

Cours 8 - Convergence en loi

Notions: - définition de la convergence en loi
 - définition fonction de répartition
 - propriétés des fonctions de répartition
 - fonctions de répartition des lois usuelles
 - convergence des fonctions de répartition

DEF: [convergence en loi] $\Delta!$ X

Soient $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ des v.a.r. (qui ne sont pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité).

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X$ ssi $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$
(il faut être intégrable) ou Markov
 $\star$ ps $\not\Rightarrow$ Lp $\Rightarrow$ proba $\Rightarrow$ loi $\sim \not\Rightarrow$ (photo)

DEF: [fonction de répartition]

Soit X une v.a. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

F_X est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

X. PROP: une fonction de répartition F vérifie:

- F est croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$
- F est continue à droite (+ dem)
- $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0, F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

PROP: si $X \sim \text{Ber}(p)$ $F_X(x) = 1 - p$

si $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$

si X densité f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

THM: [bijectivité]

L'application $\mu \in M_1(\mathbb{R}) \mapsto F_\mu(\mathbb{R})$ est une bijection

THM: [convergence des fonctions de répartition] X

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, X$ des v.a.r. et notons $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}, F_X$ les fonctions de répartition

Alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X \iff \text{en tout point } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ où } F_X \text{ est continue, } (F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } F_X, \text{ i.e. } F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_X(x)$$

Cours 11 - Le processus de poisson

Notions: - rappels des lois + notion d'absence de mémoire
 - approximation Binomiale - Poisson
 - le processus de Poisson

Rappels:

- $X \sim P(\lambda)$ si X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
 $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \lambda$ $\psi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$
- $X \sim \text{Geo}(p)$ si X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$
 $\mathbb{E}[X] = 1/p, \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $X \sim \exp(\alpha)$ densité $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ $\mathbb{E}(X) = 1/\alpha, \text{Var}(X) = 1/\alpha^2$
 $\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(T \in t, +\infty] = e^{-\alpha t}$

Absence de mémoire:

$$\forall s, t > 0 \quad \mathbb{P}(T > s+t | T > s) = \mathbb{P}(T > t)$$

THM [approximation Binomiale - Poisson] $\Delta!$

Soit $n \geq 1, \lambda \geq 0$

Soient $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ v.a. i.i.d. $\sim \text{Ber}(\lambda/n)$ sur $\{0, 1\}$

Posons $N_n := X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$

La loi de N_n est la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, elle converge quand $n \rightarrow \infty$ vers $P(\lambda)$, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

THM [processus de poisson] $\Delta!$

Soient $\lambda \geq 0, (Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$

Posons $S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, S_n := Y_1 + \dots + Y_n$

Le processus de poisson de paramètre λ est la fonction aléatoire définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}; S_n \leq t\}$$

Cours 9 - Les fonctions caractéristiques

Notions: - définition d'une fonction caractéristique d'une v.a. / mesure
 - fonctions caractéristiques des lois classiques
 - propriétés
 - Thm d'injectivité

X. DEF: [v.a.]

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Sa fonction caractéristique est: $\forall t \in \mathbb{R}, \psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\Omega} e^{itx} d\mathbb{P}$

DEF: [loi μ]

Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Sa fonction caractéristique est: $\forall t \in \mathbb{R}, \psi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$

$\sim$ Par thm de transfert, on a $\psi_X = \psi_{\mathbb{P}_X} \left(\int_{\Omega} e^{itx} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X \right)$

PROP: [Lois classiques]

- $X \sim \delta_a$ $\psi_X(t) = e^{ita}$

- $X \sim \text{Ber}(p)$ $\psi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$

- $X \sim P(\lambda)$ $\psi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$

- $X \sim \text{Geo}(p)$ $\psi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}$

- $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ $\psi_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it}$

- $X \sim \mathcal{M}([a, b])$, $\psi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\psi_X(t) = \exp[itm - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2]$

X. PROP [propriétés]:

ψ_X vérifie: i) $\psi_X(0) = 1$

ii) $\forall t \in \mathbb{R}, |\psi_X(t)| \leq 1$

iii) $\forall t \in \mathbb{R}, \psi_X(t) = \overline{\psi_X(-t)}$

iv) ψ_X est continue sur $\mathbb{R}$

X. [Fonctions caractéristiques et indépendance]:

Soient X, Y deux v.a. indépendantes. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \psi_Y(t)$

Corr: Si $X_1, \dots, X_n$ n v.a. i.i.d, alors $\psi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = (\psi_{X_1}(t))^n$

PROP: [effet d'une transformation affine]

X v.a. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

alors $\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{\alpha X + \beta}(t) = e^{it\beta} \psi_X(\alpha t)$

THM [d'injectivité]: $\Delta!$

Notons $M_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

L'application: $\mu \in M_1(\mathbb{R}) \mapsto \psi_\mu$ est injective

Q: $X \text{ var } \mapsto \psi_X \text{ inj?}$

Non: car si X, X' ont la m loi sans être les mêmes v.a.r.

on a quand même $\psi_X = \psi_{X'}$,

$\rightarrow$ Fonction caractéristique caractérise la loi

Cours 10 - Le théorème limite centrale

Notions: - thm de Paul Levy
 - définition d'un moment
 - thm limite central

THM: [Paul Levy] X

Soit $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ des v.a.r. et soit ψ_X, ψ_{X_n} leur fonction caractéristique

Alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \psi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \psi_X(t)$$

DEF [Moment]

Soit X une v.a.r. soit $k \geq 1$ et supposons que $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$

Alors ψ_X est k -fois dérivable et de plus $\mathbb{E}[X^k] = i^k \psi_X^{(k)}(0)$

THM [limite central] X

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. qui admettent un moment d'ordre 2

Posons $m := \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 := \text{Var}(X_1)$

Alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$