est une v.a.

4) VARIABLES ALÉATOIRES

DEF: Une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une application X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

NOTATION: On note $X \in B$ l'ensemble $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$

5) LOI D'UNE V.A

DEF: Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donnée par:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

6) ESPERANCE

DEF: Une v.a. étagée est une v.a. de la forme: $S = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$

$$\text{Son espérance est son intégrale: } E(S) = \int_{\Omega} S dP = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i P(A_i)$$

REM: • Si $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une v.a. positive ou nulle, son espérance, qui peut valoir $+\infty$, est:

$$\int_{\Omega} X dP = \sup \left\{ \int_{\Omega} S dP; S \text{ étagée}, 0 \leq S \leq X \right\}$$

• Si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de signe quelconque, on écrit $X = X^+ - X^-$ où: $X^+ = \max(X, 0)$ partie positive

$$X^- = -\min(X, 0) \text{ partie négative}$$

X^+ et X^- sont 2 v.a. positives.

Lorsque $E(X^+) < +\infty$ et $E(X^-) < \infty$, on pose: $E(X) = \int X dP = E(X^+) - E(X^-)$

Comme de plus, $|X| = X^+ + X^-$, on a équivalence: $E(X^+) < \infty, E(X^-) < \infty \Leftrightarrow E(|X|) < \infty$

Dans ce cas, son espérance est $E(X) = \int X dP$.

• On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace des v.a. intégrables

7) VARIANCE

DEF: Une v.a. $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ admet une espérance, ou est intégrable, si $\int_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < +\infty$

$$\text{Dans ce cas: } E(X) = \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} X dP$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

Chapitre 2 - Lois à densité

1) Mesure de Lebesgue

DEF: Une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une application de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $[0, +\infty[$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et qui est σ additive:
 $\forall (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, [\forall n \neq m, B_n \cap B_m = \emptyset \Rightarrow \mu(\bigcup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n)]$

DEF: La mesure de Lebesgue est l'unique mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui vérifie
 $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \lambda([a, b]) = b - a$

PROP: i) $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{x\}) = 0$

ii) Si $A \subset \mathbb{R}$ est dénombrable, alors $\lambda(A) = 0 = \sum_{x \in A} \lambda(\{x\})$ par σ additivité

iii) Il existe des boréliens C de $\mathbb{R}$ non dénombrables tq $\lambda(C) = 0$

NOTES:

DEF: Une fonction borélienne s est dite étagée si elle prend un nombre fini de valeurs, elle est de la forme
 $s = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{B_i}$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

INTÉGRALE DE LEBESGUE:

Soit $s = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée dans $\mathbb{R}$, où les A_i sont des boréliens. (i.e. un ensemble ouvert / réunions dénombrables / intersections dénombrables / compléments construits de ces ouverts).

L'intégrale de s par rapport à λ est: $\int_{\mathbb{R}} s d\lambda = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \lambda(A_i)$

Si f est une fonction borélienne qui est positive ou nulle, l'intégrale de f par rapport à λ est: $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} s d\lambda ; s \text{ étagée}, 0 \leq s \leq f \right\}$
(f est dite intégrable si $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$. Dans ce cas, $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) dx$)

2) Loi à densité

DEF: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne telle que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$. La loi à densité de densité f est la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ définie par $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(B) = \int_B f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_B dx$

EXEMPLES:

i) **loi uniforme** sur un intervalle $[a, b]$, c'est la loi à densité, de densité $\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$
On la note $\mathcal{U}([a, b])$

ii) **loi exponentielle** de paramètre $\alpha > 0$

loi de densité $\alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ notée $\text{Exp}(\alpha)$

Si $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, alors $E(X) = 1/\alpha$, $\text{Var}(X) = 1/\alpha^2$

iii) **loi normale ou Gaussienne** de paramètres m, σ^2

loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$ notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

PROP [Espérance et Variance]

La loi de densité f admet une espérance si $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) d\lambda(x) < +\infty$
Dans ce cas, son espérance est $m = \int_{\mathbb{R}} x f(x) d\lambda(x)$

sa variance: $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) d\lambda(x) - m^2$

3) Classification des lois sur $\mathbb{R}$

DEF: Un point x est un atome de la loi μ si $\mu(\{x\}) > 0$

On dit que la loi μ est diffuse si elle n'a pas d'atomes.

TYPES DE LOIS:

i) **loi discrètes:** On dit que μ est discrète s'il existe un ensemble D fini ou dénombrable tq $\mu(D) = 1$.

$$\text{On a alors } \mu = \sum_{x \in D} p_x \delta_x$$

ii) **lois à densité:** On dit que μ est à densité s'il existe f borélienne ≥ 0 tq $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(A) = \int_A f d\lambda$

iii) **lois singulières:** On dit que μ est singulière si elle est diffuse et s'il existe un ensemble C tq $\mu(C) = 1$ et $\lambda(C) = 0$

Toute combinaison convexe de ces 3 types est une loi de proba sur $\mathbb{R}$. En fait toute mesure de probas sur $\mathbb{R}$ se décompose comme

$$\mu = \alpha_d \mu_d + \alpha_a \mu_a + \alpha_s \mu_s \quad \text{où } \alpha_d, \alpha_a, \alpha_s \in [0, 1] \quad \alpha_d + \alpha_a + \alpha_s = 1 \quad \text{et cette écriture est unique.}$$

$\uparrow$ discrète $\uparrow$ densité $\uparrow$ singulière

4) Formule de Transfert:

PROP: $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée

$$\text{Alors: } E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_X(x)$$

PROP: Soient μ_1, μ_2 2 mesures de probas sur $\mathbb{R}$ tq pour tte fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$

Alors $\mu_1 = \mu_2$.

Pour trouver la loi de X , nous prenons une fctn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée et nous évaluons $E(f(X)) = \int f(x) dP$

Par la formule de transfert, $= \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_X(x)$. On s'efforce de mettre le résultat sous cette forme, et on peut lire la loi de X

EXEMPLE: $X \sim U([0, 1])$, $K > 1$, loi de X^K ?

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Calculons $E(f(X^K))$.

$$E(f(X^K)) = \int_{\Omega} f(X^K) dP \stackrel{\text{transfert}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x^K) dP_X(x) \quad , \quad P_X \text{ densité } \mathbb{1}_{[0, 1]}$$

$$= \int_{[0, 1]} f(x^K) dx \quad \left(y = x^K, \quad x = y^{1/K} \right. \\ \left. dx = \frac{1}{K} y^{1/K - 1} dy \right)$$

$$= \int_{[0, 1]} f(y) \frac{1}{K} y^{1/K - 1} dy$$

lit le résultat

X^K a la loi de densité $\frac{1}{K} y^{1/K - 1} \mathbb{1}_{[0, 1]}(y)$

Cours 3 - Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une sous-tribu de $\mathcal{F}$ est une tribu qui est incluse dans $\mathcal{F}$.

1) Tribu d'une v.a. X

Si $X: (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une v.a., la tribu qu'elle engendre est:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Comme X est une v.a., $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et donc $\sigma(X)$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

2) Définitions fondamentales

Soit $n \geq 2$.

Les n événements $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{F}$ sont dits indépendants si, pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$, $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Les n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ de Ω dans $\mathbb{R}$ sont dites indépendantes si, pour tous boréliens

$$B_1, \dots, B_n \text{ de } \mathbb{R}, P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$$

Les n sous-tribus $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ de $\mathcal{F}$ sont dites indépendantes si $\forall A \in \mathcal{F}_1, \dots, \forall A_n \in \mathcal{F}_n$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

Attention, "être indépendants" est beaucoup plus fort que "être 2 à 2 indépendants"

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace équipé d'une tribu. Une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E est une application X mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$, i.e., tq $\forall B \in \mathcal{E}, X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

La loi P_X est alors la mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ définie par: $\forall B \in \mathcal{E}, P_X(B) = P(X^{-1}(B))$

Ceci permet de considérer des vecteurs aléatoires, des matrices aléatoires, des fonctions aléatoires.

Exemple: X, Y 2 v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $Z = (X, Y)$. Alors Z est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$. On dit que la loi de Z admet une densité

$$\text{si il existe } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[\text{ tq } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_Z(B) = \iint_B f(x, y) dx dy$$

3) v.a. à valeurs dans des espaces quelconques

Soient $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $1 \leq i \leq n$, n espaces mesurables

Les n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, où $X_i: (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$, $1 \leq i \leq n$

sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent, $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$, sont indépendantes.

4) Loi produit

Thm: Pour $1 \leq i \leq n$. Soit μ_i une mesure de probabilité sur $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Il existe une unique mesure de probabilité μ sur l'espace mesurable produit $(E_1 \times \dots \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n)$ telle que

$$\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, \forall A_n \in \mathcal{E}_n$$

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n)$$

Cette mesure est appelée la mesure produit de $\mu_1, \dots, \mu_n$ et est notée $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$

preuve. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et regardons la loi de X_i

$$\forall B_i \in \mathcal{E}_i, P_{X_i}(B_i) = P(X_i \in B_i) = \mu(\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \omega_i \in B_i\}) = \mu(E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times B_i \times E_{i+1} \times \dots \times E_n)$$

Vérifions que $X_1, \dots, X_n$ sont indep.

$$\text{soient } B_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}_n. = \mu_1(E_1) \dots \mu_{i-1}(E_{i-1}) \mu_i(B_i) \mu_{i+1}(E_{i+1}) \dots \mu_n(E_n) = \mu_i(B_i) \text{ et donc } P_{X_i} = \mu_i$$

$$\text{On a } P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mu(\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_1 \in B_1, \dots, \omega_n \in B_n\}) = \mu(B_1 \times \dots \times B_n)$$

Application au cas où $(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Construction de variables indépendantes

Étant données n lois de probabilité $\mu_1, \dots, \mu_n$, la loi produit permet de construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de lois respectives $\mu_1, \dots, \mu_n$. Lorsque de plus $\mu_1 = \dots = \mu_n$, on dit que $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. de loi μ .

5) Regroupement par blocs

Soient $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ n sous-tribus de $\mathcal{F}$ qui sont indépendantes.

Soient I, J deux parties disjointes de $\{1, \dots, n\}$

Alors les tribus $\mathcal{I} = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)$, $\mathcal{J} = \sigma\left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{F}_j\right)$ sont indépendantes.

* le résultat se généralise à un nombre fini de blocs

PREUVE: il s'agit de montrer que $\forall D \in \mathcal{I}, \forall E \in \mathcal{J}, \mathbb{P}(D \cap E) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(E)$

Soit D un élément de la forme $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, où $D_i \in \mathcal{F}_i$ pour $i \in I$. Si $\mathbb{P}(D) = 0$, rien à montrer

Supposons $\mathbb{P}(D) > 0$ et définissons, pour $E \in \mathcal{J}$ $P_1(E) = \mathbb{P}(E|D)$, $P_2(E) = \mathbb{P}(E)$

Si E est de la forme $E = \bigcap_{j \in J} E_j$ où $E_j \in \mathcal{F}_j$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \mathbb{P}(D \cap E) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} D_i \cap \bigcap_{j \in J} E_j\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(D_i) \times \prod_{j \in J} \mathbb{P}(E_j) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(E) \end{aligned}$$

Lemme: (unicité de l'extension)

Soient P_1, P_2 2 probas sur Ω . Supposons qu'il existe une collection C d'événements tq :

i) $\sigma(C) = \mathcal{F}$

ii) $\forall A, B \in C, A \cap B \in C$.

iii) $\forall C \in C, P_1(C) = P_2(C)$

Alors $P_1 = P_2$

Preuve du lemme: on introduit la collection $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}, P_1(A) = P_2(A)\}$. $C \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ stable par différence

union décroissante, on mq $\mathcal{G}$ est tribu. D'où $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

On a donc $P_1(E) = P_2(E)$ pour E de la forme $E = \bigcap_{j \in J} E_j$. On prend pour C la collection de ces ensembles.

On a $\sigma(C) = \mathcal{J}$, C stable par $\cap$. Par le lemme, on a $P_1(E) = P_2(E) \forall E \in \mathcal{J}$

Donc on a $\mathbb{P}(D \cap E) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(E)$ pour $\forall E \in \mathcal{J}$ et tout D de la forme $D = \bigcap_{i \in I} D_i$

Pour cela, on fixe E dans $\mathcal{J}$ et on itère l'argument précédent sur D .

6) Espérance et indépendance

Soient X, Y deux v.a. de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) X et Y sont indépendantes

ii) Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions bornées telles que $E(|f(X)|) < +\infty$, $E(|g(Y)|) < +\infty$
alors $E(|f(X)g(Y)|) < +\infty$ et $E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$

(*)

pu: $ii \Rightarrow i)$

Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Appliquons $ii)$ à $f = 1_A$, $g = 1_B$.

$$E(f(x)g(y)) = E(1_A(x)1_B(y)) = P(X \in A, Y \in B) \quad E(f(x))E(g(y)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

(*)

$i) \Rightarrow ii)$

si $f = 1_A$ et $g = 1_B$, c'est vrai par def de l'indép. C'est en core vrai pour les fonctions étagées.

Fixons $g = 1_B$ et considérons $\mathcal{L} = \{ \text{les fctrs qui uénifient } \mu \}$.

• $\mathcal{L}$ contient 1_A , $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ • $\mathcal{L}$ est stable par limite $\nearrow$

$\mathcal{L}$ stable par CL à coef ≥ 0 . Donc $\mathcal{L}$ contient ttes les fonctions bar ≥ 0

On fixe ensuite f et on reitère l'argument sur g . On décompose ensuite $f = f^+ + f^-$, $g = g^+ - g^-$
 $\geq 0 \quad \geq 0$

7) Covariance

Si X et Y sont deux v.a. réelles telles que X, Y et XY sont intégrables, on définit leur covariance

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

Si X, Y sont indépendantes et intégrables, alors XY est aussi intégrable et $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Mais la réciproque est fausse en général !

Cours 4 - Suites infinies de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Soit X une v.a. supplémentaire également définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1) Convergences de v.a.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X , i.e. $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ssi

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Soit $r > 1$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X dans $L^r(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i.e. $X_n \xrightarrow{L^r} X$ ssi:

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^r] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité, i.e. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

PROP: i) $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$
 ii) $X_n \xrightarrow{L^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

PREUVE: i) Supposons $X_n \xrightarrow{p.s.} X$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n} \{|X_n - X| < \varepsilon\}\right) = 1 \quad (\mathbb{Q}: \text{dénombrable})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n} \{|X_n - X| < \varepsilon\}\right) = 1 \quad [\text{une intersection dénombrable d'événements a proba. 1 ssi ils ont tous proba. 1}]$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n} \{|X_n - X| < \varepsilon\}\right)^c\right) = 0 \quad [\mathbb{P}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A^c) = 0]$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

suite décroissante

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq N} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n), \\ A_n = \bigcup_{n \geq N} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \\ A_n \text{ décroissante} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad \text{i.e. } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

ii) Soit $\varepsilon > 0$. Écrivons

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^r) = \int_{\Omega} |X_n - X|^r d\mathbb{P} \geq \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_n - X|^r d\mathbb{P} \geq \varepsilon^r \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

$$\geq \int \mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon} \varepsilon^r d\mathbb{P} = \varepsilon^r \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^r} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

PROP: [Compatibilité avec l'addition:]

Si $X_n \xrightarrow{*} X$, $Y_n \xrightarrow{*} Y$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{*} X + Y$

où $*$ = p.s., L^r ou $\mathbb{P}$ (avec $*$ le même choix partout).

THM: [convergence dominée]

Soit (X_n) une suite de v.a. tq :

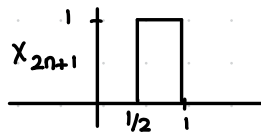
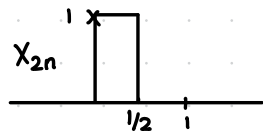
i) $\exists$ une v.a. X telle que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

ii) $\exists$ une v.a. $Y > 0$ intégrable tq $|X_n| \leq Y$ p.s.

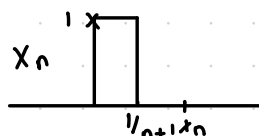
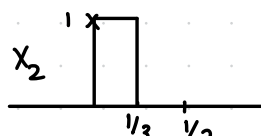
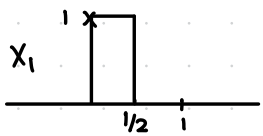
Alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$, et en particulier: $E[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E[X]$

3) Exemples:

On se place sur $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda|_{[0, 1]})$, λ mesure de Lebesgue

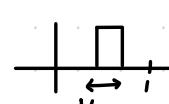
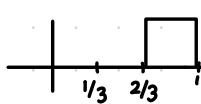
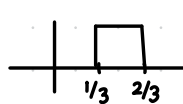
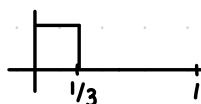
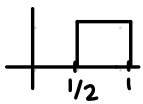
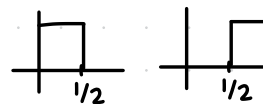


$\leadsto$ ne converge en aucun sens (ex)

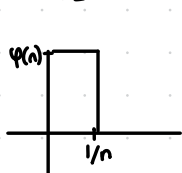


$X_n \xrightarrow[P]{p.s.} 0$

$\times L^1$



$X_n \xrightarrow[P]{p.s.} 0$
 $X_n \xrightarrow[P]{p} 0$



$E(X_n^r) = \frac{\varphi(n)^r}{r}$
adapte $\varphi(n)$ pour que $E(X_n^r) \rightarrow 0$
 $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ $X_n \xrightarrow{0} P$

4) Indépendance pour une suite infinie

Une suite infinie d'événements, de variables aléatoires ou de sous-tribus est indépendante ssi toute sous-famille extraite de la suite est indépendante.

THM: [regroupement infini par blocs]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes.

Soient $I_K, K \in \mathbb{N}$ des parties de $\mathbb{N}$ qui sont 2 à 2 disjointes. Alors les tribus

$$\mathcal{I}_K = \sigma(X_n, n \in I_K), K \in \mathbb{N}$$

sont indépendantes

5) Le modèle analytique pour le jeu de pile ou face

Nous prenons $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. À un nombre réel ω de $[0, 1[$ nous associons son développement dyadique (ou binaire)

$$\omega = \sum_{n \geq 1} \frac{\omega_n}{2^n}, \text{ où } \omega_n \in \{0, 1\} \text{ pour } n \geq 1$$

Puis nous construisons une suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur Ω à valeurs dans $\{-1, +1\}$ en posant

$$\forall n \geq 1, X_n(\omega) = 2\omega_n - 1$$

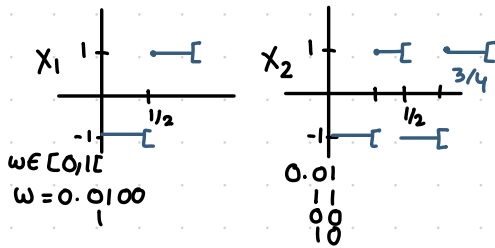
La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de v.a. i.i.d de loi de Bernoulli $(1/2)$ telles que

$$\forall n \geq 1, P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = 1/2$$

NOTES:

L'écriture est unique si on exclut les développements égaux à 1 à partir d'un certain rang.

Nous définissons alors, pour $n \geq 1$: $\forall \omega \in [0,1[$ $X_n(\omega) = 2\omega_{n-1} \in \{-1,1\}$. Je dis que la suite (X_n) répond à la question.



De manière générale, $X_n^{-1}(\{1\})$ est l'union de 2^{n-1} intervalles dyadiques de longueur $\frac{1}{2^n}$
d'où $P(X_n = +1) = \lambda(\{\omega : X_n(\omega) = +1\}) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$

Mq les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes.

Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ dans $\{-1,1\}$ et regardons $P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n)$

$$\begin{aligned} P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) &= \lambda(\{\omega \in [0,1[: \omega_1 = \frac{1+\varepsilon_1}{2}, \dots, \omega_n = \frac{1+\varepsilon_n}{2}\}) \\ &= \lambda(\{\omega : \frac{1+\varepsilon_1}{2} + \dots + \frac{1+\varepsilon_n}{2^{2^n}} \leq \omega < \frac{1+\varepsilon_1}{2} + \dots + \frac{1+\varepsilon_n}{2^{2^n}} + \frac{1}{2^{2^n}}\}) \\ &= \frac{1}{2^n} \\ &= P(X_1 = \varepsilon_1) \times \dots \times P(X_n = \varepsilon_n) \end{aligned}$$

Nous possédons une suite ∞ de pièces indépendantes

7) La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

Grâce au modèle précédent, nous construisons une nouvelle suite infinie $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$S_0 = 0, \quad \forall n \geq 1 \quad S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Nous pouvons maintenant formuler rigoureusement les questions sur la marche infinie, comme calculer

$$P(\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : S_n = 0) = P(\bigcup_{n \geq 1} \{S_{2n} = 0\})$$

une suite de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0,1]$

Nous partons d'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. i.i.d. telles que: $\forall n \geq 1, P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = 1/2$

Nous posons alors, pour $m \geq 0$: $I_m = \{2^m(2K+1) : K \in \mathbb{N}\}$

$$\text{puis } Y_m = \sum_{K \geq 1} \frac{1}{2^K} X_{2^m(2K+1)}$$

$\leadsto$ La suite $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$

$$\text{NOTES: } P(\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : S_n = 0) = P(\bigcup_{n \geq 1} \{S_{2n} = 0\})$$

$$\begin{aligned} &= P(\{S_2 = 0\} \cup (\{S_4 = 0\} \setminus \{S_2 = 0\}) \cup \dots) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{S_{2n} = 0\} \setminus (\bigcup_{1 \leq K \leq n} \{S_{2K} = 0\}))) \\ &= P(\bigcup_{n \geq 1} \{S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{disjoints} \\ \text{Par } \sigma \text{ additivité: } &= \sum_{n \geq 1} P(S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0) \\ &= \frac{P(S_{2n} = 0)}{P(S_{2n} \neq 0)} \end{aligned}$$

$\alpha = n$ nb de chemins

$\beta = n$ = nb de choix pour monter $\binom{2n}{n}$

$$\text{d'où } P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow 0$$

$$\text{Lemme: } P(S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{n-1}} P(S_{2n} = 0)$$



$$P(\exists n \in \mathbb{N}^* : S_n = 0) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}}$$

Cours 5 - Transience et récurrence des marches

Soit $d \geq 1$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. La marche aléatoire associée est la suite

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $S_0 = 0$, $\forall n \geq 1$ $S_n = X_1 + \dots + X_n$

La marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite récurrente si elle repasse par 0 une infinité de fois avec probabilité 1, et transiente sinon

1) Un critère de récurrence

PROP: Si la marche revient en 0 avec probabilité 1, alors elle repasse par 0 une infinité de fois avec proba 1

PREUVE: Soit A l'instant de la dernière visite de 0, i.e. $R = \sup \{n \geq 0; S_n = 0\}$

Supposons que $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$ et regardons, pour $K \geq 1$

$$\mathbb{P}(R = K) = \mathbb{P}(S_K = 0, \forall n > K, S_n - S_K \neq 0) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_K = 0, \forall n > K, X_{K+1} + \dots + X_n \neq 0)$$

$$\text{or } \{ \forall n > K, X_{K+1} + \dots + X_n \neq 0 \} \in \sigma(X_i, i \geq K+1)$$

Par le thm de regroupement par blocs, cet événement est indépendant de $\{X_1 + \dots + X_K = 0\}$

$$\text{d'où } \mathbb{P}(R = K) = \mathbb{P}(S_K = 0) \mathbb{P}(\forall n > K, S_n - S_K \neq 0)$$

$$\text{de plus } (X_{K+1}, X_{K+2}, \dots) \stackrel{\text{loi}}{=} (X_1, X_2, \dots)$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(\forall n > K, S_n - S_K \neq 0) = \mathbb{P}(\forall n \geq 1, S_n \neq 0) \text{ d'où : (sachant } \mathbb{P}(S_K = 0) \leq 1)$$

$$\mathbb{P}(R = K) \leq \mathbb{P}(\forall n \geq 1, S_n \neq 0) \leq 1 - \mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 0$$

$$\text{or, } \mathbb{P}(\text{la marche visite 0 un nb fini de fois}) = \mathbb{P}(R < +\infty) = \mathbb{P}(\bigcup_{K \in \mathbb{N}} \{R = K\}) \leq \sum_K \mathbb{P}(R = K) = 0$$

CORR:

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(S_n \text{ visite 0 une infinité de fois}) = 1$$

Souvent, il est plus facile de mq un événement arrive une infinité de fois avec proba plutôt que de mq' il arrive une fois avec proba 1

2) Le lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$. Nous définissons:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq n} A_m = \{ \omega \in \Omega : \omega \text{ appartient à tous les } A_n \text{ sauf un nombre fini } \}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} A_m = \{ \omega \in \Omega : \omega \text{ appartient à une infinité d'} A_n \}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{ A_n \text{ arrive infiniment souvent} \} = \{ A_n \text{ infiniment souvent} \} = \{ A_n \text{ i. so.} \} \text{ en abrégé}$$

EX: (X_n) suite de v.a. réelles $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{ X_n \in B \} = \{ X_n \in B \text{ i. so.} \}$$

$$\bullet \text{ ex de la marche: } \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ S_n = 0 \} = \{ S_n = 0 \text{ i. so.} \}$$

Lemme de Borel-Cantelli: Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

• partie I: si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i. so.}) = 0$

• partie II: si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge et si les (A_n) sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i. so.}) = 1$

PV: I) Supposons que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ cv. Alors

$$\mathbb{P}(\{A_n \text{ arrive infiniment souvent}\}) = \mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} A_m). \text{ La séquence } \bigcup_{m \geq n} A_m \text{ est décroissante}$$

$$\text{Par le thm de convergence monotone: } \mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} A_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{m \geq n} A_m)$$

$$\text{Par la } \sigma\text{-additivité: } \mathbb{P}(\bigcup_{m \geq n} A_m) \leq \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m)$$

$$\text{Or la série } \sum_n \mathbb{P}(A_n) \text{ converge, donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m) = 0, \text{ donc } \mathbb{P}(A_n \text{ i. so.}) = 0$$

II. Supposons que $\sum_n P(A_n) = +\infty$.

$P(A_n \text{ i. so}) = P(\bigcap_{m \geq n} A_m)$. Regardons le complémentaire

$$P(\{A_n \text{ i. so}\}^c) = P(A_n \text{ f. so}) = P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m^c\right)$$

Soit n fixé, regardons

$$P\left(\bigcap_{m \geq n} A_m^c\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \leq m \leq N} A_m^c\right).$$

$$\text{Ensuite, } P\left(\bigcap_{n \leq m \leq N} A_m^c\right) = \prod_{n \leq m \leq N} P(A_m^c) \text{ par indépendance} = \prod_{n \leq m \leq N} (1 - P(A_m))$$

$$\text{d'où, } \ln P\left(\bigcap_{n \leq m \leq N} A_m^c\right) = \sum_{n \leq m \leq N} \ln(1 - P(A_m)) \quad (\text{rappel: } \ln(1+x) \leq x)$$

$$\leq - \sum_{n \leq m \leq N} P(A_m) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\text{d'où } P(A_n \text{ f. so}) = 0$$

3) Le singe et Shakespeare (exemple)

Mettons un singe à taper à la machine à écrire. Quelle est la proba qu'il tape les œuvres complètes de Shakespeare?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. Bernoulli(p), $0 < p < 1$

$$\forall n \geq 1 \quad P(X_n = 1) = p \quad P(X_n = 0) = 1 - p$$

Soit $K \geq 1$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K$ une suite de 0 et de 1 fixée

Regardons l'événement $A_n = \{X_n = \varepsilon_1, X_{n+1} = \varepsilon_2, \dots, X_{n+K-1} = \varepsilon_K\}$ (le singe tape la séquence voulue à partir du rang n)

$$P(A_n) = \prod_{i=0}^{K-1} p^{\varepsilon_i} (1-p)^{1-\varepsilon_i} \text{ ne dépend pas de } n! \text{ donc } \sum_n P(A_n) = +\infty$$

Cependant, les (A_n) ne sont pas indépendants on ne peut pas appliquer BC II

Considérons les événements $B_n = A_{nK}$, $n \geq 1$. Par le théorème de regroupement par blocs, B_n sont indépendants

$$\text{et } \sum_n P(B_n) = +\infty \text{ Par BC II, } P(B_n \text{ i. so}) = 1$$

4) Un critère de récurrence

On considère la marche aléatoire $S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Soit $T = \min\{n \geq 1; S_n = 0\}$ le temps du premier retour à 0 (convention: $T = +\infty$ si la marche ne revient jamais à 0)

On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = P(S_n = 0)$, $f_n = P(T = n)$

On remarque:

$$u_n = P(S_n = 0) = P\left(\{S_n = 0\} \cap \bigcup_{K=1}^n \{T = K\}\right) = \sum_{K=1}^n P(S_n = 0, T = K)$$

Or, l'événement $\{S_n = 0, T = K\}$ signifie:

la marche revient pour la première fois à 0 au temps K , puis de K à n , elle repart et revient encore à 0

d'où, par indépendance des incréments:

$$P(S_n = 0, T = K) = P(T = K) \cdot P(S_{n-K} = 0)$$

Ainsi,

$$u_n = \sum_{K=1}^n f_K u_{n-K} \quad (*)$$

On définit les séries génératrices:

$$U(s) = \sum_{n \geq 0} u_n s^n, \quad F(s) = \sum_{n \geq 1} f_n s^n$$

Ces deux séries ont un rayon de convergence ≥ 1 .

En multipliant (*) par s^n et en sommant sur $n \geq 1$:

$$\text{On a } U(s) - 1 = \sum_{n \geq 1} u_n s^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{K=0}^n u_K f_{n-K} s^n \quad [\text{on peut rajouter le terme } n=0, u_0 f_0 = 0, f_n = 0]$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{K=0}^n (u_K s^K) (f_{n-K} s^{n-K}) \leftarrow [\text{produit Cauchy de 2 séries}]$$

$$= U(s)F(s)$$

$$\text{donc } U(s) = \frac{1}{1 - F(s)} \quad (1)$$

La marche est dite récurrente si $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ et transiente si non

On a:

$$F(1) = \sum_{n \geq 1} f_n = \mathbb{P}(T < \infty) \text{ et } u(1) = \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0)$$

Par (1):

$$u(s)(1 - F(s)) = 1 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1^-} u(s)(1 - F(s)) = 1$$

si $u(1) < +\infty$, $(1 - F(s)) \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} 1$ reste bornée donc $F(1) < 1$: la marche est transiente

si $u(1) = +\infty$, $u(s)(1 - F(s)) \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} 1$ si $F(s) \rightarrow 1$, donc $F(1) = 1$ et $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$: la marche est récurrente

$$\text{THM: } \mathbb{P}(T < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i.s.o.}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$$

5) La marche sur $\mathbb{Z}$

Soit $p \in]0, 1[$ et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\text{Ber}(p)$ telles que:

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p, \mathbb{P}(X_n = +1) = p$$

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche associée. Nous avons:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \sim \frac{4p(1-p)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

→ si $p \neq 1/2$, alors $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty$, et la marche est transiente

→ si $p = 1/2$, alors $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$, et la marche est récurrente.

6) La marche dans $\mathbb{Z}^2$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ telles que, pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = x) = 1/4, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche associée. Nous avons:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \left(\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \sim \frac{1}{\pi n} \text{ et la marche symétrique dans } \mathbb{Z}^2 \text{ est récurrente.}$$

7) La marche dans $\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^d$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}^3$ telles que, pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = x) = 1/6, \quad x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche associée. Nous avons $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = O(1/n^{3/2})$ et la marche symétrique dans $\mathbb{Z}^3$ est transiente.

Le nombre moyen de retours en 0 est donné par:

$$u_3 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z}$$

En dimension $d > 3$, la marche symétrique dans $\mathbb{Z}^d$ est transiente, et le nombre moyen de retours en 0 est:

$$u_d = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{du_1 \dots du_d}{1 - \frac{1}{d} \sum_{1 \leq k \leq d} \cos u_k}$$

Cours 6 - Le problème des signes aléatoires

1) Le problème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (déterministe) de nombres réels.

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie i.i.d. de loi Bernoulli $(1/2)$ tq :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1/2$$

La série $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n u_n$ converge-t-elle ?

- si $u_n \not\rightarrow 0$, la série ne converge pas.
- si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum \varepsilon_n u_n$ est p.s. absolument convergente.

EX : Regardons la série harmonique : $\sum_{n \geq 1} 1/n = +\infty$
 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - 1/2 + 1/3 - \dots = \ln(2)$

2) Convergence dans L^2

PROP : La série de v.a. $\sum \varepsilon_n u_n$ converge dans L^2 ssi la série $\sum u_n^2$ converge.

PREUVE : Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k$

Alors, la série $\sum \varepsilon_n u_n$ converge dans L^2 ssi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^2 .

L'espace $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet pour $\|\cdot\|_2$.

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi elle vérifie le critère de Cauchy.

Soit $m < n$, regardons :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} |S_n - S_m|^2 d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E} \left[(S_n - S_m)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k u_k \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m < k, \ell \leq n} \varepsilon_k \varepsilon_\ell u_k u_\ell \right] = \sum_{\substack{m < k \\ \ell \leq n}} u_k u_\ell \mathbb{E}(\varepsilon_k \varepsilon_\ell) \end{aligned}$$

$$k \neq \ell \text{ et } \mathbb{E}(\varepsilon_k \varepsilon_\ell) = \mathbb{E}(\varepsilon_k) \mathbb{E}(\varepsilon_\ell) = 0$$

Donc

$$= \sum_{m < k \leq n} u_k^2 = a_n - a_m \text{ où } a_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$$

Ainsi : la suite (S_n) est de Cauchy dans L^2 ssi la suite (a_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

3) La loi du 0-1 de Kolmogorov

DEF : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

La tribu de queue, ou tribu asymptotique, associée à la suite (X_n) est la tribu :

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

Un événement A de $\mathcal{T}$ est dit asymptotique pour la suite (X_n) s'il est dans la tribu asymptotique.

EXEMPLES : $\{\limsup X_n \geq 100\}$, $\{\liminf X_n \in [0, 1]\}$,

$$\left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = +\infty \right\}$$

$$\{\omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ existe}\}$$

$$\{X_n \geq 10 \text{ infiniment souvent}\},$$

$$\{\omega; \sum_n \varepsilon_n(\omega) u_n \text{ converge}\}$$

$\mathcal{T}$ est asymptotique pour la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$

THM: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes.

Soit A un événement asymptotique pour la suite (X_n) . Alors $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

Application au pb des signes:

Soit $\sum_n \varepsilon_n$ converge p.s, soit elle ne converge pas p.s.

4) Un résultat d'approximation:

DEF: La différence symétrique de 2 ensembles A et B est: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

C'est une loi de groupe sur $\mathcal{P}(\Omega)$: $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$

$$A \Delta A = \emptyset$$

$$\forall A, B, C, A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

$$(\mathcal{P}(\Omega), \Delta) \text{ groupe abélien}$$

Nous avons également: $\forall A, B \in \mathcal{F} \quad |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \Delta B)$

$$\forall A, B, C \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}((A \cup B) \Delta C) \leq \mathbb{P}(A \Delta C) + \mathbb{P}(B \Delta C)$$

PROP: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. et soit A un événement dans la tribu $\sigma(X_0, X_1, \dots)$

Alors il exis une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists K(n), A_n \in \sigma(X_0, \dots, X_{K(n)})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n \Delta A) = 0$$

RQ: $\forall A, B \quad |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \Delta B)$,

donc on aura aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

PREUVE: Considérons G la collection des événements pour lesquels le résultat est vrai

je dis que:

$\forall m \quad \sigma(X_0, \dots, X_m) \subset G$ si $A \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$, il suffit de prendre $A_n = A$

On montre ensuite que G est tribu, donc contient $\sigma(\bigcup_m \sigma(X_0, \dots, X_m))$

Ainsi, $\sigma(X_0, X_1, \dots) \subset G$

En effet, $\emptyset, \Omega \in G$

Si $A \in G$ et (A_n) suite approximée A , alors la suite (A_n^c) approxime A^c

$$\mathbb{P}(A_n^c \Delta A^c) = \mathbb{P}(A_n \Delta A) \rightarrow 0$$

si $(A_m)_{m \geq 1}$ est une suite de G , alors $\bigcup_m A_m \in G$

Posons $A = \bigcup_m A_m$.

Comme $A_m \in G$, il existe $(A_{m,n})$ approximante pour A_m :

$$\forall n, \forall m \geq 1, \exists K(m, n); A_{m,n} \in \sigma(X_0, \dots, X_{K(m, n)})$$

$$\lim_n \mathbb{P}(A_m \Delta A_{m,n}) = 0$$

$$\bullet \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = 0, \forall M \geq 1 \exists \psi(M) \text{ tq } \mathbb{P}(A \setminus \bigcup_{m=1}^M A_m) \leq 1/M$$

Ensuite: $\forall m \in \{1, \dots, \psi(M)\};$

$$\exists N(M, m) \text{ tq } \forall n \geq N(M, m), \mathbb{P}(A_m \Delta A_{m,n}) \leq \frac{1}{\psi(M)M}$$

Prendons alors $N(M) = \max \{ N(M, m), 1 \leq m \leq \psi(M) \}$ et $A_M = \bigcup_{m=1}^{\psi(M)} A_{m, N(M, m)}$

$$\text{Alors, } P(A \Delta A_M) \leq P(A \setminus \bigcup_{m=1}^{\psi(M)} A_m) + P(\bigcup_{m=1}^{\psi(M)} A_m \Delta A_M)$$

$$\leq \frac{1}{M} + \sum_{m=1}^{\psi(M)} P(A_m \Delta A_{m, N(M, m)})$$

$$\leq \frac{1}{M} + \sum_{m=1}^{\psi(M)} \frac{1}{\psi(M)M} = 2/M \quad \square$$

(X_n) indep, $A \in \mathcal{G} = \sigma(X_0, X_1, \dots)$

On applique le résultat d'approx à A :

$\exists (A_n) \forall n, A_n \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{K(n)})$ et $\lim P(A \Delta A_n) = 0$

D'abord, $|P(A) - P(A_n)| \leq P(A \Delta A_n)$

donc $P(A_n) \rightarrow P(A)$

De plus, $A_n \in \sigma(X_0, \dots, X_{K(n)})$

$A \in \mathcal{G} \subset \sigma(X_{K(n)+1}, X_{K(n)+2}, \dots)$

donc $P(A \cap A_n) \rightarrow P(A)$

Comme (X_n) indep, les 2 tribus sont indep. Donc A et A_n aussi

$$P(A \cap A_n) = P(A)P(A_n) \rightarrow P(A)^2$$

$$|P(A) - P(A \cap A_n)| = P(A \setminus A_n) \leq P(A \Delta A_n) \rightarrow 0, \text{ d'où } P(A)^2 = P(A)$$

5) Inégalité de Kolmogorov:

THM: Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. indep. centrées (de moyenne nulle) et de variances finies.

Ponons $\forall k \in \{1, \dots, n\}; S_k = X_1 + \dots + X_k$

$$\text{Alors } \forall \alpha > 0, P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}(S_n)$$

PREUVE:

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on introduit l'événement $A_k = \{|S_1| < \alpha, \dots, |S_{k-1}| < \alpha, |S_k| \geq \alpha\}$ disjoints.

$$\text{Var}(S_n) = E(S_n^2) = \int_{\mathbb{R}} s^2 dP \geq \int_{\bigcup_{k=1}^n A_k} s^2 dP$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} s^2 dP \quad \text{car } A_k \text{ à 2 disjoints}$$

$$\text{De plus, } \int_{A_k} s^2 dP = \int_{A_k} (S_k + S_n - S_k)^2 dP$$

$$= \dots$$

6) Convergence de séries de v.a. indépendantes:

THM: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indep. centrées et de variances finies tq

$$\forall n, E(X_n) = 0 \quad E(X_n^2) \leq +\infty$$

$$\text{Alors } \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{L^2} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{p.s.}$$

* Une conséquence des résultats précédents est que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^2 < +\infty \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{p.s.} (*)$

Notamment, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge p.s. De plus, l'implication réciproque

Cours 7

1) Inégalité de Bienaymé-Chebyshev

THM: [Markov] Soit X une v.a. positive.

$$\text{Alors } \forall \lambda > 0, \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[X]$$

THM: [BT] Soit X une v.a. qui admet un moment d'ordre 2, i.e., $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$

$$\text{Alors } \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X)$$

PREUVE: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mathbb{P} \geq \int_{\{x \geq \lambda\}} x d\mathbb{P} \geq \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda)$

$$\int_{\{x \geq \lambda\}} x d\mathbb{P} = \int_{\{x \geq \lambda\}} 1_{\{x \geq \lambda\}} x d\mathbb{P} \geq \int_{\{x \geq \lambda\}} 1_{\{x \geq \lambda\}} \lambda d\mathbb{P} = \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda)$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \varepsilon^2)$$

Markov

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X)$$

2) Loi faible des grands nombres

THM: Soit μ une mesure de probas sur $\mathbb{R}$ qui est intégrable, i.e. $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < +\infty$.

$$\text{Alors } m = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$$

Pour $n \geq 1$, Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. i.i.d. de la loi μ .

$$\text{Alors } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0$$

PREUVE: Supposons que la loi μ admet un moment d'ordre 2

$$\text{Posons } \sigma^2 = \text{Var}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 d\mu(x) \text{ et appliquons BT à } \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$\text{Comme } \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)) = m$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$\text{Calculons } \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) \stackrel{\text{indep}}{=} \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n))$$

$$\stackrel{\text{m. loi}}{=} \frac{1}{n} \text{Var}(\mu) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3) Loi forte des grands nombres

THM: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. intégrables i.e. $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$

$$\text{Alors } \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X_1) \quad \text{i.i.d.}$$

4) Critère de Kolmogorov

PROP: Soit (Z_n) une suite de v.a. indépendantes, centrées.

$$\text{Si } \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{n^2} < +\infty \text{ alors } \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$$

Cours 8 - La convergence en loi

1) Définition

DEF: Soient $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ des v. a. r. (qui ne sont pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité)
 $X_n \xrightarrow{d} X$ ssi $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X))$

2) Fonction de répartition

DEF: Soit X une v. a. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La fonction de répartition de X , notée F_X , est la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

On a $F_X(x) = \mathbb{P}_X([-\infty, x])$

Comme les intervalles $]-\infty, x], x \in \mathbb{R}$, engendrent les boréliens et forment une famille stable par $\cap$ finie, par unicité de l'extension, la loi $\mathbb{P}_X$ est déterminée par F_X .

la fonction de répartition F_X détermine la loi $\mathbb{P}_X$ de X .

PROP: Une fonction de répartition $\tilde{F}$ vérifie:

- i) $\tilde{F}$ est croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$
- ii) $\tilde{F}$ est continue à droite
- iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{F}(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{F}(x) = 1$

preuve: i)

ii) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Regardons $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} F_X(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} \mathbb{P}_X([-\infty, x])$

$$\stackrel{\text{continuité monotone}}{=} \mathbb{P}_X\left(\bigcap_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}}]-\infty, x]\right) = \mathbb{P}_X([-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} \mathbb{P}_X([-\infty, x])$$

$$= \mathbb{P}_X\left(\bigcap_{x \in \mathbb{Z}}]-\infty, x]\right) = \mathbb{P}_X(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_X([-\infty, x]) = \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{x \in \mathbb{N}}]-\infty, x]\right) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$$

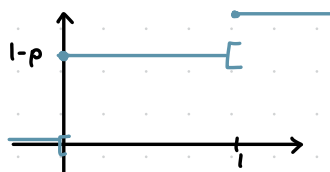
$F(x)$

3) Exemples.

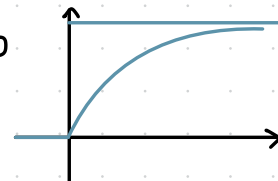
$X \sim \text{Ber}(p)$

$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 1-p$



$$F_X \sim \text{Exp}(\alpha) \\ F_X(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt \quad x \geq 0 \\ = 1 - e^{-\alpha x}$$



Plus généralement, si la loi de X a une densité f_X , alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

THM: L'application $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \mapsto F_\mu \in \mathcal{R}$ est une bijection

$\leadsto$ résultat permettant de construire des mesures du probas singulières sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

5) Convergences des fonctions de repartition

THM: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des v.a. réelles et notons $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$, F_X les fonctions de repartition.

Equivalence: i) La suite (X_n) converge en loi vers X

ii) en tout point x de $\mathbb{R}$ où F_X est continue, la suite $(F_{X_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge $F_X(x)$,

$$\text{i.e. } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Cours 9 - Les fonctions caractéristiques

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit $\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$ sous réserve que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables.

1) Fonctions caractéristique d'une v.a. / d'une loi μ .

DEF: [v.a.] Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Sa fonction caractéristique est: $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$

$$= \int_{\Omega} e^{iuX} d\mathbb{P} \quad (\text{bien définie car } |e^{iuX}| = 1 \text{ donc } e^{iuX} \text{ } \mathbb{P}\text{-intégrable})$$

DEF: [loi μ]

Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Sa fonction caractéristique est: $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi_{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mu(x)$ (bien définie car $|e^{iux}| = 1$ et donc $\operatorname{Re} e^{iux} = \cos ux$ est μ intégrable)

RQs: $e^{iux} = \cos(ux) + i\sin(ux)$

Par la formule de transfert

$$\mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{\Omega} e^{iuX} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mathbb{P}_X(x) \text{ et donc } \varphi_X = \varphi_{\mathbb{P}_X}$$

2) Quelques lois classiques

Loi $\mathbb{P}_X$	$\varphi_X(u)$
δ_a	e^{iua}
$\operatorname{Ber}(p)$	$1 - p + pe^{iu}$
$P(\lambda)$	$\exp(\lambda(e^{iu} - 1))$
$\operatorname{Geo}(p)$	$\frac{pe^{iu}}{1 - (1-p)e^{iu}}$
$\operatorname{Exp}(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\exp(ium - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)$

Étapes de calcul:

• Si $X \sim \operatorname{Ber}(p)$ $\mathbb{P}(X=1)=p, \mathbb{P}(X=0)=1-p$

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = 1 - p + pe^{iu}$$

• si $X \sim P(\theta)$: $\forall k \in \mathbb{N} \mathbb{P}(X=k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iuk} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \frac{(e^{iu}\theta)^k}{k!}$$

$$= e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}} = e^{\theta(e^{iu} - 1)}$$

• Si $X \sim \operatorname{Exp}(\alpha)$ $\alpha > 0$:

$$\mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{iux} \alpha e^{-\alpha x} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \alpha e^{(iu-\alpha)x} d\lambda(x)$$

$$= \frac{\alpha}{iu - \alpha} e^{(iu-\alpha)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{iu - \alpha}$$

3) La loi Gaussienne [calcul de la fonction caractéristique]

Soit $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et X une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

* Posons $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ ssi $X = m + \sigma Z$. alors $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculons φ_Z

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[e^{iuZ}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

* on met sous forme canonique: $iux - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x - iu)^2 - \frac{u^2}{2}$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2(x-iu)^2} e^{-u^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2(x-iu)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

*) Calcul de $I(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2 (x-iu)^2} dx$
au carré + coordonnées polaires
 $\rightarrow I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2 x^2} dx = \sqrt{2\pi}$

Calculons $I'(u)$

$I(u) = \int f(x, u) dx$ avec $f(x, u) = e^{-1/2 (x-iu)^2}$ (on espère: $I'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) dx$)

$\hookrightarrow$ il faut obtenir une majoration de f qui ne dépend pas de u .

$f(x, u)$ est C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = i(x-iu)e^{-1/2 (x-iu)^2}$
[on veut que la majoration soit uniforme en u]
 $\left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq (|x| + |u|) e^{-1/2 (x^2 + u^2)}$

Cette fonction est λ intégrable et ne dépend pas de u . Alors I est dérivable et sa dérivée vaut :

$I'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) dx = \int_{\mathbb{R}} i(x-iu) e^{-1/2 (x-iu)^2} dx$
 $\frac{\partial f}{\partial u} = i(x-iu)e^{-1/2 (x-iu)^2}$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-iu)e^{-1/2 (x-iu)^2}$
 $= -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) dx = -i [f(x, u)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$

d'où $I(u) = cte = I(0) = \sqrt{2\pi}$

On trouve finalement $\psi_Z(u) = e^{-u^2/2}$ si $Z \sim N(0, 1)$
 si $X \sim N(m, \sigma^2)$, $\psi_X(u) = e^{i\mu m - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$ ($X = \sigma Z + m$)

Posons $g_0(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
 $\int e^{iux} g_0(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{1/\sigma}(u)$

4) Propriétés:

PROP: • Si X est une v.a. sa fonction caractéristique ψ_X vérifie:

- i) $\psi_X(0) = 1$
- ii) $\forall u \in \mathbb{R}, |\psi_X(u)| \leq 1$
- iii) $\forall u \in \mathbb{R}, \psi_X(u) = \overline{\psi_X(-u)}$
- iv) ψ_X est continue sur $\mathbb{R}$

PROP: [Effet d'une transformation affine]

X v.a. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Alors $\forall u \in \mathbb{R}, \psi_{\alpha X + \beta}(u) = e^{i\mu\beta} \psi_X(\alpha u)$

PREUVE: • ii) $|\mathbb{E}(e^{iux})| \leq \mathbb{E}(|e^{iux}|) = 1$

iv) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et montrons que ψ_X est continue en u_0 .

$\psi_X(u) = \int e^{iux} dP_X(x)$

Il s'agit d'une $\int$ dépendant d'un paramètre.

Ici, $\forall u \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |e^{iux}| \leq 1$ [majoration uniforme en u par une fonction $\mathbb{P}$ -intégrable]

Par le TCD : $\lim_{u \rightarrow u_0} \psi_X(u) = \psi_X(u_0)$

• $(\mathbb{E}[e^{i\mu(\alpha X + \beta)}]) = \mathbb{E}[e^{i\mu\beta} e^{i\mu\alpha X}] = e^{i\mu\beta} \mathbb{E}[e^{i\mu\alpha X}]$

5) Thm d'injectivité

THM: Notons $M_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

L'application qui à une mesure de probas μ associe sa f. c. φ_μ est injective

$$\mu \in M_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \varphi_\mu.$$

Ainsi si X est une v. a., la fonction φ_X caractérise la loi de X .

cas particulier: si μ admet une densité f_μ , alors $\varphi_\mu(u) = \int e^{iux} f(x) d\lambda(x)$

Cours 10 - Le théorème limite centrale

1) Le thm de Paul Levy

THM: Soit $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ des v.a.s réelles et soit $\varphi_X, \varphi_{X_n} n \in \mathbb{N}$ leur fonctions caractéristique. Nous avons équivalence entre :

i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

ii) $\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{X_n}(u) = \varphi_X(u)$

preuve:

Sens facile i) $\Rightarrow$ ii)

$$\varphi_{X_n}(u) = \mathbb{E}(e^{iuX_n}) = \mathbb{E}(\cos(uX_n)) + i \mathbb{E}(\sin(uX_n))$$

les fonctions $x \mapsto \cos ux, \sin ux$ (u étant fixe) sont continues bornées et donc par définition de la convergence en loi :

$$\mathbb{E}(\cos uX_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(\cos uX) \quad \text{et donc} \quad \varphi_{X_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi_X(u)$$

$$\mathbb{E}(\sin uX_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(\sin uX)$$

Sens réciproque : ii) $\Rightarrow$ i)

Nous utilisons la même stratégie que pour prouver l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures de probas. Nous supposons que $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ sont toutes définies sur un même espace de probas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est aussi définie une v.a. Y indépendante de $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Nous supposons ii) vraie et nous voulons $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Soit $\sigma > 0$ et écrivons

$$\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)) + \mathbb{E}(f(X_n + \sigma Y)) - \mathbb{E}(f(X + \sigma Y)) + \mathbb{E}(f(X + \sigma Y) - f(X))$$

Comme f est continue à support compact, elle est uniformément continue.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit δ associé à ε comme ci-dessus. Écrivons :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n) - f(X_n + \sigma Y))| &\leq \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|) \\ &= \int_{|\sigma Y| \geq \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| d\mathbb{P} + \int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| d\mathbb{P} \end{aligned}$$

(on veut majorer chacune des intégrales)

$$\int_{|\sigma Y| \geq \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| d\mathbb{P} \leq 2\|f\|_{\infty} \int_{|\sigma Y| \geq \delta} 1 d\mathbb{P} = 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|\sigma Y| \geq \delta)$$

$$\text{je dis que } \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{P}(|\sigma Y| \geq \delta) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{P}(|Y| > \frac{\delta}{\sigma}) = 0 \text{ donc } \exists \sigma_0 \quad 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|\sigma_0 Y| \geq \delta) < \varepsilon$$

$$\int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| d\mathbb{P} < \varepsilon$$

On a donc $|\mathbb{E}(f(X_n) - f(X_n + \sigma_0 Y))| < 2\varepsilon$ (vraie pour tout n !)

Par le même argument, on a $|\mathbb{E}(f(X + \sigma_0 Y) - f(X))| < 2\varepsilon$. Reste le terme du milieu.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}(f(X_n + \sigma_0 Y) - f(X + \sigma_0 Y))| + 2\varepsilon$$

$$\text{Nous utilisons la formule du cours précédent: } \mathbb{E}(f(X_n + \sigma_0 Y)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{1/\sigma}(u) \varphi_{X_n}(-u) du dz$$

$$\mathbb{E}(f(X + \sigma_0 Y))$$

$$\varphi_X$$

Posons $F_n(u, z) = f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} g_{1/\sigma_0}(u) \varphi_{X_n}(-u)$

$|F_n(u, z)| \leq |f(z)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} g_{1/\sigma_0}(u)$ domination par une fonction qui ne dépend pas de n et qui est dans $\mathcal{L}^1(d\lambda(u), d\lambda(z))$

→ d'où la convergence souhaitée (en appliquant le thm de convergence dominée)

Par TCD:

$$\exists N \forall n \geq N \quad |\mathbb{E}(f(X_n + \sigma_0 Y)) - \mathbb{E}(f(X + \sigma_0 Y))| < \varepsilon$$

Alors pour $n \geq N$

$$|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon < 5\varepsilon$$

2) Moments

PROP: Soit X une v.a. réelle. Soit $K \geq 1$ et supposons que $\mathbb{E}(|X|^K) < +\infty$.
Alors φ_X est K fois dérivable, et de plus $\mathbb{E}(X^K) = i^K \varphi_X^{(K)}(0)$

PREUVE: $\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP_X(x)$

Faisons le cas où $K=1$: $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

Il s'agit d'une $\int$ à paramètre, et on veut dériver / u .

On pose $F(x, u) = e^{iux}$

Or $\frac{\partial F}{\partial u}(x, u) = ix e^{iux} \rightsquigarrow |\frac{\partial F}{\partial u}(x, u)| \leq |x|$ fonction majorante qui est P_X -intégrable et qui ne dépend pas de u .

Thm de dérivation: φ_X dérivable et $\varphi_X(u) = \int \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) dx = i \int x e^{iux} dP_X(x)$
d'où $\varphi_X'(0) = i \int x dP_X(x) = i \mathbb{E}(X)$

Ce résultat permet de trouver facilement la suite des moments.

3) Exemple

$X \sim U([-1, 1])$

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) \frac{dx}{2} = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2iu} = \frac{\sin u}{u}$$

(sin = $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$) $\rightsquigarrow \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$

$$\text{d'où } \varphi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n)! = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{1}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^1 x^{2n} \frac{dx}{2}$$

gaussienne $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\varphi_X(u) = e^{-u^2/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{u^2}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n u^{2n}}{n! 2^n}$$

$$\text{d'où } \varphi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n}{n! 2^n} = (-1)^n \mathbb{E}(X^{2n}) \quad \text{d'où } \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{n! 2^n}$$

À chaque distribution symétrique par rapport à 0 (comme $\mathcal{N}(0, 1)$) les moments impairs = 0

4) Fonctions caractéristiques et indépendance

Lemme: Soient X, Y 2 v.a. indépendantes. Alors $\forall u \in \mathbb{R} \quad \varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u) \varphi_Y(u)$

Corollaire: Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v.a. i.i.d. alors $\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(u) = (\varphi_{X_1}(u))^n$

Preuve: $\varphi_{X+Y}(u) = \mathbb{E}(e^{iu(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{iuX} e^{iuY})$
 $\stackrel{\text{indep}}{=} \mathbb{E}(e^{iuX}) \mathbb{E}(e^{iuY}) = \varphi_X(u) \varphi_Y(u)$

5) Thm Limite central

THM: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. qui admettent un moment d'ordre 2.

Posons $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Alors $\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Attention, il faut absolument centrer les v.a. en soustrayant $n\mathbb{E}(X_1) = nm$.

Par contre on peut normaliser par $\sqrt{n \text{Var}(X_1)}$, i.e. $\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n} \sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$
(+ voir démo)

Cours 11 - Le processus de Poisson

1) Rappel des lois

Loi Poisson: $X \sim P(\lambda)$ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda \quad \psi_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)])$$

Loi Géométrique: La loi géométrique de paramètre p $\text{Geo}(p)$ est la probas μ sur $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mu(\{k\}) = (1-p)^{k-1} p \quad (\text{son espérance est } 1/p \text{ et sa variance } (1-p)/p^2)$$

C'est la seule loi μ sur $\mathbb{N}^*$ tq:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mu(\{l \in \mathbb{N}; l > k\}) = (1-p)^k$$

Loi exponentielle: La loi $\text{Exp}(\alpha)$ est la loi de densité $1_{\mathbb{R}^+}(x) \alpha e^{-\alpha x}$. Son espérance est $1/\alpha$ et sa variance $1/\alpha^2$

C'est la seule probas μ sur $\mathbb{R}^+$ tq

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mu([t, +\infty[) = \exp(-\alpha t)$$

Ces 2 lois possèdent une propriété remarquable, l'absence de mémoire.

$$\text{i.e. } T \sim \exp(\lambda), \quad \forall s, t > 0 \quad \mathbb{P}(T > t+s \mid T > s) = \mathbb{P}(T > t)$$

2) Approximation Binomiale - Poisson

PROP: Soit $n \geq 1, \lambda \geq 0$. Soient $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ des v.a. i.i.d $\sim \text{Ber}(\lambda/n)$ sur $\{0,1\}$.

$$\text{Posons } N_n = X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$$

La loi de N_n est la loi Binomiale $B(n, \lambda/n)$, elle converge quand $n \rightarrow \infty$ vers $P(\lambda)$, i.e:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N_n=k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

DEM: Thm Paul-Levy: $\psi_{N_n}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(\lambda(e^t - 1))$
 $\uparrow = \psi_Y(t)$ où $Y \sim P(\lambda)$

3) Le processus de Poisson:

* Construction du modèle

On modélise des événements qui arrivent à des dates précises mais imprévisibles.

Hypothèses: i) Les conditions de l'expérience ne changent pas au cours du temps

ii) Le nombre d'impacts dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

On note: $\forall t \geq 0, N_n(t) :=$ le nombre d'impacts dans $[0, t]$

$(N(t))_{t \geq 0} \rightsquigarrow$ processus stochastique (famille de v.a. indexées par un paramètre continu)

À chaque occurrence d'un événement, on marque un impact sur l'axe des temps



Soit $n \geq 1$. On subdivise l'axe

en intervalles de longueur $1/n$: $[k/n, (k+1)/n[$; $k \geq 0$

DEF: $[k/n, (k+1)/n[$ est dit occupé s'il contient au moins un impact, vide sinon.

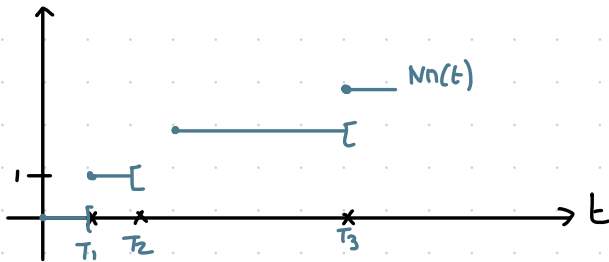
On note $N_n(t) :=$ le nb d'intervalles $[k/n, (k+1)/n[\subset [0, t]$ ($(k+1)/n \leq t$) $= \sum_{0 \leq k \leq nt} X_k^{(n)}$
 et p_n la probas qu'un intervalle $[k/n, (k+1)/n[$ soit occupé.

$i) \Rightarrow p_n$ ne dépend pas de l'intervalle
 $ii) \Rightarrow$ les états vides ou occupés sont indépendants] $N_n(t) \sim \mathcal{B}(Lnt, p_n)$

Supposons $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $np_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda$

Alors $\varphi_{N_n(u)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{\lambda(e^{iu} - 1)}$, donc $N_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} P(\lambda t)$ à t fixé
 (prop d'avant)

* Instants de saut.



$t \mapsto N_n(t)$ est une fonction aléatoire croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$
 Montrons qu'elle converge.

DEF: Les instants de sauts de $N_n(t)$ sont définis par:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, T_k^n = \inf \{ t \in \mathbb{R}^+; N_n(t) = k \}$$

$$(\Rightarrow N_n(t) = \sum_{k \geq 0} k \mathbb{1}_{[T_k^n, T_{k+1}^n[}(t))$$

PROP: $(T_1^n, T_2^n - T_1^n, \dots, T_k^n - T_{k-1}^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda)^{\otimes k}$

DEM: On examine la convergence des instants de sauts T_k^n .

Soit $i \geq 0$, soit X_k une suite de v.a. ; $k \geq 0$ tq $X_k = \begin{cases} 0 & \text{si } [k/n, (k+1)/n[\text{ vide} \\ 1 & \text{occupé} \end{cases}$

(*)

T_1 :

$$\mathbb{P}(T_1^n > i/n) = \mathbb{P}([0, i/n[, \dots, [i/n, (i+1)/n[\text{ vide})$$

$$= \mathbb{P}(X_0=0, \dots, X_{i-1}=0) = (1-p_n)^i \quad (\mathbb{P}(X_k=0) = 1-p_n, \sim \text{Ber}(p_n) \text{ i.i.d.})$$

$$\text{d'où } \forall t > 0, \mathbb{P}(T_1^n > t) = (1-p_n)^{\lfloor Lnt \rfloor} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\lambda t} \quad (T_1^n > t \Leftrightarrow N_n(t) = 0, N_n(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor Lnt \rfloor} X_k)$$

$$\text{d'où } \forall t, F_{T_1^n}(t) \rightarrow 1 - e^{-\lambda t}, \text{ donc } T_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda)$$

$T_2 - T_1$:

$$T_2^n - T_1^n \perp\!\!\!\perp T_1 \text{ et } T_2^n \stackrel{d}{=} T_1^n:$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } i, j \geq 1: \mathbb{P}(T_1^n = i/n, T_2^n - T_1^n = j/n) &= \mathbb{P}(X_0=0, X_1=0, \dots, X_{i-1}=0, X_i=1, X_{i+1}=0, \dots, X_{i+j-1}=0, X_{i+j}=1) \\ &= (1-p_n)^i p_n (1-p_n)^j p_n \\ &= \mathbb{P}(T_1^n = i/n) \mathbb{P}(T_2^n - T_1^n = j/n) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } T_1^n, T_2^n - T_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda) \otimes \text{Exp}(\lambda)$$

$$\text{Par récurrence: } (T_1^n, T_2^n - T_1^n, \dots, T_k^n - T_{k-1}^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (\text{Exp}(\lambda))^{\otimes k}$$

T.H.M.: Soient $\lambda > 0$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$.

Posons $S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$ $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$

Le processus de Poisson de paramètre λ est la fonction aléatoire définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, N(t) = \max \{n \in \mathbb{N}; S_n \leq t\}$$

