



TD 1

Ex.1.H

$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$ contraposée	$Q \Rightarrow P$ réciproque	$\neg P \Rightarrow \neg Q$ contraposée de la réciproque
-------------------	--	---------------------------------	--

- 3) Si max a bu, alors il ne peut pas conduire. $P \Rightarrow Q$
 Si max n'a pas bu, alors il peut conduire. $\neg P \Rightarrow \neg Q$
 Non.

Ex.2

règles de précedence: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \forall \exists$

$$A = P \wedge Q \Rightarrow R \quad B = P \Rightarrow Q \Rightarrow R$$

1) $(P \wedge Q) \Rightarrow R = A$
 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = B$

2)

4
2

P	Q	R	$P \Rightarrow Q \Rightarrow R$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
F	-	-	V	V
V	-	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V

→ équivalentes

si P est faux, les deux phrases sont toujours vraies, peut importe la valeur de vérité de Q ou R (faux $\Rightarrow$... toujours vrai)
 si R est vraie, Q peut être V ou F (V $\Rightarrow$ V ou F $\Rightarrow$ V)
 deux cas restants

Ex.1.3

1) 4 variables: B, D, C, M (ou exclusif en langage courant)

1. $(\neg B \wedge D) \Rightarrow \neg C$

2. $B \Rightarrow \neg C \wedge D$

3. $\neg M \Rightarrow (\neg C \vee M)$

4. $M \Rightarrow (C \vee B)$

5. C

2⁴ (4 variables qui vaut F ou V) = 16 situations possibles

2) a) On a C vrai (5)

Si B vrai, (2) donnerait $\neg C$, contradiction avec C.

Donc $\neg B$

b) a-t-il dormi?

Par (1) $(\neg B \wedge D) \Rightarrow \neg C$. Or $\neg B$ est vrai par la question précédente et C est vrai.

Donc D doit être faux. Donc $\neg D$

a-t-il mangé?

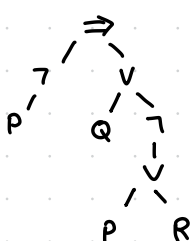
Par (3) $\neg M \Rightarrow (\neg C \vee D)$. $\neg C$ est faux et D est faux. Donc $\neg M$ est faux.

Donc M est vrai.

Ex.1.4

1) $(\neg P) \Rightarrow (Q \vee (\neg(P \vee R)))$

2)



3)

P	Q	R	$\neg P \Rightarrow Q \vee \neg(P \vee R)$
V	-	-	V
F	V	-	V
F	F	F	V
F	F	V	F

Ex. 1.5

- 1) $X \vee Y = Y \vee X$ faux (variables libres)
- 2) $X \Rightarrow Y \wedge Z = X \Rightarrow (Y \wedge Z)$ vrai (parenthésage correct)
- 3) $(X \vee Y) \wedge X \equiv X$ vrai (loi d'absorption)
- 4) $(X \wedge Y) \vee Z \equiv X \vee Z$ faux. Contre exemple: X vrai, Y faux, Z faux

A
B

 Dans ce cas, A est faux, B est vrai
- 5) $X \wedge (X \Rightarrow Y) \equiv \neg X \vee Y$ faux. ($\equiv X \wedge \neg Y$)
- 6) $\exists x: X \Rightarrow \forall y$ faux alors X est vrai. Vrai.
- 7) Si $X \vee Y$ vrai alors $\neg Y$ vrai Faux
- 8) Si X vrai alors $(\neg X) \Rightarrow Y$ est faux. Faux

F
-
F

Une formule est satisfiable s'il existe des valeurs pour les variables propositionnelles qui la rendent vraie.
 Une formule est valide si elle est vraie quelles que soient les valeurs des variables propositionnelles.

- 9) $X \Rightarrow Y$ est satisfiable Vrai
- 10) $X \Rightarrow Y$ est valide faux (si X est vrai et Y est vrai la formule n'est pas vraie)

Ex. 8:

1) nombre de variables et cardinal de $\mathcal{E}$

Chaque case p a $\max(p)$ variables $X_p^1, \dots, X_p^{\max(p)}$

Dans la grille exemple:

$$3 \times 3 + 2 \times 2 + 15 \times 5 = 88 \text{ variables propositionnelles}$$

max x nb cases

$\mathcal{E}$ contient pour chaque case p , la formule "au moins une valeur" $X_p^1 \vee \dots \vee X_p^{\max(p)}$
 donc $|\mathcal{E}| = 20$ (= nb cases)

2) "Deux cases d'une même zone ou adjacente n'ont pas la même valeur"

$(p, q) \in \text{Zone} \cup \text{Adj} \quad i \leq \max(p), i \leq \max(q)$

$$\neg(X_p^i \wedge X_q^i) \quad \text{ou} \quad X_p^i \Rightarrow \neg X_q^i$$

$\bar{m}$ nombre i
dans deux cases $p \neq q$
dans une $\bar{m}$ zone
/ zone adjacente

3) "Une case ne peut pas avoir deux valeurs différentes" $\neg(X_p^i \wedge X_p^j)$

4) a) Si une case p contient déjà le chiffre i , on ajoute X_p^i .

b) L'ensemble des formules est-il satisfiable?

(c.a.d. existe-t-il une interprétation qui rend toutes les contraintes vraies?)

5) a)

a	b
c	d

8 variables prop

zone = $\{(a, b), (c, d)\}$

adj = $\{(a, c), (a, d), (c, b), (c, d)\}$

$\max(a) = \max(b) = \max(c) = \max(d) = 2$

au moins une valeur par case:

$$\begin{aligned} X_a^1 \vee X_a^2 \\ X_b^1 \vee X_b^2 \\ X_c^1 \vee X_c^2 \\ X_d^1 \vee X_d^2 \end{aligned}$$

contraintes des zones, des adjacences:

$$\begin{aligned} \neg X_a^1 \vee \neg X_b^1 \\ \neg X_a^1 \vee \neg X_c^1 \\ \neg X_a^1 \vee \neg X_d^1 \\ \vdots \end{aligned}$$

Supposons $a=1$, donc $b=2$ car b est dans la même zone que a .

Or c et d doivent avoir une valeur 1 ou 2. Or toutes les cases sont adjacentes. c ne peut être ni 1 ni 2. Donc c n'a aucune valeur possible. Contradiction.

(variable prépositionnelle: ensemble de prédicats d'arité 0)
 (symbole de prédicat: (appartenance / égalité dans la théorie des ensembles
 arithmétique: égalité)
 P applique' à des termes $P(t_1, \dots, t_n)$
 logique 1^{er} rang $\rightarrow$ 2 catégories:
 . termes (variables, etc, symbole)
 . formules $\rightarrow$ apparaissent en argument en symbole de prédicat
 variable liée: liée à un quantificateur

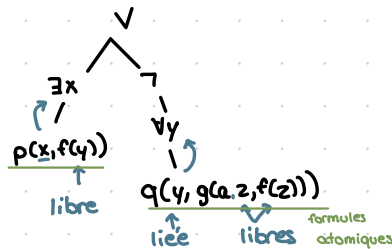
symbole - fonction: $\text{term} \rightarrow \text{term} \rightarrow \dots \rightarrow \text{term}$
 - prédicat: $\text{term} \rightarrow \text{term} \rightarrow \dots \rightarrow \text{formule}$
 et, ou, impl: $\text{formule} \rightarrow \text{formule} \rightarrow \text{formule}$
 neg: $\text{formule} \rightarrow \text{formule}$
 $\forall, \exists$: $\text{var} \rightarrow \text{formule} \rightarrow \text{formule}$

Ex 2:

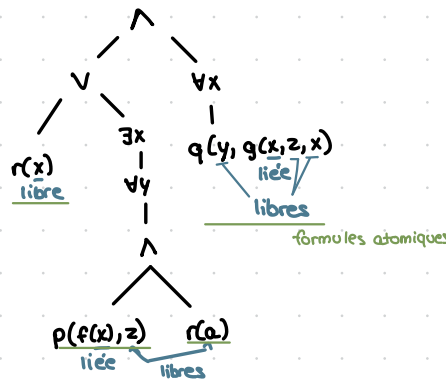
type symbf = F | A | G
 type symbp = P | Q | R
 type term = var of string
 | Fun of symbf * term list

type = Atom of symbp * term list
 | Neg of form
 | And of form * form $\rightarrow$ form
 | ...

$$F = (\exists x, p(x, f(y))) \vee \neg \forall y, q(y, g(a, z, f(z)))$$



$$G = r(x) \vee ((\exists x, \forall y, p(f(x), z) \wedge r(a)) \wedge \forall x, q(y, g(x, z, y)))$$



termes: $x, f(y), g(a, z, f(z))$

termes: $x, f(x), z, a, y, g(x, z, x)$

5) $A[x \leftarrow u]$
 ↑ un terme
 ↑ variable (pas une constante)
 ↑ formule $\Rightarrow$ remplace les variables par des termes
 (ou un terme)
 Δ : On remplace uniquement les variables libres
 . Dans F: si on substitue x par y, on a un **phénomène de capture**

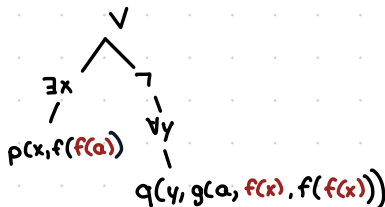
$$(\forall x. P)[x \leftarrow u] = \forall x. P$$

x n'est pas libre

$$(\forall y. P)[x \leftarrow u] = \forall y. P[x \leftarrow u]$$

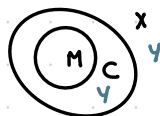
on remplace dans les autres en dessous
 Δ : $y \notin FV(u)$ (y n'apparaît pas dans les variables libres de u (sinon elle sera liée))

$$F[y \leftarrow f(a), z \leftarrow f(x)] = (\exists x, p(x, f(f(a)))) \vee \neg \forall y, q(y, g(a, f(x), f(f(x))))$$



Ex. 3.1

1) X n'aime pas la campagne $\neg C(x)$
 On déduit par **contraposée** $\neg M(x)$



2) Non (on ne peut rien déduire)

3) (a) $C \subset M$

(b) $M \subset C$ (équivalent à la phrase initiale)

(c) $C \subset M$

nom x

termes

form atomiques : $\text{Mont}(x)$, $\text{Camp}(x)$

4) phrase du logicien: $\forall x, \text{Mont}(x) \Rightarrow \text{Camp}(x)$

a) $\forall x, \neg \text{Mont}(x) \Rightarrow \neg \text{Camp}(x)$

b) $\forall x, \neg \text{Camp}(x) \Rightarrow \neg \text{Mont}(x)$

c) $\forall x, \text{Camp}(x) \Rightarrow \text{Mont}(x)$

5) négation de l'énoncé:

i) $\neg (\forall x, \text{Mont}(x) \Rightarrow \text{Camp}(x))$

ii) $\exists x, \text{Mont}(x) \wedge \neg \text{Camp}(x)$

$\neg(p \Rightarrow q) : p \vee \neg q$

Ex. 3.2

1) $\forall x, \exists y, \neg \text{joue}(x, y)$

Non car il existe qqun avec qui personne ne joue $\exists x, \forall y, \neg \text{joue}(x, y)$

2) $(\exists x y, \text{joue}(x, y)) \Rightarrow \exists z, \text{joue}(z, z)$ fausse

La réciproque est vraie (on peut choisir $x=y=z$)

3) $\forall x, \exists y, \exists z (\text{joue}(x, y) \wedge \text{joue}(x, z))$

Il faut ajouter : $y \neq z$ pour dire avec au moins deux personnes différentes

Ex. 3.3

Δ ! c'est pas $\forall x, B(x) \vee C(x)$ (faux) pas $\exists x, B(x) \Rightarrow C(x)$ (peut être trivialement vrai)

i) a) $\forall x, B(x) \Rightarrow C(x) ; \exists x (B(x) \wedge C(x))$

b) $\forall x, \exists p, q, (P(p, x) \wedge P(q, x) \wedge p \neq q) \wedge (\forall r, P(r, x) \Rightarrow (r=p) \wedge (r=q))$

(au plus deux parents: $\forall x, \exists y, z, \forall p, P(p, x) \Rightarrow p=y \vee p=z$ / $\forall x, \forall y, z, t, (P(y, x) \wedge P(z, x) \wedge P(t, x)) \Rightarrow (y=z) \vee (y=t)$)

Ex 3.3

Méthode : • écrire les variables

• écrire les formules atomiques

• dire s'il s'agit d'une implication / négation / conjonction...

• traduire l'énoncé

c) x, y enfant.

Formules atomiques $H(x), P(x, y), V(y)$

$(\text{ }) \Rightarrow H(x)$

ts les enfants de x volent

$\forall x [\forall y, ((\forall y, P(x, y) \Rightarrow V(y)) \Rightarrow H(x))]$

↑ n'importe quel dragon

('Un dragon...' $\neq \exists x$)

d) x
 y parent de x) variables

$P(y, x)$
 $B(y)$
 $B(x)$) f.a

$(\text{ }) \Rightarrow B(x)$
 x a au moins un parent bleu

Ces deux formules sont équivalentes

$\forall y, (P(y) \Rightarrow C)$
 $(\exists y P(y)) \Rightarrow C$ (C ne dépend pas de Y)

$\forall x, ((\exists y, P(y, x) \wedge B(y)) \Rightarrow B(x))$ ou: $\forall x \forall y (P(y, x) \wedge B(y) \Rightarrow B(x))$

e) $\neg (\text{ })$
↑
il existe un dragon heureux qui ne vole pas

$\neg (\exists x, B(x) \wedge V(x))$ (ou: $\forall x, H(x) \Rightarrow V(x)$)

2) a) $\forall x \forall y \forall z, V(x) \Rightarrow P(x, y) \Rightarrow P(x, z) \Rightarrow y = z$

Tout dragon qui vole a au plus un enfant

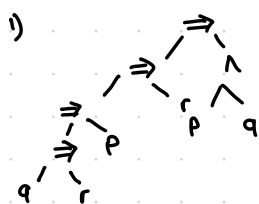
b) $\forall x, \exists y, P(x, y) \wedge H(y)$

Tout dragon a au moins un enfant heureux

c) $\exists y, \forall x, P(x, y) \wedge H(y)$

Il existe un dragon heureux qui est enfant de tous les dragons

Ex 4.1) $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)$ (D! parenthésage)



2)

P	Q	R	A
V	V	-	V
F	-	V	F
-	F	V	F
F	-	F	V
-	F	F	V

(sous la forme vrai implique faux)

(formule symétrique en P et Q)

3) A est non valide (il existe une ligne dans la table de vérité qui vaut faux)

A est satisfiable (_____ vrai)

4) $\neg A$ a un modèle?

Oui modèle de $\neg A$

→ interprétation qui rend A fausse $p \mapsto F, q \mapsto V, r \mapsto V$ (donc $\neg A$ vraie)

↳ une ligne de la table de vérité

Ex. 4.2

→ satisfiable (A) = si valide ($\neg A$) alors faux
sinon vrai

→ valide (A) = si ($\neg A$) satisfiable alors faux
sinon vrai

A est valide $\Leftrightarrow \neg A$ est insatisfiable

($\neg A$ a au moins une ligne vrai, c.à.d. A a au moins une ligne F, donc A n'est pas valide.)

Ex 4.3:

```
if p  $\Rightarrow$  q then print "a"
else if (q  $\vee$  r) then print "b"
else if ( $\neg$ p) then print "c"
else print "d"
```

1) entrées possibles 2^3 (3 variables valant vrai ou faux)

2) Le programme ne peut pas afficher c: si $\neg p$ est vraie alors $p \Rightarrow q$ est vraie.
(l'accumulation des conditions est insatisfiable)

3) ndc (D, formule) (p: programme)

renvoi vrai ssi toutes les branches de p sont accessibles pour des valeurs qui rendent D vrai

ndc D = fonction

If (C, p, p₂) → ndc(D ∧ C) p₁ && ndc(D ∧ $\neg$ C) p₂

et → Sat(D)

↑ toutes les contraintes accumulées sont satisfiables

↑ il faut que toutes les branches de p₂ soient accessibles et (D ∧ C)

Pour dire si une formule est V ou F, il faut fixer un modèle (par rapport à une interprétation)

Ex. 4.4

a) $\forall x, y, P(x, y)$ [toutes les cases sont noires]
F V F F F

b) $\exists x, y, P(x, y)$ [il existe au moins une case noire]
F V V V V

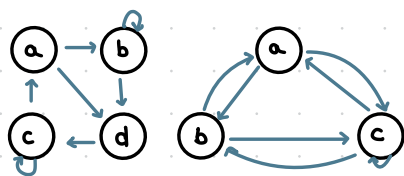
c) $\exists x, \forall y, P(x, y)$ [il existe une ligne noire]
F V V V F

d) $\exists y, \forall x, P(x, y)$ [il existe une colonne noire]
F V F F F

e) $\forall x, \exists y, P(x, y)$ [pour chaque ligne, il existe une case noire]
F V F V V

f) $\forall y, \exists x, P(x, y)$ [pour chaque colonne, il existe une case noire]
F V V F F

Ex 4.5:



F₁: $\forall x, ((\exists y, \neg R(x, y)) \Rightarrow \exists y, (R(x, y) \wedge R(y, x)))$

si il y a un noeud qui va pas vers tout le monde, il y a un aller-retour

F₂: $\forall x, \exists y, (R(x, y) \vee R(y, x))$

il y a au moins une flèche sortante de chaque noeud

F₃: $\forall x, y, z, ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$

si il y a deux flèches qui se suivent, il y a aussi une flèche directe

F₄: $\exists x, R(x, x)$

a) $R_A = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d)\}$
 $R_B = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

b)

	A	B
F ₁	F	V
F ₂	V	V
F ₃	V	F
F ₄	V	V (a,b)

Contre exemples: F₁: dans (A), a n'a pas un chemin vers soit-même mais il n'existe pas d'arrêtes entrantes à a.F₃: dans (B), on a R(a,b), R(b,a) mais on n'a pas R(a,a)2) $F_1 \Rightarrow F_2$

Soit x arbitraire. On distingue 2 cas:

- si $\forall y, R(x,y)$, en particulier il existe un y tq R(x,y) est vrai. Donc F₂ est satisfaite
- si $\exists y, \neg R(x,y)$, alors, par F₁, $\exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$. Dans ce cas, $R(x,y) \vee R(y,x)$ est vrai, donc F₂ est satisfaite

 $F_1 \wedge F_3 \Rightarrow F_4$ Par contradiction, supposons F₁ et F₃ vraies mais F₄ faux.Soit x₀ arbitraire. Par F₄, R(x₀, x₀) est faux.• Par F₁, $\exists x_1$ tq R(x₀, x₁) et R(x₁, x₀)• Par $\neg F_4$, R(x₁, x₁) est fauxdonc par F₁, $\exists x_2$ tq R(x₁, x₂) et R(x₂, x₁)Graphiquement, on obtient $x_0 \rightleftarrows x_1 \rightleftarrows x_2 \rightleftarrows \dots$

Comme l'univers est fini, à partir un certain rang on revisite des sommets qui ont déjà apparus.

Par F₄, cela crée une arête de ce sommet vers lui-même, ce qui contredit $\neg F_4$. Donc $F_1 \wedge F_3 \Rightarrow F_4$ 

Ex 4.6 p. 9

1) p [suites différentes syntaxiquement de tailles]

p ∧ p

p ∧ p ∧ p

2) 4 interprétations

3) table de vérité: 2⁴ (4 lignes à remplir)

(application dans un ensemble à deux valeurs)

4) On a 16 tables de vérité possibles

Par principe des tiroirs, deux ont la même table sur 4 entrées $\Rightarrow$ elles sont équivalentes5) Sur n variables, il y a (2^{2ⁿ}) tables de vérité possibles, il faut 2^{2ⁿ} + 1 formules pour garantir deux équivalences.

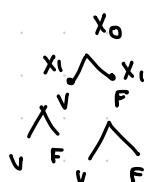
Avec n variables, on a:

2ⁿ interprétations2^{2ⁿ} tables de vérité

Ex 4.7

1) $\mathcal{E}$ insatisfiable si pour toute interprétation, $\exists$ une formule A ∈ $\mathcal{E}$, A faux ds I2) $\forall$ interprétation, il y a une formule ds l'ensemble fini qui est fausse, donc elle est fausse dans l'ensemble infini

3) si on a un nb fini de variables, on a un nb fini d'interprétations

si $\mathcal{E}$ est insatisfiable, on peut pour chaque interprétation lister une formule de $\mathcal{E}$ qu'elle falsifieun sous ensemble fini de ces formules suffit à éliminer toutes les interprétations, donc $\mathcal{E}$ est insatisfiable.4) x₀, x₁, ...

TD 4 01/10/25

Ex 5.1

NOTES: (contraintes)

$$\text{simpl}(\text{cas } l) = \text{en}$$

|

$$\text{simpl}(\text{cas } n) = \text{en}$$

cas l: cas n disjoints

cas de bases: $\perp, \top, X$

connecteurs: $A \wedge B$ (où A et B sont des méta-variables)

$$A \vee B$$

$\rightarrow$ (variables au sens mathématique)

$$A \Rightarrow B \quad A \text{ et } B \text{ représentent des formules (arbres) quelconques}$$

$$\neg A$$

1) $\text{simpl}(x \wedge y \Rightarrow z)$

$$= \neg \text{simpl}(x \wedge y) \vee \text{simpl}(z)$$

$$= \neg [\neg (\neg \text{simpl}(x) \vee \neg \text{simpl}(y))] \vee \text{simpl}(z)$$

$$= \neg \neg (\neg x \neg y) \vee z \quad \rightarrow \text{on ne retire pas } \neg \neg \text{ en travaillant sur la syntaxe}$$

- une formule de simplification (donne une formule équivalente) $\rightarrow$ pas de $\Rightarrow, \wedge$, top ou bottom

2) $\text{ht}(P) = 0$ si P atomique $\perp, \top, X$

$$\neg \text{ ht}(\neg P) = 1 + \text{ht}(P)$$

$$P \quad \text{ ht}(P \circ Q) = 1 + \max(\text{ht}(P), \text{ht}(Q))$$

$$\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ P \quad Q \end{array} \quad \circ \in \{ \vee, \wedge, \Rightarrow \}$$

3) démontrer par récurrence sur la hauteur d'une formule P que $\forall P$, $\text{simpl}(P)$ ne contient pas le symbole $\Rightarrow$

Montrons $\phi(n) \equiv$ Pour tout P, si $\text{ht}(P) \leq n$ alors $\Rightarrow \notin \text{simpl}(P)$
 $\text{cas } n=0$

• cas de base $\phi(0)$

$$P, \text{ ht}(P) \leq 0 \text{ donc } \text{ht}(P) = 0$$

donc P atomique

$$P = \top \quad \text{simpl}(P) = a \vee \neg a \text{ ok}$$

$$= \perp \quad = \neg(a \vee \neg a) \text{ ok}$$

$$= X \quad = X \text{ ok}$$

• On suppose $\phi(n)$ vrai. Montrons $\phi(n+1)$. P, si $\text{ht}(P) \leq n+1$ alors $\Rightarrow \notin \text{simpl}(P)$

P atomique $\rightarrow$ ok (cas de base)

$$\neg P \text{ alors } \text{ht}(P) \leq n. \text{ Donc } \Rightarrow \notin \text{simpl}(P) \quad \text{simpl}(\neg P) \Rightarrow \text{simpl}(P)$$

$$\text{ht}(P \circ Q) \leq n+1 \text{ alors } \text{ht}(P) \leq n \quad \text{donc HA} \Rightarrow \Rightarrow \notin \text{simpl}(P) \quad \text{simpl}(Q)$$

$$\text{ht}(Q) \leq n$$

on regarde $\text{simpl}(P \wedge Q)$

$$(P \vee Q)$$

$(P \Rightarrow Q)$ et on conclut ...

4) récurrence structurelle

On peut mq:

a) $\phi(P)$ est vérifiée lorsque P est une formule atomique en particulier $\phi(\top)$ et $\phi(\perp)$

b) Pour une formule propositionnelle A quelconque, en supposant que $\phi(A)$ est vérifiée on peut montrer $\phi(\neg A)$

c) Pour des formules propositionnelles A et B quelconques, en supposant que $\phi(A)$ et $\phi(B)$ sont vérifiées, on peut montrer $\phi(A \wedge B)$, $\phi(A \vee B)$ et $\phi(A \Rightarrow B)$

Alors on peut déduire que $\forall P \in \text{PROP}$, $\phi(P)$ est vérifiée

$$\bullet \phi(P) \Rightarrow \not\equiv \text{simpl}(P)$$

$$X: \text{simpl}(X) = X \quad \text{OK}$$

$$T: \text{simpl}(T) = a \vee \neg a \quad \text{OK} \Rightarrow \not\equiv \text{simpl}(P) \text{ si } P \text{ est atomique}$$

$$\perp: \text{simpl}(\perp) = \neg(a \vee \neg a) \quad \text{OK}$$

$$\neg P: \neg \text{simpl}(P) \text{ par HR} \Rightarrow \not\equiv \text{simpl}(P) \text{ donc OK}$$

$$P \wedge Q: \neg(\neg \text{simpl}(P) \vee \neg \text{simpl}(Q)) \text{ par HR} \Rightarrow \not\equiv \text{simpl}(P)$$

$$P \vee Q: (...) \Rightarrow \not\equiv \text{simpl}(Q)$$

$$P \Rightarrow Q:$$

(explicité la formule à démontrer
bien distinguer les cas + où utiliser les HR
traiter tous les cas)

Ex 5.2:

$$1) P \wedge \neg Q$$

$$2) a) \neg(T) = \perp \quad \neg(\neg \perp) = T \quad \neg(P) = \neg P$$

$$\neg(\neg A) = A \quad \neg(A \wedge B) = \neg(A) \vee \neg(B) \quad \neg(A \vee B) = \neg(A) \wedge \neg(B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = (\neg(\neg A)) \wedge (\neg(B)) = A \wedge \neg(B)$$

$$(\neg P) \Rightarrow (Q \vee \neg(P \vee R))$$

$$\neg[(\neg P) \Rightarrow (Q \vee \neg(P \vee R))] = \neg P \wedge \neg(Q \vee \neg(P \vee R))$$

Cette formule est vraie pour P faux, Q faux et R vrai

$$b) c) \text{ Montrons } \phi(P) := \forall P, \neg \neg(P) = P$$

(premier = : définition de neg)

cas de bases $\perp: \neg \neg(\perp) = T \equiv \neg \neg \perp \quad \text{OK}$

$$T: \neg \neg(T) = \perp \equiv \neg \neg T \quad \text{OK}$$

$$X: \neg \neg(X) = X \quad \text{OK}$$

$$\neg P: \neg \neg(\neg P) = P \stackrel{\text{HR}}{=} \neg(\neg P) \quad \text{OK}$$

$$P \wedge Q: \neg \neg(P \wedge Q) = \neg \neg(P) \vee \neg \neg(Q) \stackrel{\text{de Morgan}}{=} (\neg P) \vee (\neg Q) = \neg(P \wedge Q) \quad \text{OK}$$

$$P \vee Q: \neg \neg(P \vee Q) = \neg \neg(P) \wedge \neg \neg(Q) \stackrel{\text{HR}}{=} (\neg P) \wedge (\neg Q) = \neg(P \vee Q) \quad \text{OK}$$

$$P \Rightarrow Q: \neg(P \wedge \neg Q) \stackrel{\text{HR}}{=} \neg P \vee Q = \neg(P \wedge \neg Q) \quad \text{OK}$$

Ex 5.4:

f binaire, g unaire, a constante, R symbole de prédicat binaire

$\Rightarrow \text{xin } t \text{ q } \text{xin}(P, x) = \text{vrai si } x \text{ est libre dans } P$

faux sinon

$$\text{xin}(\perp, x) = \text{faux}$$

$$\text{xin}(T, x) = \text{faux}$$

$$\text{xin}(R(t, u), x) = \text{xin}(t, x) \vee \text{xin}(u, x)$$

$$\text{xin}(A \circ B, x) = \text{xin}(A, x) \text{ ou } \text{xin}(B, x)$$

$$\text{xin}(\neg A, x) = \text{xin}(A, x) \quad \text{car } x \text{ ne sera jamais libre dans } \neg A$$

$$\text{xin}(\forall y. A, x) = (y \neq x) \wedge \text{xin}(A, x)$$

$$\text{xin}(\exists y. A, x) = (y \neq x) \wedge \text{xin}(A, x)$$

↪ fonction auxiliaire qui prend un terme au lieu d'une formule

$$\text{xint}(y, x) = y = x$$

$$\text{xint}(a, x) = \text{faux} \quad (x \text{ n'apparaît pas dans } a)$$

$$\text{xint}(g(t), x) = \text{xint}(t, x)$$

$$\text{xint}(f(t, u), x) = \text{xint}(t, x) \vee \text{xint}(u, x)$$

Ex 5.5:

$$1) R(x, g(y)) [x \leftarrow f(a, g(y)), y \leftarrow x]$$

$$= R(f(a, g(y)), g(x))$$

$$[x \leftarrow y, y \leftarrow x]$$

$$2) R(x, g(y)) [x \leftarrow f(a, g(y)) [y \leftarrow x]]$$

$$= R(f(a, g(y)), g(y)) [y \leftarrow x]$$

$$= R(f(a, g(x)), g(x))$$

$$3) \forall x, R(x, g(y)) [y \leftarrow g(z)]$$

$$= \forall x, R(x, g(g(z)))$$

$$4) \forall x, R(x, g(y)) [y \leftarrow g(x)]$$

$$\forall x', R(x', g(g(x)))$$

on change le nom pour éviter la capture

$$5) \forall x, R(x, g(y)) [x \leftarrow z]$$

$$\leadsto \forall x, R(x, g(y)) \text{ (on ne fait rien)}$$

$$= \forall z, R(z, g(y))$$

$$6) \forall x, R(x, g(y)) [x \leftarrow y]$$

$$= \forall x, R(x, g(x))$$

$$\neq \forall y, R(y, g(y))$$

Ex. 5.3

1) sous formules de $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$

- p, q, r
- $q \wedge r, p \vee (q \wedge r), \neg(p \vee (q \wedge r))$
- $p \wedge q$
- $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$

2) sf $PROP \rightarrow \wp(PROP)$ (à une formule P associe l'ensemble de ses sous formules)

$sf(P) = \{p\}$ si p formule atomique

$sf(\neg P) = \{\neg P\} \cup sf(P)$

$sf(P \circ Q) = sf(P) \cup sf(Q) \cup \{P \circ Q\}$ où $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

3) Trouver un majorant du nombre de sous-formules d'une formule P qui utilise n connecteurs logiques

$|sf(P)| \leq 2n+1$ (et ce majorant est atteint quand P n'emploie que des connecteurs binaires et que toutes les variables feuilles sont distinctes).

[idée: chaque nœud de l'arbre syntaxique d'une formule correspond à une sous formule.

Si n est le nombre de connecteurs et m le nombre de formules atomiques (feuilles), alors le nombre total de nœuds vaut $n+m$)

avec seulement des binaires, un arbre 'plein' a $m = n+1$ feuilles $\Rightarrow$ total = $n+(n+1) = 2n+1$)

Preuve par récurrence:

$\Phi(P)$: si P a n connecteurs alors $|sf(P)| \leq 2n+1$

$\rightarrow sf(P) = \{p\}$ si P formule atomique

donc $|sf(p)| = 1 \leq 2 \cdot 0 + 1$

$\rightarrow sf(\neg P) = sf(P) \cup \{\neg P\}$

donc $|sf(\neg P)| \leq |sf(P)| + 1 \leq 2n+2 \leq 2(n+1)+1$

$\uparrow$ si P a n connecteurs par HR $|sf(p)| \leq 2n+1$
 $\neg P$ a $n+1$ connecteurs

$\rightarrow sf(Q \circ R) = sf(Q) \cup sf(R) \cup \{Q \circ R\}$

donc $|sf(Q \circ R)| \leq (2|Q|+1) + (2|R|+1) + 1$ par HR

$\leq 2(|Q| + |R|) + 3$

$(=) \leq 2(|Q \circ R|) + 1$

TD 6

NOTES:

$$\begin{array}{l} \forall x, x = x \\ \forall x, y, x = y \Rightarrow y = x \\ \forall x, y, z, x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{relation} \\ \text{d'équivalence} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall x, y, x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \\ \forall x, y, x = y \Rightarrow P(x) \Rightarrow P(y) \end{array}$$

$$D = {}_I C D \times D$$

Ex 6.1: On se donne un langage avec un symbole de prédicat binaire + les axiomes de la théorie de l'égalité)

1) domaines qui ont moins de n elts. axiomes à ajouter?

pour $n=3$: $\forall x_1, x_2, x_3, x_4$ (si on prend 4 elts, forcément 2 sont égales)

$$x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_1 = x_4 \vee x_2 = x_3 \vee x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4$$

pour n : $\forall x_1, \dots, x_{n+1}, \bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j$ au plus n elts

vraie exactement dans les modèles équationnels avec moins de n éléments

2) plus de n éléments ($> n$)

$\exists x_1, \dots, x_n, \bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j$ au moins n elts

exactement n elts: 2 axiomes ou: $\exists x_1, \dots, x_n, (\bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j \wedge \forall z, \bigvee_{1 \leq i \leq n} z = x_i)$

Ex. 6.2:

Théorie des entiers de Peano (langage avec une constante 0, un symbole de fonction unaire S et un prédicat binaire pour l'égalité)
axiomes:

$$\forall x, y, x = y \Rightarrow S(x) = S(y)$$

$$\forall x, 70 = S(x)$$

$$\forall x, y, S(x) = S(y) \Rightarrow x = y \text{ [injectivité]}$$

1) Mq tout modèle de ces formules a un

$$N, 0_N \in N, S_N : N \rightarrow N \text{ injective}$$

0 n'a pas d'antécédent, or S_N est injective, donc N est un ensemble infini

[Thm de Cantor]

$$\begin{aligned} \text{ou bien: } \{ S_N^K(0_N) \in N \mid K \in \mathbb{N} \} &\subseteq N \\ S_N^K(0_N) &= S_N^{K+p}(0_N), p > 0 \\ 0_N &= S^p(0_N) = S(S^{p-1}(0_N)) \end{aligned}$$

2) si on retire le premier axiome? non $\circ \xrightarrow{S} \circ$

3) si on garde le premier et on retire le second? non $\circ \rightarrow i \xrightarrow{S} i \xrightarrow{S} \dots \xrightarrow{S} \text{fini}$

4) on rajoute les deux axiomes $S(0) = 1 \sim S$ n'est pas injective
 $S(1) = 1$ mais $S(0) \neq 0$

Ex 6.3

5) $c_1, \dots, c_n$
 $\{ c_i \neq c_j \mid i < j \}$ [infinité de cte + axiomes]

$\leadsto$ domaine infini

[on utilise la contraposée du thm de compacité]

Théorie + $(c_i \neq c_j)_{i < j \in \mathbb{N}}$

$\leadsto$ Mq c'est un modèle

$$A_{\text{fini}} \subseteq \text{Th} + (c_i \neq c_j)_{i < j \in \mathbb{N}}$$

$$A \subseteq \text{Th} + (c_i \neq c_j)_{i < j \in \mathbb{N}}$$

$\downarrow$ modèle

$$M_K \quad K \geq N$$

M_K est bien un modèle de (1)

$\leadsto$ l'ensemble infini du domaine infini de modèles

Ex 6.6

P, Q prédicats unaires

Signature monadique

Soit A une formule, I interprétation de domaine D

$$\forall d \in D, \tau(d) = \left(\text{val}(x \mapsto d, P(x)), \text{val}(x \mapsto d, Q(x)) \right)$$

1) P : "être un entier pair"

Q : "être un multiple de 3"

$$\tau(1) = (F, F) \quad \tau(4) = (V, F)$$

$$\tau(2) = (V, F) \quad \tau(5) = (F, F)$$

$$\tau(3) = (F, V) \quad \tau(6) = (V, V)$$

2) 4 valeurs différentes

min: 1, max: 4 [dans le cas d'une interprétation quelconque]

3) $d \approx d'$ ssi $\tau(d) = \tau(d')$ entre 2 elts de D

$$l \approx l' \text{ ssi } l(x) = l'(x)$$

$$\text{Mq } \forall A, \forall l, l' \quad l \approx l' \Rightarrow \text{val}(l, A) = \text{val}(l', A) \quad (\text{valeur} \rightsquigarrow \text{sémantique})$$

récurrence sur la formule A :

$$\begin{array}{c} \text{cas à traiter} \\ \left(\begin{array}{c} \forall x, A \quad \neg A \\ A \wedge B \quad P(x), Q(x) \end{array} \right) \end{array}$$

1) identifier les cas à traiter

$$\Phi(A): l \approx l' \Rightarrow \text{val}(l, A) = \text{val}(l', A)$$

* cas de bases:

$$- P(x): l \approx l'$$

$$\text{val}(l, P(x)) = \text{val}(l', P(x))$$

$$l(x) \approx l'(x) \text{ vrai par définition de } \approx$$

$$Q(x): \text{dem}$$

$$* \neg A \quad l \approx l' \quad \text{val}(l, \neg A) = \text{val}(l', \neg A)$$

$$\text{par HR, } \text{val}(l, A) = \text{val}(l', A)$$

$$A \wedge B: \text{de } \bar{m}$$

$$\forall x, A \quad \text{val}(l, \forall x, A) = \text{val}(l', \forall x, A)$$

$$\text{val}(l + (x \mapsto d), A) = \text{val}(l' + x \mapsto d, A)$$

$$\text{HR appliquée à } l + (x \mapsto d) \approx l' + (x \mapsto d)$$

$\rightsquigarrow$ reste des cas: lois de Morgan.

4) $I', D' \subseteq D$ forme exactement d'un élément de D dans chaque classe d'équivalence, c.à.d.:

$$\forall d \in D, \exists d' \in D' \text{ tq } d \approx d'$$

$$\forall x, y \in D', \text{ si } x \approx y \text{ alors } x = y$$

$$d) \Phi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pour tout } l', \text{val}_{I'}(l', A) = \text{val}_I(l', A)$$

$$\text{f.o.} \rightsquigarrow P(x): \text{vrai ssi } l'(x) \in P_{I'} \text{ (interprétation de } P \text{ dans } I')$$

$$\text{ssi } l(x) \in P_{I'} = P_I|_{D'}$$

$$\text{val}_{I'}(l', \forall x, A) \text{ V ssi pour tout } d \in D, \text{val}_I(l' + x \mapsto d, A) \text{ Vrai}$$

$$\text{il existe } d' \in D \text{ tel que } d \approx d' \parallel \leftarrow \text{on utilise}$$

$$\bullet \text{val}_{I'}(l' + x \mapsto d', A) \stackrel{\text{HR}}{=} \text{val}_I(l' + x \mapsto d', A)$$

Ex 6.6:

$IF(P, Q, R)$

$\leadsto PROP_{IF}$ l'ensemble des formules construites

valeur $IF(P, Q, R)$ = valeur Q si P vrai
 R sinon

- 1) $\neg P: IF(P, \perp, T)$
 $P \wedge Q: IF(P, Q, \perp)$
 $P \vee Q: IF(P, T, Q)$
 $P \Rightarrow Q: IF(P, Q, T)$

2) $valIF(I, P) = V/F$ ^(ligne de la table de vérité)

$$valIF(I, X) = I(X)$$

$$valIF(I, T) = V$$

$$valIF(I, \perp) = F$$

$$valIF(I, IF(A, B, C)) = \text{si } valIF(I, A) = V \text{ alors } valIF(I, B) \text{ sinon } valIF(I, C)$$

3) $M_q IF(IF(P, Q, R), S, T)$ et $IF(P, IF(Q, S, T), IF(R, S, T))$ sont équivalentes
 si P vrai $\downarrow IF(Q, S, T)$ $\downarrow IF(Q, S, T)$

4) norm

$\leadsto norm(P)$ renvoie une formule équivalente dans laquelle toute expression de la forme $IF(P, Q, R)$ tq P variable propositionnelle

$\leadsto IF_n(P, Q, R)$

$\nearrow$ forme normale

$$norm(X) = X$$

$$norm(\perp) = \perp$$

$$norm(T) = T$$

$$norm(IF(A, B, C)) =$$

$$IF_n(A, norm(B), norm(C))$$

$$IF_n(X, Q, R) = IF(X, Q, R)$$

$$IF_n(\perp, Q, R) = R$$

$$IF_n(T, Q, R) = Q$$

$$IF_n(IF(A, B, C), Q, R) = IF_n(A, IF_n(B, Q, R), IF_n(C, Q, R))$$

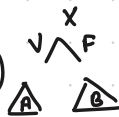
Ex 6.7

1) $vald(I, bool(b)) = b$

$$vald(I, IF(x, P, Q)) = \text{si } I(x) = V \text{ alors } vald(I, P) \text{ sinon } vald(I, Q)$$

2) $form(Bool(b)) = \text{si } b \text{ alors } T \text{ sinon } \perp$

$$form(IF(x, A, B)) = (x \wedge form(A)) \vee (\neg x \wedge form(B))$$



3) $not(b) = !b$

$$not(IF(x, P, Q)) = IF(x, not P, not Q)$$

4) $Bool(b)$

$$IF(x, P, Q)$$

$$and(b_1, b_2) = b_1 \wedge b_2$$

$$and(b, IF(x, P, Q)) = IF(x, and(b, P), and(b, Q))$$

$$and(IF(x, P, Q), b) = IF(x, and(P, b), and(Q, b))$$

$$and(IF(x, A, Q), IF(y, R, S)) =$$

$$\text{si } x < y \text{ } IF(x, and(P, IF(y, R, S)), and(Q, IF(y, R, S)))$$

$$\text{si } x = y \text{ } IF(x, and(P, R), and(Q, S))$$

$$\text{si } x > y \text{ } \text{symétrique du 1er cas}$$

Exercice 1:

[Domaine de Herbrand fixe le domaine
ne fixe pas si les prédicats sont V ou F]

mq formule universelle satisfiable $\leadsto$

il existe un modèle de Herbrand dans lequel la formule est vraie.

$$1) \forall x, (P(x) \wedge Q(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg Q(b)))$$

Signature

- termes a, b

- prédicats P, Q

(2^{|base|} modèles de Herbrand)

Dom. H termes clos

$$D_H = \{a, b\}$$

Base H form. atom. close

$$B_H = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$$

2⁴ modèles de Herbrand

non satisfiable: $P(a), P(b), Q(a), Q(b) \vee \forall x P(x) \wedge Q(x)$

alors $\neg P(a) \vee \neg Q(b) \text{ F}$

donc formule fausse

fausse ds tous les modèles de Herbrand $\leadsto$ non satisfiable

$$2) \forall x, ((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(b))$$

satisfiable: $P(a) \text{ F}, Q(b) \text{ F}, P(b) \text{ V}, Q(a) \text{ V}$

$$3) \forall x, (P(x) \wedge \neg P(x))$$

Signature

- termes f

- prédicats P

ajout d'une constante a

$$D_H = \{a, f(a), \dots, f^n(a), \dots\}$$

$$B_H = \{P(a), P(f(a)), \dots, P(f^n(a)), \dots\}$$

$$\begin{aligned} & \vee \\ & - P(a) \wedge \neg P(f(a)) \quad \text{F} \\ & - P(f(a)) \wedge \neg P(f(f(a))) \quad \text{F} \\ & \leadsto \text{non satisfiable} \end{aligned}$$

$$4) \forall x, y, z, (R(x, s(x)) \wedge (R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \wedge \neg R(x, x))$$

$$D = \{s^n(a); n \in \mathbb{N}\}$$

$$B_H = \{R(s^i(a), s^j(a)); i, j \in \mathbb{N}\}$$

satisfiable:

[$D = \mathbb{N}$ $R = \{(n, m); n < m\}$] (non reflexive, transitive, et $n < n+1$) $\swarrow$ successeur

$$R_H = \{R(s^i(a), s^j(a)); i < j\}$$

Exercice 1.2:

$$1) \{ \forall x, (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)); \neg P(a); \neg Q(b); \neg R(c) \}$$

$$D_H = \{a, b, c\}$$

$$\text{satisfiable: } P(a) \text{ F} \quad \downarrow \text{car } \neg P(a) \quad Q(a) \text{ V}$$

$$Q(b) \text{ F} \quad \downarrow \text{car } \neg Q(b) \quad P(b) \text{ V} \quad + \dots \text{ (le reste V ou F)}$$

$$R(c) \text{ F} \quad \downarrow \text{car } \neg R(c) \quad P(c) \text{ V}$$

2) $\{ \forall x, P(x); \forall x, \neg Q(x); \forall x, (\neg P(f(x)) \vee Q(f(x))) \}$

(a) $\forall a$

$D_H = \{ f^n(a); n \in \mathbb{N} \}$

$P(f^n(a)) \vee (\forall x, P(x))$

$Q(f^n(a)) \wedge (\forall x, \neg Q(x))$

$\rightarrow$ mais alors $\neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)) \wedge F$

donc $\forall x, \neg P(f(x)) \wedge Q(f(x)) \wedge F$

non satisfiable

3) insatisfiable: $P(f(a))$ à cause de la 1^{ère} formule
 $\neg P(f(a))$ à cause de la seconde

2 Formes normales

Exercice 2.1 On reprend le type Ocaml vu en cours pour représenter les formules propositionnelles

`type connecteur = Impl | Et | Ou`

`type form = Var of int | Bot | Top`

`| Neg of form | Bin of form * connecteur * form`

Compléter les fonctions suivantes afin d'implémenter les fonctions `clauseb` et `fnfb` qui testent respectivement si une formule est une clause et si une formule est en forme normale conjonctive.

```
let rec clauseb = function
  Var n -> true
| Bot
| Top -> true
| Neg f -> match f with var_ -> true
| Bin(f, Or, g) -> clauseb f || clauseb g
| Bin(f, Et, g) -> false
| Bin(f, Impl, g) -> false
```

```
let rec fnfb = function
  Var n -> true
| Bot
| Top -> true
| Neg f -> match f with var_ -> true
| Bin(f, Ou, g) -> clauseb f || clauseb g
| Bin(f, Et, g) -> fnfb f || fnfb g
| Bin(f, Impl, g) -> false
```

```
let rec fnfb f =
  clauseb f ||
  match f with
  Bin(f, Et, g) -> fnfb f et fnfb g
  _ -> false
```

1

Ex2.2

1) $p \wedge q$	2) $p \vee \neg q$	3) $\neg(p \vee q)$	4) $p \wedge q \vee r$	5) $(p \wedge q) \vee r$
clause x	clause ✓	clause x	clause x	clause x
FNC ✓	FNC ✓	FNC x	FNC x	FNC x
FND ✓	FND ✓	FND x	FND ✓	FND ✓

Ex2.3

DNF: lignes où $P = T$ ($\vee$)

CNF: lignes où $P = \perp$ ($\wedge$)

P: CNF: (je ne suis pas dans les lignes faux)

$(\neg a \wedge \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c)$

pas 2

pas 4

DNF: ligne 1 $\vee$ ligne 3 $\vee$ ligne 5 $\vee$ ligne 7 $\vee$ ligne 8

$a \wedge c$

$\neg a \wedge \neg b$

← factorisations possibles

$\rightarrow (a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

(FND: exponentiellement plus grand)

Ex. 2.4:

(mettre sous FNC + FND + donner un modèle)

1) 2)

$$a) (\neg p \vee \neg q \vee r) \Rightarrow (r \vee s)$$

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \vee s) \quad \text{FND}$$

$$(p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg r \vee r \vee s) \quad \text{FNC}$$

$$\sim \text{simplifier } (p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s) \quad \text{T}$$

① forme normale de négation

② FNC? FND

sinon $\rightarrow$ faire la distributivité

$\downarrow$ n'importe quelle interprétation rend la formule vraie
3 variables $\rightarrow 2^3 = 8$ modèles

modèle: $r \vee$ (8 modèles)

$r \vee s \vee$ (4 modèles)

$r \vee s \vee p \vee q \vee$ (1 modèle)

$$b) p \Rightarrow ((\neg q \vee r) \Rightarrow s)$$

(d) (e) à faire

$$p \Rightarrow (q \wedge \neg r) \vee s$$

$$\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee s \quad \text{FND}$$

$$(\neg p \vee q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \quad \text{FNC}$$

modèles: $s \vee \rightarrow 8$

$s \vee p \vee \rightarrow 4$

$s \vee p \vee q \vee r \vee \rightarrow 1$

$$c) \neg(p \vee \neg q) \wedge (q \Rightarrow (p \vee r))$$

$$(\neg p \wedge q) \wedge (\neg q \vee p \vee r) \quad \text{FNC}$$

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge q)$$

$$* r \wedge \neg p \wedge q \quad \text{FND (et aussi FNC)}$$

modèles: 1 seul modèle $p \vee q \vee r \vee$

3) - oui (3)^{*}

- non (3)

- non

$$\bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge b_i)$$

$$(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)$$

$$(a_1 \vee a_2 \vee a_3)$$

$$\wedge (a_1 \vee a_2 \vee b_3) \quad \sim 2^3$$

$$\wedge (a_1 \vee b_2 \vee a_3)$$

$\vdots$

TD 8

Ex 3.1

1) Combien de fonctions booléennes (n v.a. propositionnelle $x_1, \dots, x_n$)

$n=3$: TV a 2^3 lignes

fonction lignes $\rightarrow \{V/F\}$
 $2^{2^3} = 2^8$

n : 2^n interprétations (ligne TV)
 2^{2^n} tables de vérité

2) Mq: si C contient deux littéraux qui partent sur la même variable propositionnelle alors $\exists C'$ plus courte avec la m. TV

x : $x \vee x \vee C \rightarrow x \vee C$
 $x \vee \neg x \vee C \rightarrow T$
 $\neg x \vee x \vee C \rightarrow T$
 $\neg x \vee \neg x \vee C \rightarrow \neg x \vee C$

3) Combien de clauses différentes réduites peut-on construire qui n'ont pas la m. TV?

n'apparaît pas dans la clause $x \sim x \in C \quad T$
 apparaît de manière positive $\neg x \in C$
 apparaît de manière négative $x, \neg x \notin C$
 3 possibilités
 $\sim 3^n + 1$
 $\uparrow T$

4) $C \neq D$ et $D \neq T$, comparer l'ensemble des littéraux de C et ceux de D

$C \models D$ si $\tilde{C} \subseteq \tilde{D}$ (littéraux C)

si $\tilde{C} \neq \tilde{D}$ alors $TV(C) \neq TV(D)$

$\left| \begin{array}{l} x \in \tilde{C} \\ x \notin \tilde{D} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{int } i \in \tilde{D} \text{ faux} \\ \neg x \in \tilde{D} \end{array} \left| \begin{array}{l} x' = x \vee \{x \rightarrow V\} \\ \left[\begin{array}{l} x' \models D \\ x' \models C \end{array} \right] \end{array} \right.$

5) C réduite littéraux sur n variables. Combien de lignes de la table de vérité ont la valeur vrai?

une ligne F donc 2^{n-1}

6) C réduite comporte p des n variables. //

C p variables

1 manière de fixer les valeurs des p var pour rendre C faux

n-p autres variables prennent n'importe quelle valeur

2^{n-p} int. rendent C faux

$\sim 2^n - 2^{n-p} = 2^{n-p}(2^p - 1)$

Ex 3.2:

1) $P \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (\neg a_3 \wedge (b_3 \vee (a_4 \wedge b_4))) \vee \neg a_5$

clause $\sim V(\text{ensemble de littéraux})$

FNC $\sim \bigwedge(\text{ensemble de clauses})$

$\{ x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg a_5, \neg x_1 \vee a_1, \neg x_1 \vee \neg b_1, \neg x_2 \vee a_2, \neg x_2 \vee b_2, \neg x_3 \vee \neg a_3, \text{clause } [\neg x_3 \vee (b_3 \vee (a_4 \wedge b_4))] \}$

$\hookrightarrow$

$\neg x_3 \vee b_3 \vee x_4$

$\neg x_4 \vee a_4$

$\neg x_4 \vee b_4$

$\Rightarrow \{ x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg a_5, \neg x_1 \vee a_1, \neg x_1 \vee \neg b_1, \neg x_2 \vee a_2, \neg x_2 \vee b_2, \neg x_3 \vee \neg a_3, \neg x_3 \vee b_3 \vee x_4, \neg x_4 \vee a_4, \neg x_4 \vee b_4 \}$

2) L'algorithme se termine ?

[trouver une fonction décroissante]

→ nombre de $\wedge$ décroît strictement

3) Mq si $\text{clause}(P)$ est vraie pour une interprétation I alors P est aussi vraie pour cette interprétation
 si P est vraie pour I alors $\exists I'$ qui coïncide avec I sur les variables de P et pour laquelle $\text{clause}(P)$ est vraie
 ($I \models \text{ssi}$ pour tout $C \in I \models C$)

si $I \models \text{clause}(P)$ alors $I \models P$

$\text{clause}(P) \models P$

- $P = P_1 \wedge P_2$

Supposons $I \models \text{clause}(P_1) \cup \text{clause}(P_2)$ et montrons que $I \models P_1 \wedge P_2$

de $I \models \text{clause}(P_1) \cup \text{clause}(P_2)$ on déduit $I \models \text{clause}(P_1)$

par HR $I \models P_1$ de m $I \models P_2$

- P clause trivial donc $I \models P_1 \wedge P_2$

- $P = \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \vee (P_1 \wedge Q_1) \vee \dots \vee (P_p \wedge Q_p)$

Hypothèse: $I \models \{ \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \vee x_1 \dots x_p \} \cup \bigcup_{i=1-p} \text{clause}(\neg x_i \vee R_i) \cup \bigcup_{i=1-p} \text{clause}(\neg x_i \vee Q_i)$

Montrer: $I \models P$

$I \models \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \vee x_1 \dots x_p$

on a $I \models \ell_i \vee \dots \vee \ell_n$

si $I \models \ell_i$ alors $I \models P$

sinon $I \models x_i$ on a aussi $I \models \text{clause}(\neg x_i \vee R_i)$

par HR $I \models \neg x_i \vee R_i$

$I \models \neg x_i$

on a $I \models R_i$

de m $I \models Q_i$

donc $I \models P$.

Réciproque:

si $I \models P$, alors $\exists$ des valeurs de x_i (I' les interprétations de x_i) tq $I, I' \models \text{clause}(P)$

* si $P = P_1 \wedge P_2$

Hypothèse: $I \models P_1 \wedge P_2$

Trouver I' tq $I, I' \models \text{clause}(P_1) \cup \text{clause}(P_2)$

$I_1 \models P_1$ et $I \models P_2$

par HR, il existe I' tq $I, I_1 \models \text{clause}(P_1)$

HR, il existe I'' tq $I, I_2 \models \text{clause}(P_2)$

existe I' tq $I, I' \models \text{clause}(P_1) \cup \text{clause}(P_2)$

$I' = I_1 \cup I_2$

! (ok car $(\text{var}(I_1) \cap \text{var}(I_2)) = \emptyset$)

• si P clause $I' = \emptyset$

• si $P = \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \vee (P_1 \wedge Q_1) \vee \dots \vee (P_p \wedge Q_p)$

Hypothèse: $I \models \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \vee (P_1 \wedge Q_1) \vee \dots \vee (P_p \wedge Q_p)$

Trouver I' tq $I, I' \models \{ \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \vee x_1 \dots x_p \} \cup \bigcup_{i=1-p} \text{clause}(\neg x_i \vee R_i) \cup \bigcup_{i=1-p} \text{clause}(\neg x_i \vee Q_i)$

→ si $P \models \ell_i$ $I' = (x_j \mapsto F)$

vrai

→ si $P \models Q_i \wedge R_i$ $I' = (x_i \mapsto V, x_j \mapsto F)$

19/11/25

Ex 4.3

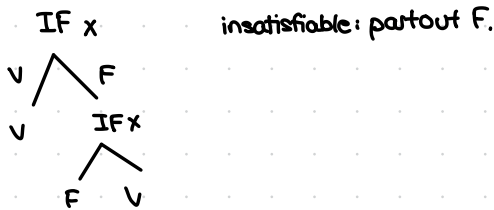
1) $\text{vald}(I, \text{bool}(b)) = b$
 $\text{vald}(I, \text{IF}(x, P, Q)) = \begin{cases} \text{vald}(I, P) & \text{si } I(x) = V \\ \text{vald}(I, Q) & \text{sinon} \end{cases}$

2) $\text{form}(\text{Bool}(b)) = \begin{cases} T & \text{si } b \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$
 $\text{form}(\text{IF}(x, A, B)) = (x \wedge \text{form}(A)) \vee (\neg x \wedge \text{form}(B))$

3) $\text{not}(b) = !b$
 $\text{not}(\text{IF}(x, P, Q)) = \text{IF}(x, \text{not } P, \text{not } Q)$

4) $\text{Bool}(b)$
 $\text{IF}(x, P, Q)$
 $\text{and}(b_1, b_2) = b_1 \wedge b_2$
 $\text{and}(b, \text{IF}(x, P, Q)) = \text{IF}(x, \text{and}(b, P), \text{and}(b, Q))$
 $\text{and}(\text{IF}(x, P, Q), b) = \text{IF}(x, \text{and}(P, b), \text{and}(Q, b))$
 $\text{and}(\text{IF}(x, A, Q), \text{IF}(y, R, S)) =$
 $\begin{cases} \text{IF}(x, \text{and}(P, \text{IF}(y, R, S)), \text{and}(Q, \text{IF}(y, R, S))) & \text{si } x < y \\ \text{IF}(x, \text{and}(P, R), \text{and}(Q, S)) & \text{si } x = y \\ \text{symétrique du 1er cas} & \text{si } x > y \end{cases}$

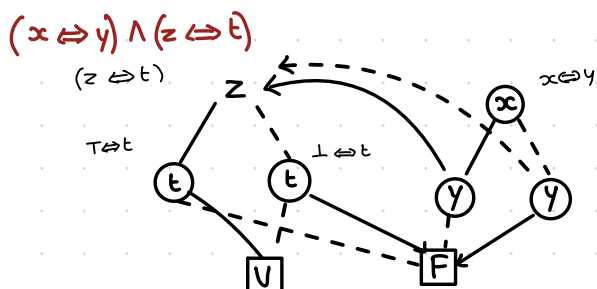
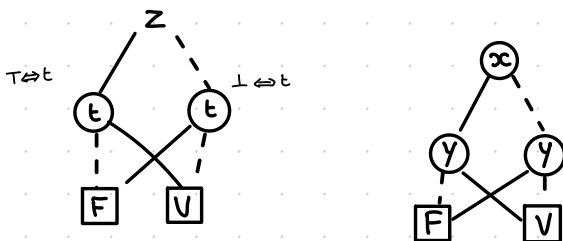
5) (valide) :



Ex 4.4:

- aucun noeud n'a deux fils identiques
- arrêt V + F (DAG)
- diagramme de décision binaire ordonné

1) $(z \Leftrightarrow t) \wedge (x < y < z < t)$ $x \Leftrightarrow y$

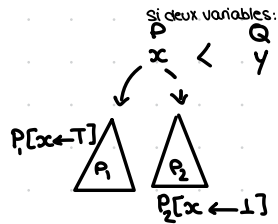


2) $\text{form}(\text{Box}(b)) = \text{si } b \text{ alors } \top \text{ sinon } \perp$
 $\text{form}(\text{IF}(x, P, Q)) = (x \wedge \text{form}(P)) \vee (\neg x \wedge \text{form}(Q))$
 $(x \Rightarrow \text{form}(P)) \wedge (\neg x \Rightarrow \text{form}(Q))$
 $\equiv (\neg x \vee \text{form}(P)) \wedge (x \vee \text{form}(Q))$

3) **2 formules sont équivalentes ssi m OBDD**

si $P \approx Q$ $Q \approx O_2$ et $O_1 \neq O_2$
alors $P \neq Q$
 $\hookrightarrow O_1 \quad O_2$
 $\boxed{V} \quad \boxed{F}$
 $\boxed{V} \quad x \downarrow \text{si une variable}$
 $\triangle \quad \triangle$
 $F \quad F$
 $\exists I \quad \text{(rend F ma formule)}$

$\text{form}(\text{obdd}(P)) \equiv P$
 $P \approx O$ et $Q \approx O$
alors $P \equiv Q$
 $\forall I, \text{val}_I(P) = \text{valobdd}_I(O)$



si $P \equiv Q$
 $P[x \leftarrow \top] \equiv Q[x \leftarrow \top] = Q$
 $P[x \leftarrow \perp] \equiv Q[x \leftarrow \perp] = Q$
or on a jamais 2 fils égaux

- 4) **noeud**(G, n) (si n noeud interne ds G)
feuille(G, n) (si n feuille V ou F)
var(G, n) donne la variable propositionnelle associée
vrai(G, n) n° sommet si la variable est vraie
faux(G, n) n° sommet si la variable est fausse.
valeur(G, n): valeur V ou F de la feuille

a) **ordre des variables:**

$\forall n \in G \quad \text{noeud}(G, n) \Rightarrow \text{noeud}(\text{vrai}(n)) \Rightarrow \text{var}(n) > \text{var}(\text{vrai}(n))$
 $\text{faux}(n) \quad \text{faux}(n)$

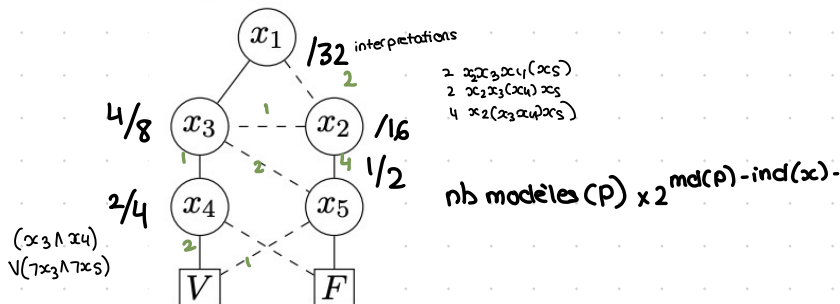
réduction: doit être un noeud !
 $\forall n \in G, \text{noeud}(n) \Rightarrow \text{vrai}(n) \neq \text{faux}(n)$

partage maximal:

$\forall n_1, n_2 \quad \text{feuille}(n_1) \wedge \text{feuille}(n_2) \wedge \text{val}(n_1) = \text{val}(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$
 $\text{noeud}(n_1) \wedge \text{noeud}(n_2) \wedge \text{vrai}(n_1) = \text{vrai}(n_2) \wedge \text{faux}(n_1) = \text{faux}(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

b) c) skipped over?

d)



étapes: 1) mettre en forme normale de négation (lois de Morgan)

2) skolemisation (on se débarrasse des $\exists$) $\rightarrow$ on garde l'équissatisfiabilité

$\hookrightarrow$ troquer $\exists$ que l'on on perd l'équivalence

remplace par un symbole

3) remonter les $\forall$ $\Delta!$ à l'arité du symbole

en faisant attention au renommage

forme préfixe

4) mise en forme clauseuse ($\Delta!$ au parenthésage)

$$\forall x_1, \dots, x_n C_1 \wedge \dots \wedge C_n \quad \forall \vec{x} C_1 \wedge \forall \vec{x} C_2 \wedge \dots \wedge \forall \vec{x} C_n$$

Ex. 1

Mettre sous forme clauseuse $E = \{F_1, F_2, F_3\}$ où:

1) $F_1 = \forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, \forall x, q(x, y))$

$\rightarrow$ fnn: $\forall x, \neg p(x) \vee (\exists y, \forall x, q(x, y))$

$\rightarrow$ skolem: nouveau symbole a cte (pas de variables libres)

$$\forall x (\neg p(x) \vee \forall x, q(x, a))$$

$\rightarrow$ préfixe: $\forall x x' \neg p(x) \vee q(x', a)$

$\rightarrow$ FNC: clauses, 1 seule: $\neg p(x) \vee q(x', a)$

2) $F_2 = ((\exists x, (p(x) \Rightarrow r(x))) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, \exists y, (r(y) \Rightarrow p(x))$

$\rightarrow$ fnn: $((\exists x, \neg p(x) \vee r(x)) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, \exists y, \neg r(y) \vee p(x)$

$\rightarrow$ skolem: 2 nouveaux symboles b

arité 0,arité 1

$$((\neg p(b) \vee r(b)) \vee \forall y p(y)) \wedge \forall x (\neg r(f(x)) \vee p(x))$$

$\rightarrow$ préfixe (+fnc): $\forall x y (\neg p(b) \vee r(b) \vee p(y)) \wedge (\neg r(f(x)) \vee p(x))$

clauses: $\{ \neg p(b) \vee r(b) \vee p(y), \neg r(f(x)) \vee p(x) \}$

3) $F_3 = ((\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y))) \Rightarrow \exists z, r(z)) \Rightarrow \exists u, s(u)$

$\rightarrow$ fnn: $\neg [(\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y)) \Rightarrow \exists z, r(z))] \vee \exists u, s(u)$

$\rightarrow [(\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y)) \wedge \forall z, \neg r(z))] \vee \exists u, s(u)$

$\rightarrow [\forall x, (\neg p(x) \vee \exists y, q(y)) \wedge \forall z, \neg r(z)] \vee \exists u, s(u)$

$\rightarrow$ skolem: nouveaux symboles

c et d d'arité 0

$$((\forall x, \neg p(x) \vee q(d)) \wedge \forall z, \neg r(z)) \vee s(c)$$

$\rightarrow$ préfixe: $\forall x z, ((\neg p(x) \vee q(d)) \wedge \neg r(z)) \vee s(c)$

$\rightarrow$ FNC: $\forall x z (\neg p(x) \vee q(d) \vee s(c)) \wedge (\neg r(z) \vee s(c))$

2 clauses.

Ex 2: $A \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x, \neg p(x)) \Rightarrow ((\forall x, p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \forall x, q(x))$

1) FNN

$$\neg (\exists x, \neg p(x)) \vee ((\forall x, p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \forall x, q(x))$$

$$\equiv \forall x, p(x) \vee (\neg (\forall x, p(x) \vee q(x)) \vee \forall x, q(x))$$

$$\equiv (\forall x, p(x)) \vee ((\exists x, \neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall x, q(x))$$

2) $A \equiv B$

donc $A \models B$ vraie

$B \models A$ vraie

et A est satisfiable ssi B satisfiable : vraie

3) skolemisation

nouveau symbole: a. arité 0

$$C = \forall x x' (P(x) \vee (\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee Q(x'))$$

4) $B \models C$: faux (on peut trouver un modèle où C serait vrai et B serait faux :

$$p(a) \vee q(a) F, p(b) F, q(b) F, D = \{a, b\} \quad D \models B, D \not\models C$$

$C \models B$: vrai

B satisfiable ssi C l'est : vrai

5) 6) oui

7) 8) 9)

$$(\exists x, \neg P(x)) \wedge (\forall x, P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists x, \neg Q(x)$$

$$\rightarrow \text{fnf: } \neg P(a) \wedge (\forall x, P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(b)$$

$$D_H = \{a, b\}, B_H = \{P(a), Q(a), P(b), Q(b)\}$$

satisfiable : F V V F

$\rightarrow$ donc A n'est pas valide

Ex 5.3: $\forall A$ clause, $\exists B : \forall x_1, \dots, x_n C$ avec C sans quantificateurs tq:

1) $B \models A$ 2) si A satisfiable alors B est satisfiable, 3) si A insatisfiable alors $\exists \sigma_1, \dots, \sigma_K$ substitutions closes tq $\{C[\sigma_1], \dots, C[\sigma_K]\}$ soit insatisfiable

i) Mq pour une formule P quelconque, il existe Q qui s'écrit $\exists x_1, \dots, x_n, R$ avec R sans quantificateurs tq:

a) $P \models Q$

b) si Q est valide alors P est valide

c) si P est valide alors $\exists \sigma_1, \dots, \sigma_K$ substitutions closes tq $R[\sigma_1] \vee \dots \vee R[\sigma_K]$ soit valide

$\rightarrow P$ valide ssi $\neg P$ insatisfiable.

On cherche $Q = \exists x_1, \dots, x_n C$

On skolemise $\neg P \rightarrow \forall x_1, \dots, x_n C$ insatisfiable ssi $\neg P$ insatisfiable

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ \text{ssi} \\ \neg(\forall x_1, \dots, x_n C) \text{ est valide} \\ \rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \neg C \end{array}$$

(On utilise le résultat de la skolemisation)

2) $Q = \exists x_1, \dots, x_n, R$ avec R sans quantificateurs. Mq $R[\sigma_1] \vee \dots \vee R[\sigma_K] \Rightarrow Q$ est valide

Th de Herbrand: ssi $C[\sigma_1] \wedge \dots \wedge C[\sigma_n]$ insatisfiable

negation ou $R = \neg C$

$\exists x_1, \dots, x_n R[\sigma_1] \vee \dots \vee R[\sigma_n]$ valide

3) $P \stackrel{\text{def}}{=} (\neg T(a) \vee \neg T(b)) \Rightarrow \exists x, T(x)$, trouver la forme de Herbrand associée ainsi que des substitutions closes $\sigma_1, \dots, \sigma_K$ tq $R[\sigma_1] \vee \dots \vee R[\sigma_K]$ soit valide. Peut-on trouver une solution à ce problème avec une seule substitution?

TD 10

Ex. 6.1

1) **FNC** de $(x \Leftrightarrow y)$ et $\neg(x \Leftrightarrow y)$

$$(x \Leftrightarrow y) = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \\ = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$$

$$\neg(x \Leftrightarrow y) \equiv (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$$

$$[(x \Leftrightarrow y) \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \\ \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)]$$

2) **TV** $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$

x	y	z	$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
F	F	F	F
V	V	V	V
V	F	F	V
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	V	V	F

3)

$$\underbrace{A_1, \dots, A_n}_{\text{hypothèses}} \vdash \underbrace{B_1, \dots, B_m}_{\text{conclusion}}$$

le séquent est vrai ssi : $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$ ($\wedge(A_i) \Rightarrow \vee(B_i)$)

i.e. dans un monde où toutes les hypothèses sont vraies, il y a au moins une des conclusions qui est vraie

* $\emptyset \vdash B_1, \dots, B_m$

$A_1, \dots, A_n \vdash \perp \sim A_1, \dots, A_n$ insatisfiable

* A est valide ssi $\vdash A$ est valide

$$(1) \frac{\text{on suppose A et on montre B} \quad \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \quad \frac{\text{prouver A} \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \quad \frac{A \vdash A \quad \text{B vrai}}{\vdash A, \neg A} \quad \frac{\vdash A, \neg A}{\vdash A \vee \neg A}$$

* une règle est correcte si si toutes les hypothèses sont vraies, la conclusion est vraie.

ex pour (1):

Γ	Δ	A	B	$\Gamma, A \vdash B, \Delta$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta$
F	-	-	-	V	V
V	V	-	-	V	V
V	F	F	-	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F

* inversible:

correcte mais non inversible

↓
ma conclusion
peut être vraie
alors que l'une
des hypothèses
est fautive.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \text{correcte:} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

Γ	A	B	$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash A \vee B$
F	-	-	V	V
V	V	-	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F

) correct

) non inversible

$$(1) \frac{\Gamma, p \vdash \Delta, q \quad \Gamma, q \vdash \Delta, p}{\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q} \quad (2) \frac{\Gamma, p, q \vdash \quad \Gamma \vdash \Delta, p, q}{\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta}$$

b) a) Mq elles sont correctes + inversibles

(1)

$\Gamma \quad \Delta \quad p \quad q$	$\Gamma, p \vdash \Delta, q$	$\Gamma, q \vdash \Delta, p$	$\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q$
F - - -	V	V	V
V V - -	V	V	V
V F F F	V	V	V
V F F V	V	F	<u>F</u>
V F V V	V	V	V
V F V F	F	V	<u>F</u>

correcte

inversible

(2)

$\hookrightarrow p, q$ en hypothèse
 $\hookrightarrow p, q$ en conclusion

$\Gamma \quad \Delta \quad p \quad q$	$\Gamma, p, q \vdash \Delta$	$\Gamma \vdash \Delta, p, q$	$\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta$
F - - -	V	V	V
V V - -	V	V	V
V F V V	F	V	F
V F V F	V	V	V
V F F V	V	V	V
V F F F	V	F	F

correcte

inversible

	hypothèse	(hyp) $\Delta, \Gamma \vdash \Delta$	(abs) $\neg \Delta, \Gamma \vdash \perp$
	aboude		
	introduction	elimination	elimination hypothèse (dérivée)
$\perp$		$\Gamma \vdash \perp$ $\Gamma \vdash C$	$\Gamma \vdash C \rightarrow \perp \in \Gamma$
$\neg$	$\Gamma \vdash \neg$ $\Gamma \vdash \neg A$	$\Gamma \vdash \neg A$ $\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash C \rightarrow A \in \Gamma$
$\wedge$	$\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	$\Gamma, A, B \vdash C$ $\Gamma \vdash C \rightarrow A \wedge B \in \Gamma$
$\vee$	$\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	$\Gamma \vdash A \vee B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	$\Gamma, A \vee B \vdash C$ $\Gamma \vdash C \rightarrow A \vee B \in \Gamma$
$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	$\Gamma, B \vdash C$ $\Gamma \vdash C \rightarrow A \Rightarrow B \in \Gamma$
$\forall$	$\Gamma \vdash P$ $\Gamma \vdash \forall x, P$	$\Gamma \vdash \forall x, P$ $\Gamma \vdash P[x \leftarrow a]$	$\Gamma, P[x \leftarrow a] \vdash C$ $\Gamma \vdash C \rightarrow \forall x, P \in \Gamma$
$\exists$	$\Gamma \vdash P[x \leftarrow a]$ $\Gamma \vdash \exists x, P$	$\Gamma \vdash \exists x, P$ $\Gamma \vdash C$	$\Gamma, P \vdash C$ $\Gamma \vdash C \rightarrow \exists x, P \in \Gamma$

c) arbre de preuve : $\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow_g \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \quad \Gamma, A \vdash \Delta, A}{\Gamma, B \Rightarrow A \vdash \Delta, A} \text{hyp} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta, B \quad \Gamma, B, A \vdash \Delta}{\Gamma, B, B \Rightarrow A \vdash \Delta} \text{hyp} \\ &\Rightarrow_g \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash \Delta}{\Gamma, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \vdash \Delta} \text{Ag} \end{aligned}$$

d) $x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$ est-elle valide?

A valide ssi deriv $\vdash A$ ($A, B \models C$ ssi $A, B \vdash C$) $\{A_1, \dots, A_n\}$ insat ssi deriv $A_1, \dots, A_n \vdash$

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\frac{\text{hyp}}{x, y \vdash y} \quad \frac{\text{hyp}}{x, y \vdash x}}{x, y \vdash x \Leftrightarrow y} \quad \frac{\frac{\frac{\text{hyp}}{x, y \vdash y} \quad \frac{\text{hyp}}{x \vdash x, y}}{x, x \Leftrightarrow y \vdash y} \quad \frac{\frac{\frac{\text{hyp}}{A \vdash x \Leftrightarrow y} \quad \frac{\text{hyp}}{y, (x \Leftrightarrow y) \vdash x}}{y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) \vdash x} \quad \frac{\frac{\text{hyp}}{x \vdash x, y} \quad \frac{\text{hyp}}{y \vdash x, y}}{\vdash x, y, x \Leftrightarrow y}}{x \vdash y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)} \quad \frac{\frac{\frac{\text{hyp}}{A \vdash x \Leftrightarrow y} \quad \frac{\text{hyp}}{y, (x \Leftrightarrow y) \vdash x}}{y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) \vdash x} \quad \frac{\frac{\text{hyp}}{x \vdash x, y} \quad \frac{\text{hyp}}{y \vdash x, y}}{\vdash x, y, x \Leftrightarrow y}}{\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))} \Rightarrow d \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ la formule est valide. (on a obtenu une dérivation)

Ex 6.2:

i) Mq toute formule propositionnelle est équivalente à une qui n'utilise que $\neg, \Rightarrow$

$$\top \equiv x \Rightarrow x$$

$$\perp \equiv \neg(x \Rightarrow x)$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q)$$

$$p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$$

2) $\Leftrightarrow$

a) Formules équivalentes à $\perp$ et $\top$ qui n'utilise que $\Leftrightarrow$ et $\neg$

$$\top \equiv x \Leftrightarrow x$$

$$\perp \equiv x \Leftrightarrow \neg x \text{ (ou } \neg(x \Leftrightarrow x))$$

b) Si A utilise $x, y, \Leftrightarrow, \neg$

Mq l'ensemble des interprétations des variables x, y qui rendent la formule A vraie contient toujours un nb pair d'éléments.

Par induction structurelle sur A :

$$\phi(A) \mid \{i \mid i \models A\} \text{ pair}$$

induction sur la structure de la formule

$$A = x \quad \phi(x) \text{ vrai car 2 interprétations qui rendent vrai } x$$

$$A = \neg B \quad \mid \{i \mid i \models B\} \text{ pair (HR) donc } \mid \{i \mid i \not\models B\} \text{ est pair aussi (} \mid i \mid \text{ pair)} \\ \{i \mid i \models \neg B\} \text{ est pair}$$

$$A = B \Leftrightarrow C$$