

Cours 1

- Notions:
- définition d'une tribu
 - définition d'une probabilité
 - définition d'un espace de probabilité
 - définition des tribus boréliennes, fonctions boréliennes
 - définition d'une variable aléatoire
 - définition d'une loi de variable aléatoire
 - définition de l'espérance et variance.

DEF: [Tribu] une tribu ou σ -algèbre de $\mathcal{A}$ est une collection $\mathcal{F}$ parties de $\mathcal{A}$ tq

- $\emptyset \in \mathcal{F}, \mathcal{A} \in \mathcal{F}$
- si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$ (stable par complémentaire)
- si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est aussi dans $\mathcal{F}$ (stable par union dénombrable)

DEF: [Probab] Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur $\mathcal{A}$. Une probabilité sur $\mathcal{F}$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ qui vérifie $P(\mathcal{A})=1$ et pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

DEF: [espace de probabilité]

Un espace de probas est un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ où:

- $\mathcal{A}$ est un ensemble
- $\mathcal{F}$ est une tribu sur $\mathcal{A}$
- P est une probabilité définie sur $\mathcal{F}$.

DEF: [tribu + fonction borélienne]

La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant les intervalles. Elle est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne si elle est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

DEF: [Variable aléatoire]

Une v.a. sur un espace de probabilité $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ est une application X définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est mesurable de $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

* on note $X^{-1}(B) = \{\omega \in \mathcal{A}; X(\omega) \in B\} : \{X \in B\}$

DEF: [Loi d'une variable aléatoire]

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$

La loi de X est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donnée par

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Elle est notée P_X .

DEF: [variance et espérance]

Une v.a. $X: (\mathcal{A}, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ admet une espérance (ou est intégrable) si $\int_{\mathcal{A}} |X| dP < +\infty$

Son espérance $E(X)$ est alors $E(X) = \int_{\mathcal{A}} X dP$

Et sa variance $Var(X)$ est $Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$

Cours 4

- Notions:
- définitions de convergences de v.a. (p.s., L^r, P)
 - Indépendance pour une suite infinie
 - Thm: regroupement infini par blocs

DEF: [cv] - X

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles définies sur un espace de probabilité $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$.

Soit X une v.a. définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \Leftrightarrow P\left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} \{X_m \neq X\}\right) = 0$$

Soit $r > 1$

$$X_n \xrightarrow{L^r} X \Leftrightarrow \begin{cases} E[|X_n - X|^r] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall \varepsilon > 0, \\ P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

PROP: [indépendance pour une suite infinie] X

Une suite infinie d'événements, de v.a. de sous-tribus est indépendante ssi toute sous-famille finie extraite est indépendante.

THM [Regroupement infini par blocs]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes

Soient $I_k, K \in \mathbb{N}$ des parties de $\mathbb{N}$ 2 à 2 disjointes

Alors les tribus $\mathcal{I}_K = \sigma(X_n, n \in I_K), K \in \mathbb{N}$ sont indépendantes.

Cours 5

- NOTIONS:
- définition des marches récurrentes/transientes
 - lemme de Borel-Cantelli (I et II)
 - 2 critères de récurrence

DEF: [marche récurrente]

Soit $d \geq 1$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$

La marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_0 = 0, \forall n \geq 1, S_n = X_1 + \dots + X_n$$

est dite récurrente si elle repasse par 0 une infinité de fois avec probabilité 1, transiente sinon.

* $\liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq n} A_m$

* $\limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} A_m$, c'est l'événement $\{\omega \in \mathcal{A}; \omega \text{ appartient à tous les } A_n \text{ sauf un nombre fini}\}$

X LEMME [Borel-Cantelli]

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$

I: Si la série $\sum_n P(A_n)$ converge, alors $P(A_n \text{ i.s.}) = 0$

II: Si la série $\sum_n P(A_n)$ diverge, et si les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants alors $P(A_n \text{ i.s.}) = 1$

PROP [critères de récurrence]

- $P(S_n \text{ repasse par } 0) = 1 \Leftrightarrow P(S_n \text{ visite } 0 \text{ une infinité de fois}) = 1$
- $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente dans $\mathbb{Z}^d$ ssi $\sum_{n \geq 0} P(S_n = 0) = +\infty$

Cours 2

- Notions:
- mesure de Lebesgue
 - définition d'une loi à densité
 - définition de l'espérance + variance pour les lois à densité
 - Lois uniformes, exponentielles, Gaussiennes
 - Formule de transfert

DEF: [Mesure de Lebesgue] λ

C'est l'unique mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui vérifie $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \lambda([a, b]) = b - a$

DEF: [Loi à densité] X

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne telle que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$

La loi à densité f est la mesure de probabilité μ_f sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ définie par:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(B) = \int_B f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f 1_B d\lambda \approx P_X(B) = \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) f(x) dx$$

DEF: [Espérance et variance d'une loi à densité] X

La loi de densité f admet une espérance si $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) d\lambda(x) < +\infty$

dans ce cas, son espérance est $m = \int_{\mathbb{R}} x f(x) d\lambda(x)$

et sa variance, éventuellement infinie, est $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 f(x) d\lambda(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) d\lambda(x) - m^2$$

[Lois usuelles]

Loi uniforme: La loi uniforme sur $[0,1]$ est la mesure de probabilité P sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$

[sur $[0,1]$] obtenue comme la restriction de la mesure de Lebesgue λ à $[0,1]$

$$\forall B \in \mathcal{B}([0,1]), P(B) = \lambda(B)$$

Elle est de densité $1_{[0,1]}(x) \frac{1}{b-a}$, notée $U_{[a,b]}$

Loi exponentielle ($\text{Exp}(\alpha)$): $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ si la loi P_X est la loi de densité $1_{\mathbb{R}^+} \alpha e^{-\alpha x}$

si $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ alors $E(X) = \frac{1}{\alpha}, Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

Loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$: $X \sim N(m, \sigma^2)$ si la loi P_X est la loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

dans ce cas, $E(X) = m, Var(X) = \sigma^2$

THM: [de transfert]

Soient une v.a. $X: (\mathcal{A}, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne.

Alors

$$E(f(X)) = \int_{\mathcal{A}} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_X(x)$$

(* version que moi je comprends:

si on nous demande de calculer la loi $\psi(X)$, X v.a. ($\text{ex. tan}(X)$)

où X est de densité f , i.e. $P_X(B) = \int_B f(x) d\lambda(x)$ alors $\int_{\mathcal{A}} \psi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f(x) d\lambda(x)$

i.e. $E[\psi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f(x) dx$

Cours 7

- Notions:
- définitions: tribu et événements asymptotiques
 - Loi du 0-1 de Kolmogorov
 - Inégalité de Kolmogorov
 - Props.

DEF: [tribu + événement asymptotique]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$

La tribu asymptotique de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la tribu $\mathcal{T} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$

Un événement est dit asymptotique pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il appartient à la tribu asymptotique de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

THM: [Loi du 0-1 de Kolmogorov]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$

Soit A un événement asymptotique pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $P(A)$ vaut 0 ou 1.

THM: [inégalité de Kolmogorov]

Soient $n \geq 1$ et $X_1, \dots, X_n$ n v.a. indépendantes de moyennes nulles et de variances finies.

Ponons $\forall k \in \mathbb{N}, S_k = X_1 + \dots + X_k$

Alors, $\forall \alpha > 0$

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} Var(S_n)$$

PROP: [convergence dans L²]

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. $\sim \text{Ber}(1/2)$ tq

$\forall n \geq 1, P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = 1/2$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n u_n$ cv dans L² $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ converge

[convergence de séries de v.a. indépendantes]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes tq

$\forall n \geq 1, E(X_n^2) < +\infty, E(X_n) = 0$

Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{L^2} 0 \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{p.s.} 0$$

Cours 3

- Notions:
- Tribu engendrée par une variable aléatoire
 - définition: événements, v.a., sous-tribus indépendantes
 - Définition: loi produit
 - Thm. regroupement par blocs
 - Espérance et indépendance.

DEF: [tribu d'une variable aléatoire X] X

Si $X: (\mathcal{A}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une v.a., la tribu qu'elle engendre est $\sigma(X) = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

DEF: [indépendance]

Soit $n \geq 2$

X - Les événements $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{F}$ sont indépendants si, pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

X - Les n sous-tribus $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ de $\mathcal{F}$ sont dites indépendantes si:

$$\forall A_i \in \mathcal{F}_i, \dots, \forall A_n \in \mathcal{F}_n, P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

X - Les n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ sont dites indépendantes si, pour tout boréliens $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P\left(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\right) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$$

* Les n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ où: $X_i: (\mathcal{A}, \mathcal{F}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i), 1 \leq i \leq n$ sont dites indépendantes si les tribus qu'elles engendrent, $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ sont indépendantes

DEF: [loi produit]

Pour $1 \leq i \leq n$ soit μ_i une mesure de probabilité sur $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Il existe une unique mesure de probas μ sur l'espace produit $(E_1 \times \dots \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n)$ telle que:

$$\forall A_i \in \mathcal{E}_i, \dots, \forall A_n \in \mathcal{E}_n, \mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n)$$

Cette mesure est appelée mesure produit de $\mu_1, \dots, \mu_n$ et est notée $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$

PROP: [Espérance et indépendance]

Soient X, Y deux v.a. le $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes telles que $E(|f(X)|) < +\infty, E(|g(Y)|) < +\infty$, alors $E(|f(X)g(Y)|) < +\infty$ et

X $E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \forall f_1, \dots, f_n \text{ boréliennes bornées, } E[f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)] = \prod_{i=1}^n E[f_i(X_i)] = P[A]$$

Si X, Y sont indépendantes et intégrables, alors XY est aussi intégrable et $\text{cov}(X, Y) = 0$

THM: [Regroupement par blocs]

Soient $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ n sous-tribus de $\mathcal{F}$ indépendantes

Soient I, J deux parties disjointes de $\{1, \dots, n\}$

Alors les tribus:

$$\mathcal{I} = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right), \mathcal{J} = \sigma\left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{F}_j\right) \text{ sont indépendantes.}$$

Cours 7

- Notions:
- Inégalité de Markov
 - Inégalité de Bienaymé-Chebyshev
 - Loi faible des grands nombres
 - Loi forte des grands nombres
 - ? Random Lemme ($P(|X_n| > n \text{ i.s.})$)

PROP: [Inégalité de Markov]

X Soit X une v.a. positive. Alors $\forall \lambda > 0$

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X)$$

X preuve: $\int_{\mathcal{A}} X dP \geq \int_{\{X \geq \lambda\}} X dP \geq \lambda P(X \geq \lambda) \Rightarrow P(X \geq \lambda) \leq \frac{\int_{\{X \geq \lambda\}} X dP}{\lambda} \leq \frac{E(X)}{\lambda}$ par disjonction de cas

PROP: [Inégalité de Bienaymé-Chebyshev]

Soit X une v.a. qui admet un moment d'ordre 2

Alors $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var(X)$$

THM: [Loi faible des grands nombres]

Soit μ une mesure de probas sur $\mathbb{R}$ qui admet un moment d'ordre 1.

Ponons $m = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$

Pour $n \geq 1$, soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. i.i.d. de loi μ . Alors:

$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

THM [Loi forte des grands nombres]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d., intégrables (i.e. $E(|X_1|) < +\infty$) alors:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(X_1)$$

THM [Critère de Kolmogorov]

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes centrées tq $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} E(Z_n^2)$ converge

Alors $\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

Lemme: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d.

$$E(|X_1|) < +\infty \Leftrightarrow P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right| \geq n \text{ i.s.}\right) = 1$$
$$\Rightarrow P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \text{ cv}\right) > 0 \Rightarrow E(|X_1|) < +\infty$$