

Ex.1 $A, B \subset \mathbb{R}$ 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mq $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\chi_A \circ f(x) = \chi_A(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in A \quad \text{i.e.} \quad x \in f^{-1}(A) \\ 0 & \text{si } f(x) \notin A \quad \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \end{cases}$$

$$\text{d'où } (\chi_A \circ f)(x) = \chi_{f^{-1}(A)}(x)$$

2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$ $(\Rightarrow)$ Supposons que $A \subset B$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x \in A$ donc $x \in B$ Donc si $\chi_A(x) = 1$, $\chi_B(x) = 1$ si $\chi_A(x) = 0$, $\chi_B(x) = 0$ ou $\chi_B(x) = 1$ Donc $\chi_A(x) \leq \chi_B(x) \forall x \in \mathbb{R}$ $(\Leftarrow)$ Supposons $\chi_A \leq \chi_B$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x \in A$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = 1 \leq \chi_B(x)$$

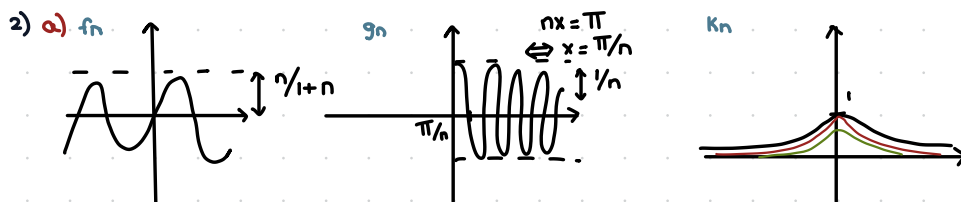
$$\Rightarrow \chi_B(x) = 1$$

$$\Rightarrow x \in B$$

donc $A \subset B$ 3) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ Soit $x \in \mathbb{R}$.cas 1: $x \in A, x \in B \dots$

$$\text{cas 2: } x \in A, x \notin B \text{ donc } \begin{cases} \chi_{A \cap B}(x) = 0 \\ \chi_A(x) \chi_B(x) = 1 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Ex.2 (convergence simple)

1) def: Soit $(f_n)_{n \geq 0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que (f_n) converge simplement vers $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ dans $\mathbb{R}$ 

b) cv simple + limite

$$f_n(x) = \frac{n \sin(x)}{1+n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{n \sin(x)}{1+n} = \frac{\sin(x)}{1/n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-1}{1+n} \leq g_n(x) \leq \frac{1}{1+n}$$

Par thm d'encadrement, $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$h_n(x) = \frac{1}{x^4 + nx^2 + 1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ Si $x = 0$, $h_n(0) = 1$

$$\text{si } x \neq 0, h_n(x) = \frac{1}{x^4 + nx^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi_{\{0\}}$

$$K_n(x) = e^{-nx^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ si $x = 0$, $K_n(0) = e^0 = 1$

$$\text{si } x \neq 0, K_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $K_n(x)$ cv simplement vers $\chi_{\{0\}}$.

Ex.3

1) cv uniforme: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \geq 0 \forall n \geq N(\varepsilon) \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ On définit $\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ Pour g bornée, on définit $\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple2) (f_n) converge simplement vers $\sin(x)$. Soit $n \geq 0$ soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{n \sin(x)}{1+n} - \sin(x) \right| = \left| \frac{n \sin(x) - (1+n) \sin(x)}{1+n} \right| = \left| \frac{-\sin(x)}{1+n} \right| \leq \frac{1}{1+n}$$

$\downarrow$ borne indépendante de x

$$\text{Donc } \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+n}$$

$$\text{Donc } \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\sin(nx)}{1+n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin(nx)}{1+n} \right| \leq \frac{1}{1+n}$$

Donc $\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{1+n}$ et donc $\|g_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$$K_n(x) = e^{-nx^2} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Méthode 1:

Il n'y a pas convergence uniforme car la limite est non continue et la continuité est préservée par convergence uniforme.

Méthode 2: définition

Ex 4: $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$

2) Mq $\|f_n\|_\infty = (1 + 1/n)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } f'_n(x) &= n \cos(x)^{n-1} (-\sin(x)) \sin(x) + \cos^n(x) \cos(x) \\ &= \cos(x)^{n-1} (-n \sin(x)^2 + \cos(x)^2) \end{aligned}$$

On cherche les x tq

$$f'_n(x) = 0 \text{ i.e. } \begin{cases} \cos(x)^{n-1} = 0 \\ -n \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 0 \end{cases}$$

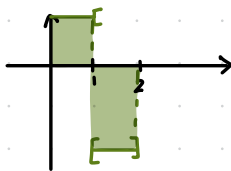
$$\text{i.e. } \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ -n(1 - \cos(x)^2) + \cos(x)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ -n + (n+1)\cos(x)^2 = 0 \end{cases}$$

TD 2

Ex 2.1 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

1) $\int_0^2 f(t) dt = 1(1-0) + (-2)(2-1) = -1$



2) $f^+(x) = \max(0, f(x))$ et $f^-(x) = \min(0, f(x))$

a) $f^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b) $A_+ = \int_0^2 f^+(t) dt = (1-0) \cdot 1 + (2-1) \cdot 0 = 1$

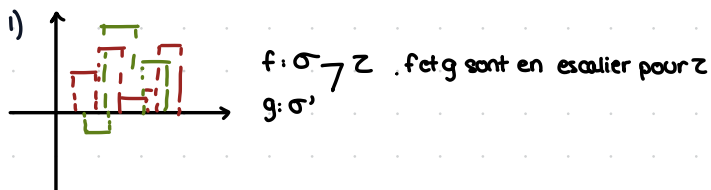
$A_- = \int_0^2 f^-(t) dt = (2-1) \cdot (-2) + (1-0) \cdot 0 = -2$

f^+ et f^- sont des constantes sur les intervalles $[0, 1[$ et $[1, 2]$

3) $f^+(x) + f^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 & \text{sinon} \end{cases} = f(x)$

4) $\int_0^2 f(t) dt = -1 = \underbrace{1}_{A_+} + \underbrace{(-2)}_{A_-}$

Ex 2.2



2) $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier. C'est un sev de $\mathcal{B}([a, b])$

- multiplication scalaire ✓
- stable par addition ($f+g$) est en escalier pour $\mathbb{Z}$

3) $\mathcal{E}([a, b])$ est une sous $\mathbb{R}$ -algèbre de $\mathcal{B}([a, b])$. $1 \in \mathcal{E}([a, b])$ ok.

fg est en escalier pour $\mathbb{Z}$ puis idem pour max et min

Résumé: Une fois qu'on prend $\mathbb{Z} = \sigma \vee \sigma'$ tout se ramène à des fonctions constantes pour lesquelles tout est évident.

* preuve pour max

$\sigma = (a_0, \dots, a_n)$, $\sigma' = (a'_0, \dots, a'_m)$

$\mathbb{Z} = (a''_0, \dots, a''_p)$

Admettons $\forall i \in \{0, \dots, p-1\}$, $f|_{[a''_i, a''_{i+1}[}$ et $g|_{[a''_i, a''_{i+1}[}$ sont constantes.

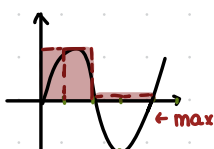
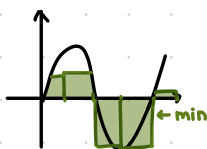
Ma $\max(f, g)$ est en escalier pour $\mathbb{Z}$

Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$

$\max(f, g)|_{[a''_i, a''_{i+1}[} = \max \left(\overbrace{f|_{[a''_i, a''_{i+1}[}}^{\alpha_i}, \overbrace{g|_{[a''_i, a''_{i+1}[}}^{\beta_i} \right)$

$= \max(\alpha_i, \beta_i) \leftarrow$ réel qui ne dépend que de i

Riemann intégrable:

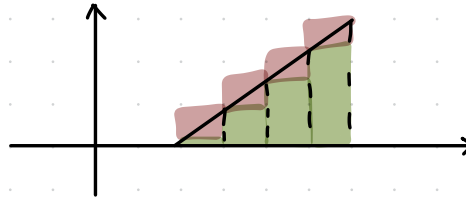
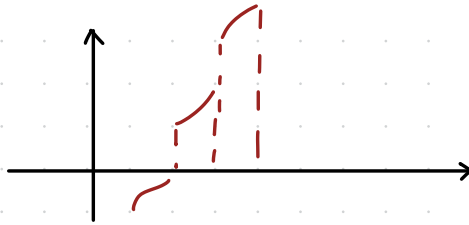


$D_-(f, \sigma) \leq D_+(f, \sigma)$

DEF: f est Riemann intégrable si :

$\sup_{\sigma} D_-(f, \sigma) = \inf_{\sigma} D_+(f, \sigma)$

Ex 2.4:



f est intégrable.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma$ subdivision tq $D_+(f, \sigma) - D_-(f, \sigma) \leq \varepsilon$

Fact: si $\sigma < z$ alors

$$D_-(f, \sigma) \leq D_-(f, z) \leq D_+(f, z) \leq D_+(f, \sigma)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la subdivision uniforme σ_n de pas $\frac{b-a}{n}$, $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k \in \{0, \dots, n\}$.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone

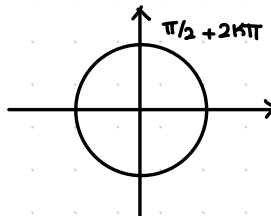
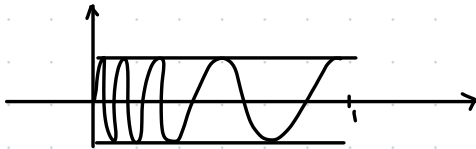
$$D_-(f, \sigma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf(f|_{[a_k, a_{k+1}]) \frac{b-a}{n}$$

$$D_+(f, \sigma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup(f|_{[a_k, a_{k+1}]) \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} D_+(f, \sigma_n) - D_-(f, \sigma_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) - f(a_k) \\ &= \frac{b-a}{n} [f(a_n) - f(a_0)] \text{ télescope} \end{aligned}$$

Puis $n \rightarrow +\infty$

Ex. 2.3. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin(1/x) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$ ($\neq$ à finir + demander)



1) Mq f n'est pas continue

On cherche pour $K \geq 1$ x_K tq $\frac{1}{x_K} = \pi/2 + K\pi$ i.e. $x_K = \frac{1}{\pi/2 + K\pi} = \frac{1}{(\frac{1}{2} + K)\pi}$

$$\sin\left(\frac{1}{x_K}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \text{ impair} \\ -1 & \text{si } K \text{ pair} \end{cases}$$

$x_K \rightarrow 0$ donc pas de limite à droite

2) Mq f n'est pas réglée

réglée: $\forall \varepsilon, \|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$ (or ce n'est pas le cas pour $\varepsilon = 1$)

3) Montrons que f est Riemann intégrable

Soit $\varepsilon > 0$.

On veut mq $\exists \sigma$ une subdivision tq $D_+(f, \sigma) - D_-(f, \sigma) \leq \varepsilon$

Soit $I_N = [0, 1/N]$

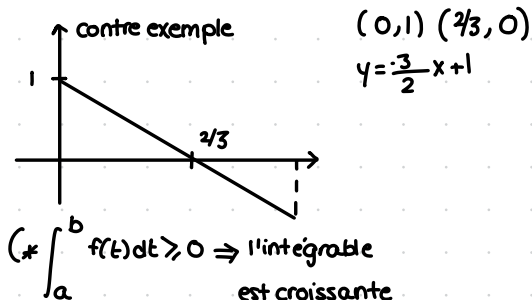
$$\max(f|_{[0, 1/N]}) - \min(f|_{[0, 1/N]}) \left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\Rightarrow (1 - (-1)) \left(\frac{1}{N}\right) = \frac{2}{N} \leq \varepsilon$$

TD 3 - Feuille 2

Ex 2.9

1) si $\int_0^b f(t) dt \geq 0 \forall b \in [0,1]$ alors $f \geq 0$
 $\leadsto$ Faux



2) si $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ croissante, alors f est positive
 $\leadsto$ Vrai

$$F = \int_0^x f(t) dt$$

$$F' = f$$

$$f(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \geq 0$$

3) $f \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt$
 $\leadsto$ Faux:

$$f = -10$$

$$100 = \int_0^1 100 dt \not\leq \int_0^1 10 dt = 10$$

$$\text{ok si } |f| \leq 1$$

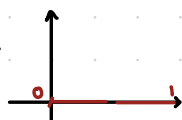
$$5) \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

$\leadsto$ Vrai

$$\text{En posant } u = t - a, \quad du = dt$$

4) $f \geq 0$ tq $\int_0^1 f(t) dt = 0$, alors f est la fonction nulle
 $\leadsto$ Faux

contre exemple:



(il faut ajouter la continuité)

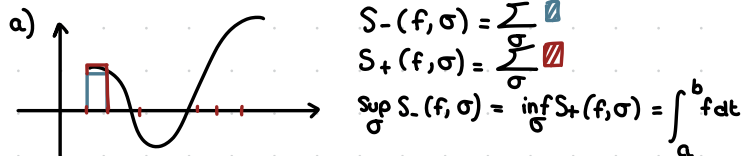
pu. Par l'absurde, $\exists x \in [0, 1]$ tq $f(x) \neq 0$

f est continue $\exists \eta > 0$ tq pour tout $y \in]x-\eta, x+\eta[\cap [0, 1], f(y) > 0$

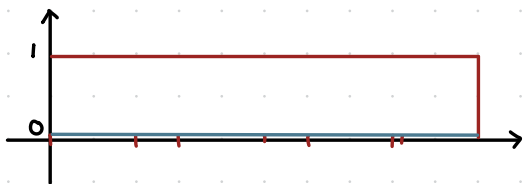
$$\text{et donc } \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{x-\eta} f(t) dt + \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(t) dt + \int_{x+\eta}^1 f(t) dt \geq 2\varepsilon \eta$$

Ex 2.5:

$$D = \{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \}$$



f Riemann intégrable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma$ une subdivision tq
 $S_+(f, \sigma) - S_-(f, \sigma) \leq \varepsilon$



Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[0, 1]$

Par définition de D , $\inf D = 0$ et $\sup D = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc } S_+(D, \sigma) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot 1 = a_n - a_0 = 1$$

$$\text{et } S_-(D, \sigma) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot 0 = 0$$

Soit $i \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. $S_+(D, \sigma) = 1$ car chaque intervalle de σ contient un rationnel ($\exists x \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $x \in \mathbb{Q}$)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{Q}$ $S_-(D, \sigma) = 0$ irrationnel

$$\leadsto S_+(D, \sigma) \neq S_-(D, \sigma)$$

Donc D n'est pas Riemann intégrable.

Lemme: Si f est Riemann intégrable, pour toute suite (σ_n) une subdivision de $[a, b]$

$$\text{tq pas } (\sigma_n) = \max\{a_{i+1} - a_i\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ alors } S_+(f, \sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f dt \text{ et } S_-(f, \sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f dt$$

Ex 2.6:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \leadsto \text{Admis}$$

(rectangles sur la subdivision régulière)

$$\mu'/\mu = \ln(u)'$$

$$\begin{bmatrix} (e^x)' = e^x \\ (fg)' = fg' + fg' \\ (fog)' = g' \times f'og \end{bmatrix}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan \frac{k}{n} = \int_0^1 \tan(t) dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = [-\ln(|\cos(t)|)]_0^1 = -\ln(\cos(1)) - \cancel{\ln(\cos(0))}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2+k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \pi/2$$

TD3

Ex 1.1

1) $A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \subset B \subset C$

$$\begin{cases} \text{si } x \in A \text{ alors } x \in A \cup B \text{ or } A \cup B = B \cap C \text{ et } B \cap C \subset C \text{ et } B \text{ donc } x \in B \\ A \subset A \cup B = B \cap C \subset B \\ B \subset A \cup B = B \cap C \subset C \end{cases}$$

2) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$$

$$B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$$

donc $A = B$

3) $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$

Soit $x \in B$, or $B \subset A \cup B = A \cup C$

donc: cas 1) $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ donc $x \in C$

cas 2) $x \in C$

Rappel: Théorie de Riemann $\longleftrightarrow$ Ensembles finis

Théorie de Lebesgue $\longleftrightarrow$ ensembles dénombrables

- On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $E \xrightarrow{\sim} F$
- On dit qu'un ensemble est fini si $E \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ et n est son cardinal
- on dit qu'un ensemble est dénombrable infini si $E \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$

Ex 3.3.

1) a) Soit E un ensemble non vide, $P(E)$

Montrons que E et $P(E)$ ne sont pas en bijection par l'absurde. Alors il existe $\psi: E \rightarrow P(E)$ surjective.

Notons $F = \{x \in E; x \notin \psi(x)\}$.

Puisque ψ est surjective il existe $x_0 \in E$ tq $\psi(x_0) = F$

cas 1) $x_0 \in F$ alors $x_0 \notin \psi(x_0) = F$

cas 2) $x_0 \notin F$ alors $x_0 \in \psi(x_0) = F$

Exo 3.2

1) $x \in \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m$, $\exists n \geq 1 \forall m \geq n, x \in A_m$

$x \in A_m$ pour m assez grand $\Rightarrow \liminf$

- $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$, $\forall n \geq 1, \exists m \geq n$ tq $x \in A_m$

$$\begin{aligned} 3) (\limsup A_n)^c &= \left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m \right)^c = \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)^c \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcap_{m \geq n} A_m^c \right) = \liminf (A_n^c) \end{aligned}$$

NOTES: X un ensemble ($X = \mathbb{R}$)mesure extérieure: $\lambda^*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ Tribus: $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$

$$\lambda^*(\emptyset) = 0$$

$$\phi = \mathcal{T}$$

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) \text{ si } A \subset B$$

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \phi A \in \mathcal{T}$$

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_k)$$

mesure extérieure de Lebesgue: si $E \subset \mathbb{R}$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) ; E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]a_i, b_i[\right\}$$

critère de Carathéodory / définition

 $E \subset X$ est mesurable si pour tout $A \subset X$, $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$

Il existe beaucoup de mesurables, en particulier les boréliens (= tribu engendrée par les ouverts)

Ex 4.1) $]x, +\infty[$ mesurable $\Leftrightarrow m_q[a, b]$ mesurable [Fait en TD]

$$\begin{aligned}
 [a, b] &= [a, +\infty[\cap]-\infty, b] \\
 &= [a, +\infty[\cap (]b, +\infty[)^c \\
 &= \left(\bigcap_{n \geq 1}]a - \frac{1}{n}, +\infty[\right) \cap (]b, +\infty[)^c
 \end{aligned}$$

Or $\forall n \geq 1$, $]a - \frac{1}{n}, +\infty[$ est mesurable donc $\bigcap_{n \geq 1}]a - \frac{1}{n}, +\infty[$ est mesurable comme intersection dénombrable de mesurables.donc $]b, +\infty[$ aussi et donc $[a, b]$ l'est par intersection finie de mesurables.Ex 4.2) $E \subset \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}, K E = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, y = Kx\}$ [Fait en TD]1) Mq $\lambda^*(K E) = |K| \lambda^*(E)$

$$\lambda^*(K E) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i - a_i, K E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]a_i, b_i[\right\}$$

pour $K=0$: $0=0$ c'est vraiSupposons $K \neq 0$ et $K > 0$

$$\left\{ \sum_{i \geq 0} (b_i - a_i), K E \subset \bigcup_{i \geq 0}]a_i, b_i[\right\} = \left\{ \sum_{i \geq 0} (b_i - a_i), E \subset \bigcup_{i \geq 0}]\frac{a_i}{K}, \frac{b_i}{K}[\right\}$$

$$* K E \subset \bigcup_{i \geq 0}]a_i, b_i[\Leftrightarrow E \subset \bigcup_{i \geq 0}]\frac{a_i}{K}, \frac{b_i}{K}[$$

$$\left(E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]\frac{a_i}{K}, \frac{b_i}{K}[\right) \Leftrightarrow \lambda^*(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{b_i - a_i}{K}$$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists (]a_i, b_i[)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement de E tel que $\lambda^*(E) \leq \sum_{i \geq 0} b_i - a_i \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$

$$\text{i.e. } K \lambda^*(E) \leq \sum_{i \geq 0} K b_i - K a_i \leq K \lambda^*(E) + \varepsilon$$

Montrons que $(]K a_i, K b_i[)$ recouvre $K E$.Soit $y \in K E$, $\exists x \text{ tq } y = K x$

$$\exists i \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in]a_i, b_i[$$

$$\text{donc } y \in]\frac{a_i}{K}, \frac{b_i}{K}[$$

$$\lambda^*(K E) \leq \sum_{i \geq 0} K b_i - K a_i \leq K \lambda^*(E) + \varepsilon$$

$$\text{donc } \lambda^*(K E) \leq K \lambda^*(E)$$

poser un recouvrement
utiliser la ss-additivité
+ définition de inf $\hookrightarrow$ mq c'est aussi
un recouvrement de
l'autre ensemble. $\rightarrow$ ineqPuis on applique le même raisonnement à $E' = K E$ avec $K' = 1/K$

$$\lambda^*\left(\frac{1}{K}(K E)\right) \leq \frac{1}{K} \lambda^*(K E) \Leftrightarrow K \lambda^*(E) \leq \lambda^*(K E)$$

2) Mq si $E \subset \mathbb{R}$ est mesurable et $K \in \mathbb{R}$, K est mesurable

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap KE) + \lambda^*(A \cap (KE)^c)$

Sachant que $\forall B \subset \mathbb{R}, \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap E) + \lambda^*(B \cap E^c)$ (*)

$K \neq 0$ ($K=0 \dots$) et $\lambda^*(KX) = |K| \lambda^*(X)$

Soit $A \subset \mathbb{R}$

Appliquons (*) à $B = \frac{1}{K}A$: $\lambda^*(\frac{1}{K}A) = \lambda^*(\frac{1}{K}A \cap E) + \lambda^*(\frac{1}{K}A \cap E^c)$

$$\begin{aligned} & \stackrel{|| Q1 ||}{=} \frac{1}{K} \lambda^*(A) = \lambda^*(\frac{1}{K}(A \cap KE)) + \lambda^*(\frac{1}{K}(A \cap (KE)^c)) \\ & \stackrel{|| ||}{=} \lambda^*(\frac{1}{K}(A \cap KE)) + \lambda^*(\frac{1}{K}(A \cap (KE)^c)) \\ & \stackrel{|| Q1 ||}{=} \frac{1}{|K|} \lambda^*(A) = \frac{1}{|K|} \lambda^*(A \cap KE) + \lambda^*(A \cap (KE)^c) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} K(A \cap B) = KA \cap KB \\ K(K'A) = (KK')A \\ I.A = A \\ KA^c = (KA)^c \end{cases}$$

Ex 4.3

Mq si $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est Lebesgue mesurable et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $E + x_0$ est Lebesgue-mesurable.

Que vaut $\lambda^*(E + x_0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un recouvrement $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de E par des intervalles ouverts bornés tel que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(V_j) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$$

Si $y \in E + x_0$, $\exists x \in E$ tq $y = x + x_0$. Puisque $x \in E$, $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in V_j$ et cela entraîne que $y \in V_j + x_0$

Autrement dit $\{V_j + x_0\}_{j \in \mathbb{N}}$ un recouvrement de $E + x_0$ par des intervalles ouverts bornés. Donc

$$\lambda^*(E + x_0) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(V_j + x_0) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(V_j) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$$

et donc $\lambda^*(E + x_0) \leq \lambda^*(E)$

Pour $F = E + x_0$, on a $E = F + (-x_0)$ donc $\lambda^*(E) = \lambda^*(F + (-x_0)) \leq \lambda^*(F) \leq \lambda^*(E + x_0)$

donc $\lambda^*(E + x_0) = \lambda^*(E)$

mesurabilité.

$$\forall A \subset \mathbb{R}, A \cap (E + x_0) = (A - x_0) \cap E + x_0$$

Par invariance de la mesure extérieure : $\lambda^*(B + x_0) = \lambda^*(B)$ pour tout B

Donc $\lambda^*(A \cap (E + x_0)) = \lambda^*((A - x_0) \cap E)$ (**)

et $\lambda^*(A) = \lambda^*(A - x_0)$ (***)

or E est mesurable, donc :

$$\lambda^*(A - x_0) = \lambda^*((A - x_0) \cap E) + \lambda^*((A - x_0) \cap E^c)$$

$$\stackrel{(***)}{=} \lambda^*(A) \stackrel{(**)}{=} \lambda^*(A \cap (E + x_0)) + \lambda^*(A \cap (E + x_0)^c)$$

$$\Rightarrow \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (E + x_0)) + \lambda^*(A \cap (E + x_0)^c)$$

Donc $E + x_0$ est Lebesgue mesurable.

Ex 4.4)

1) xRy ssi $x - y \in \mathbb{Q}$ relation d'équivalence

réflexive: $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$

symétrique: si $x - y \in \mathbb{Q}$ alors $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$

transitive: si $x - y, y - z \in \mathbb{Q}$, alors $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$

Donc R est une relation d'équivalence.

2) L'axiome du choix permet de construire un ensemble $E \subset [0,1[$ en prenant exactement un élément dans chacune des classes d'équivalence de $[0,1]$ pour $\mathbb{R}$. On note $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.

a) $M_q E_n = E + r_n$ sont 2 à 2 disjoints

Soit $(m)_{n \geq 1} = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ et $E_n = E + r_n$

Supposons $E_i \cap E_j \neq \emptyset$

$\exists x, x' \in E$ tels que $x + r_i = x' + r_j$, donc $x - x' = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$

$\leadsto$ contradiction car E contient au plus un représentant par classe.

Ainsi, les E_n sont deux à deux disjoints.

b) $M_q [0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subset [-1,2]$

Soit $x \in [0,1]$. Comme tout réel appartient à une classe d'équivalence, il existe un unique $y \in E$ tel que $x - y \in \mathbb{Q}$.

De plus, $x, y \in [0,1]$, donc $x - y \in [-1,1]$

Ainsi, il existe un certain rang $r_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ tel que $x - y = r_n$, d'où $x = y + r_n \in E + r_n = E_n$

Donc chaque $x \in [0,1]$ appartient à au moins un des E_n , ce qui prouve

$$[0,1] \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

De plus, comme $E \subset [0,1]$ et $r_n \in [-1,1]$, on a

$$E_n \subset [0 + r_n, 1 + r_n] \subset [-1,2]$$

et donc $\bigcup_{n \geq 1} E_n \subset [-1,2]$

3) On suppose que E est lebesgue mesurable

a) $M_q E_n$ lebesgue mesurables et que $1 \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq 3$

$\leadsto E_n$ est lebesgue mesurable par invariance de la mesurabilité par translation

et $\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E)$.

Par Q2b) et monotonie de λ^* .

$$\lambda^*([0,1]) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \leq \lambda^*([-1,2])$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \leq 3 \quad (*)$$

b) $M_q \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda^*(E_n)$

Les E_n sont deux à deux disjoints et mesurables.

Par σ -additivité:

$$\lambda\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda(E_n)$$

$$\lambda = \lambda^* \text{ sur les mesurables, donc } \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\uparrow$ par invariance par translation

c) contradiction?

$$\text{On a } \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda^*(E_n) = \sum_{n \geq 1} \lambda^*(E)$$

$\rightarrow$ si $\lambda^*(E) = 0$, alors $\lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = 0$ contradiction avec $(*)$ qui donne $\lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \geq 1$

$\rightarrow$ si $\lambda^*(E) > 0$, alors $\sum_{n \geq 1} \lambda^*(E) = +\infty$, contradiction avec $(*)$ qui donne $\lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \leq 3$

$\leadsto E$ n'est pas mesurable.

TD 5

Ex 5.1) $A, B \subset [0, 1]$

$$A = [0, 1/3] \cup [2/3, 1], B = [1/4, 3/4]$$

1) Mq A et B sont des ensembles Lebesgue-mesurables

A et B sont L -mesurables comme réunion finie d'intervalles fermés

2) $\lambda(A), \lambda(B), \lambda(A \cap B), \lambda(A \cup B), \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B), \lambda(A) + \lambda(B)$

$$\lambda(A) = 2/3$$

$$\lambda(B) = 1/2$$

$$A \cap B = [1/4, 1/3] \cup [2/3, 3/4]$$

$$\lambda(A \cap B) \leq 1/12 + 1/12 = 2/12 = 1/6$$

$$A \cup B = [0, 1], \lambda(A \cup B) = 1$$

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$

3) cas général

→ Si A et B sont disjoints et mesurables,

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) \text{ et } \lambda(A \cap B) = \lambda(\emptyset) = 0$$

$$\text{donc } \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$

→ Si A et B non disjoints et mesurables

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B \cup B \setminus B \cap A \cup A \cap B)$$

ces 3 ensembles sont 2 à 2 disjoints

$$\lambda(A \cup B) = \lambda((A \setminus A \cap B) \cup (A \cap B)) + \lambda(B \setminus B \cap A)$$

$$= \lambda(A \setminus A \cap B) + \lambda(A \cap B) + \lambda(B \setminus B \cap A)$$

$$\text{Mais } A = A \setminus A \cap B \cup A \cap B$$

$$B = B \setminus B \cap A \cup B \cap A$$

$$\text{donc } \lambda(A) = \lambda(A \setminus A \cap B) + \lambda(A \cap B)$$

$$\lambda(B) = \lambda(B \setminus B \cap A) + \lambda(B \cap A)$$

$$\text{d'où : } \lambda(A \cup B) = \lambda(A) - \lambda(A \cap B) + \lambda(B) - \lambda(B \cap A) + \lambda(A \cap B)$$

$$= \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B) \quad \square$$

4) [!] en valeurs étendues, il faut éviter les formes indéterminées $+\infty - \infty$. La formule est donc sûre si au moins l'une des $\lambda(A), \lambda(B)$ est finie.

5) Mq $\lambda(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) - \sum_{i < j} \lambda(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \lambda(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \lambda(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

On utilise l'identité combinatoire sur les fonctions indicatrices : $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} - \sum_{i < j} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j} + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}$

→ En intégrant cette égalité par rapport à λ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient la formule.

cas général (sans hypothèse de mesure finie)

La formule reste valable tant que tous les termes sont bien définis, c.à.d. s'il n'y a pas de forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

Sinon, on a-tjs : $\lambda(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$

Ex 5.2

1) $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fonction Lebesgue mesurable, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coïncidant presque partout avec f . Montrer que g est mes

$D := \{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle

Lemme: si $X \subseteq \mathbb{R}$ est de mesure extérieure nulle, alors X est mesurable et de mesure nulle.

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tq $\lambda^*(X) = 0$

Soit $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\text{a.-t.-ons } \lambda^*(A) \stackrel{?}{=} \lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(A \cap X^c)$$

$$\text{ou } \lambda^*(A) \stackrel{?}{\geq} \lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(A \cap X^c)$$

$$A \cap X \subset X \text{ d'où } \lambda^*(A \cap X) \leq \lambda^*(X) = 0$$

$$A \cap X^c \subset A \text{ d'où } \lambda^*(A \cap X^c) \leq \lambda^*(A)$$

donc $\lambda^*(A) \geq 0 + \lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(A \cap X^c)$ donc X est mesurable

$$\text{et puisque } \lambda = \lambda^* \Big|_{\mathcal{L}}, \lambda(X) = \lambda^*(X) = 0$$

En vertu du lemme précédent, $\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$ est mesurable de mesure nulle.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On sait $f^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{L}(E)$. Mq $g^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{L}(E)$

$$g^{-1}(\]\alpha, +\infty[) = g^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \cap (D \cup D^c)$$

$$= (g^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \cap D) \cup (g^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \cap D^c)$$

$$= \underbrace{g^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \cap D}_{\text{mesurable par complétion}} \cup \underbrace{(f^{-1}(\]\alpha, +\infty[) \cap D^c)}_{\substack{\uparrow \text{ mesurable} \\ \text{mesurable}}}$$