

THM: [convergence monotone]

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives.Supposons $(f_n)_{n \geq 0}$ croissante i.e. $f_n \leq f_{n+1}$ On note $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ "limite simple" = $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in [0, +\infty[$ Alors $\int f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\lambda$ Ex 6.2: $n \in \mathbb{N}^*, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x}/n) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi^2}{4}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_n(\frac{\pi^2}{4}) = \cos(\frac{\sqrt{\pi^2/4}}{n}) = \cos(\frac{\pi/2}{n}) = \cos(\frac{\pi}{2n})$$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \geq 0$ $\cos$ est positive sur $[-\pi/2, \pi/2]$,

$$[0, \frac{\sqrt{\pi^2/4}}{n}] = [0, \frac{\pi}{2n}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

ou bien: soit $g_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{n}, \forall x \in [0, \frac{\pi^2}{4}]$ On calcule $\cos(g_n[0, \frac{\pi^2}{4}])$ Mais $g_n[0, \frac{\pi^2}{4}] = [0, \frac{\pi}{2}]$ pour $n=1$ (intervalles décroissantes)Donc $\cos(g_n[0, \frac{\pi^2}{4}]) = \cos([0, \frac{\pi}{2n}]) \subset \cos([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$ Donc $f_n \geq 0 \forall x$ ou bien: soit $x \in [0, \pi^2/4]$ et $n \geq 1$

$$0 \leq x \leq \pi^2/4$$

$$\text{alors } 0 \leq \sqrt{x} \leq \pi/2$$

$$\text{et } 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2} \text{ (car } n \geq 1)$$

$$\text{donc } 1 \geq \cos(\frac{\sqrt{x}}{n}) \geq \cos(\frac{\pi}{2n}) \geq 0 \text{ car } \cos$$

est décroissante

* mesurable car $f(x)=0$ et $f(x)=\cos(x)$ fonctions continues2) Mq $(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1_{[0, \pi^2/4]}$ Soit $x \in [0, \pi^2/4]$

$$f_n(x) = \cos(\frac{\sqrt{x}}{n})$$

or $\frac{\sqrt{x}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\cos$ est continue donc

$$\cos(\frac{\sqrt{x}}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(0) = 1$$

Et si $x \notin [0, \pi^2/4]$ alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ Donc $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1_{[0, \pi^2/4]}$ 3) Mq (f_n) est croissanteSoit $x \in [0, \pi^2/4]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{x}}{n} \geq \frac{\sqrt{x}}{n+1}$$

i.e. $(\frac{\sqrt{x}}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissantede plus, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ QI: $\forall x \in [0, \pi^2/4]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \leq \frac{\pi}{2}$$

Alors $(\cos(\frac{\sqrt{x}}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

4) $\lim (\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)$

$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\lambda$ par le thm de convergence monotone

$\int f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0, \pi^2/4]} d\lambda = \int_{[0, \pi^2/4]} d\lambda = \frac{\pi^2}{4}$

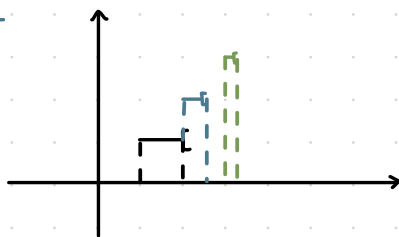
Ex 6.3: $\sim$ Échanger $\int$ et $\sum$

$n \in \mathbb{N}^*, U_n = n 1_{[n, n + \frac{1}{n^3}]}$

1) $U_1 = 1_{[1, 2]}$

$U_2 = 2 1_{[2, 2 + 1/8]}$

$U_3 = 3 1_{[3, 3 + 1/27]}$



2) $Mq \sum_{n \geq 1} U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$

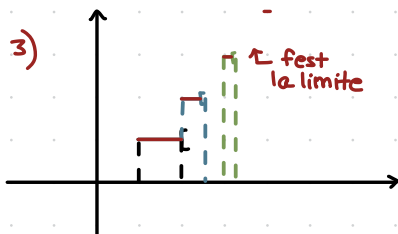


1^{er} cas: si $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x \in [n_0, n_0 + \frac{1}{n_0^3}]$

$\sum_{n \geq 1} U_n(x) = U_{n_0}(x) = n_0$

or n_0 ne dépend pas de x , donc $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} n_0$

2^{es} cas: sinon $\sum_{n \geq 1} U_n = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$



4) $Mq f$ est intégrable

$f \geq 0$, $m_q \int f d\lambda$ est finie

$A_1 = 1(2-1) = 1$ (on calcule l'aire des rectangles)

$A_2 = 2(2 + \frac{1}{8} - 2) = \frac{1}{4}$

$A_3 = 3(3 + \frac{1}{27} - 3) = \frac{1}{9}$

$A_n = n(n + \frac{1}{n^3} - n) = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$\sum A_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann

on veut ensuite montrer que ça c'est égale à l'intégrale

Pour $n \geq 0$

$f_n(x) = \sum_{k \leq n} U_k(x)$

(f_n) converge simplement. De plus, $f_n(x) \geq 0$

C'est une somme de termes positifs, donc (f_n) est croissante ($f_{n+1} - f_n = U_{n+1} \geq 0$)

Donc d'après le thm de convergence monotone $\int f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\lambda$, donc f est intégrable.

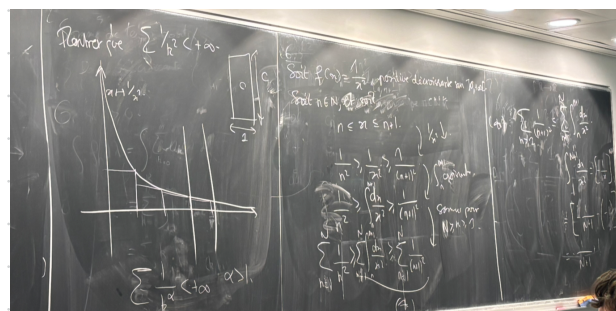
si $n \geq 0$:

$\int f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^n U_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{\mathbb{R}} k 1_{[k, k + \frac{1}{k^3}]}(x) dx$

$= \sum_{k=0}^n k \int_{\mathbb{R}} 1_{[k, k + \frac{1}{k^3}]}(x) dx$

$= \sum_{k=0}^n k [k + \frac{1}{k^3} - k] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} \quad \leftarrow$

5) La fonction n'a pas de limite nulle en $+\infty$ or elle est intégrable



Ex 6.4: $\alpha \in \mathbb{R}$, $f:]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^\alpha; 0 \leq x \leq 1$$

1) Pourquoi $\int_{]0,1]} f d\lambda$ a-t-elle un sens?

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^{\alpha \ln(x)} \quad \forall 0 \leq x \leq 1$

$$\int_{]0,1]} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f 1_{]0,1]} d\lambda$$

$\leadsto$ positive ($f \geq 0 \quad \forall 0 \leq x \leq 1$)

$\leadsto$ mesurable : $\alpha \ln(x)$ continue car $\ln$ continu

donc $e^{\alpha \ln(x)}$ continue car composée de fonctions continues.

$$\int_{]0,1]} f d\lambda \in [0, +\infty]$$

2) Calculer $\int_{]0,1]} f d\lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

cas $\alpha \neq -1$: $[1, 1/n]$

$$\begin{aligned} \int_{[1, 1/n]} f d\lambda &= \int_{[1, 1/n]} x^\alpha d\lambda = \int_{1/n}^1 x^\alpha dx \\ &= \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_{1/n}^1 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\text{cas } \alpha = -1: \int_{[1, 1/n]} f d\lambda = \ln(1) - \ln(1/n) = \ln(n)$$

3) Mq $\int_{]0,1]} f d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \alpha > -1 \leadsto$ En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f soit intégrable.

si $\alpha \neq -1$:

si $\alpha > -1$: alors $\alpha+1 > 0$ et $\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
donc $\int_{]0,1]} x^\alpha d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 x^\alpha d\lambda = \frac{1}{\alpha+1} < \infty$

si $\alpha = -1$: $\int_{1/n}^1 x^{-1} dx = \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

si $\alpha < -1$: $\alpha+1 < 0$ et $\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = n^{-(\alpha+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où $\int_{1/n}^1 x^\alpha d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

$$\text{Ainsi } \int_{]0,1]} x^\alpha d\lambda < \infty \Leftrightarrow \alpha > -1$$

condition nécessaire et suffisante

14/11/2025

Ex 6.10, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8

convergence monotone (= Beppo-Levi)

⇒ Lemme de Fatou

(f_n) mesurables positives, $\int \liminf f_n d\lambda \leq \liminf \int f_n d\lambda$

$(\liminf f_n)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x))$

Ex 6.10)

$f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fct mesurable positive.

$$\text{Mq } \int_{[0, +\infty[} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, n]} f d\lambda \quad \text{et} \quad \int_{[0, 1]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1/n, 1]} f d\lambda$$

$$\int_{[0, +\infty[} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0, +\infty[} d\lambda$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{[0, n]} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0, n]} d\lambda \quad (*)$$

On pose $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$$

$$\text{Donc } (*): \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

$$f \mathbb{1}_{[0, n]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

or f est positive mesurable et monotone.

soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$

$$\text{et } f_{n+1}(x) = f \mathbb{1}_{[0, n+1]}(x)$$

donc puisque f est positive et $[0, n] \subset [0, n+1]$

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \text{car } [0, n] \subset [0, n+1]$$

Donc par cv monotone:

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0, n]} d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0, +\infty[} d\lambda = \int_{[0, +\infty[} f d\lambda$$

$$* \quad \int_{[0, 1]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1/n, 1]} f d\lambda$$

$$\rightarrow \int_{[0, 1]} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0, 1]} d\lambda$$

et soit $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{[1/n, 1]} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[1/n, 1]} d\lambda$$

Soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f \mathbb{1}_{[1/n, 1]}(x)$$

f_n positive, mesurable, monotone.

Donc par thm de convergence monotone, $\int f \mathbb{1}_{[0, 1]} d\lambda \rightarrow \int \lim f_n d\lambda$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f \mathbb{1}_{[1/n, 1]}(x) = f \mathbb{1}_{]0, 1]}(x)$$

$$\text{Donc } \int_{[0, 1]} f d\lambda = \lim \int_{[1/n, 1]} f d\lambda$$

preuve: $\mathbb{1}_{[1/n, 1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{]0, 1]}$
 $\bigcup_{n \geq 1} [1/n, 1] =]0, 1]$
i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[1/n, 1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
cas 1: si $x \in]0, 1]$
 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, \frac{1}{n} \leq x$
alors $x \in [1/n, 1]$
 $\mathbb{1}_{[1/n, 1]}(x) = 1$
cas 2: $x \notin]0, 1]$ donc $\forall n \geq 1$,
 $\mathbb{1}_{[1/n, 1]}(x) = 0$

Ex 6.5:

$$1) \int_{[0, +\infty[} x e^{-x^2} d\lambda(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$.

$$f_n(x) := x e^{-x^2} \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$$

$\hookrightarrow$ mesurable, positive, croissante et $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$

donc par **lemme Beppo-Levi**, $\int_{[0, +\infty[} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[} f_n d\lambda$ (l'intégrale a un sens)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda &= \int_0^n x e^{-x^2} dx \\ &\quad \text{compact, } \downarrow \text{intégrale de Riemann coïncide avec l'intégrale de Lebesgue (pour les fonctions continues)} \\ &\quad \text{[substitution]} \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^n \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-n^2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} d\lambda(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-n, n]} e^{-|x|} d\lambda \\ &= 2 \int_{[0, +\infty[} e^{-x} d\lambda \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{On pose } f_n(x) := e^{-|x|} \mathbb{1}_{[-n, n]}(x)$$

f_n mesurable, positive, $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-|x|}$

$$\text{donc } \int_{-n}^n e^{-|x|} dx = 2 \int_0^n e^{-x} dx = 2 \left[-e^{-x} \right]_0^n = 2 (1 - e^{-n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

$$3) \int_{[0, +\infty[} x e^{-x} d\lambda(x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, n]} x e^{-x} d\lambda$$

$$= \left[-x e^{-x} \right]_0^n - \int_{[0, n]} -e^{-x} dx$$

$$\left| \begin{aligned} (uV)' &= u'V + uV' \\ uV &= \int u'V + \int uV' \\ \int uV' &= uV - \int u'V \\ x &= u \quad 1 = V \\ e^{-x} &= V' \quad -e^{-x} = u' \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} &= \\ &= (n(e^{-n}) - 0) + \int_0^n e^{-x} dx \\ &= n e^{-n} + \int_0^n e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$= n e^{-n} + \left[-e^{-x} \right]_0^n = n e^{-n} + (-e^{-n} - (-1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ex 6.6:

Utiliser le Lemme de Fatou pour déterminer la nature de $\bar{J}_n = \int \frac{n}{\sin^2(n) + nx^2} d\lambda(x)$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{n}{\sin^2(n) + nx^2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$
 f_n est mesurable, positive.

Par le lemme de Fatou:

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\lambda = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{J}_n$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{n}{\sin^2(n) + nx^2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[} d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{J}_n$$

$$\int_{[0, +\infty[} \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = +\infty < +\infty$$

Donc $\bar{J}_n$ diverge.

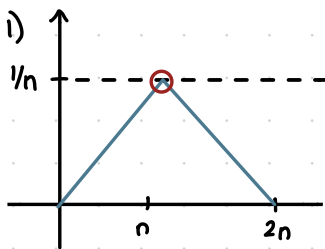
[Lemme de Fatou:

(f_n) mesurables positives tq $f_n \xrightarrow{\text{cv.s.}} f$, alors $\int f d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\lambda$ (cor.)]

Ex. 6.7

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def par:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ \frac{2n-x}{n^2} & \text{si } n < x \leq 2n \\ 0 & \text{si } x > 2n \text{ et } x < 0 \text{ (cv uniforme vers 0)} \end{cases}$$



2) Soit $x \in \mathbb{R}$

cas 1: $0 \leq x \leq n$

$$\frac{x}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

cas 2: $n < x \leq 2n$

mais alors $n-x \leq 0 \leq 2n-x$

donc $2n-x \leq n \leq 3n-x$

$$\text{donc } \frac{2n-x}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

cas 3: c'est évident que $0 \leq \frac{1}{n}$

Donc $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$

or $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\|f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. $f_n \xrightarrow{\text{cv. U}} 0$

$$3) \int f_n d\lambda = \int_0^n \frac{x}{n^2} dx + \int_n^{2n} \frac{2n-x}{n^2} dx + \int_{2n}^{+\infty} 0 dx = 1$$

$$4) 0 < 1$$

+ 6.8.

Ex 6.8 (pas fait en TD)

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$$

$$1) \text{ Mq } f_n \xrightarrow{\text{cuv}} 0$$

Pour tout x ,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}(x) \leq 1/n$$

$$\text{donc } \|f_n\|_\infty = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$2) \text{ Mq } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda < \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$$

$$\text{On a: } \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}(x) d\lambda(x)$$

$$= -\frac{n}{n} = -1 < 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$$

On a

$$0 = \int \liminf f_n$$

$$-1 = \liminf \int f_n$$

$$\text{Fatou dit: } \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n \quad \underline{\text{si } f_n \geq 0}$$

or dans ce cas $f_n \leq 0$

Donc ça ne contredit pas Fatou.

Ex 6.9: (pas fait en TD)

$$1) f_n: x \mapsto e^{-x^2/n}$$

$$\frac{x^2}{n} > \frac{x^2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{n} < \frac{-x^2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{-x^2}{n}\right) < \exp\left(\frac{-x^2}{n+1}\right) \text{ car exp croissante}$$

$$\Rightarrow f_n < f_{n+1} \text{ donc } f_n \text{ et croissante}$$

$$\text{et } f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 (=e^0)$$

$$2) g_n: x \mapsto e^{-nx^2}$$

$$g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ si } x=0 \text{ } g_n \rightarrow 1$$

$$n \leq n+1$$

$$\text{donc } g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\{0\}}$$

$$\Rightarrow -nx^2 > -(n+1)x^2$$

$$\Rightarrow e^{-nx^2} > e^{-(n+1)x^2} \text{ donc } g_n \text{ décroissante}$$

$$3) h_n: x \mapsto \sqrt{n} e^{-nx^2}$$

$$h_n \rightarrow \sqrt{n} \mathbb{1}_{\{0\}}$$

pas monotone en n
(Δ croissante si $x=0$)

$$4) k_n: x \mapsto n|x|$$

k_n croissante

si $x=0$, $k_n \rightarrow 0$

sinon, $k_n \rightarrow +\infty$

$$5) \ell_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[-1/k, 1/k]}$$

$$\ell_n(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } x=0 \\ \lfloor \frac{1}{|x|} \rfloor & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

RAPPELS:DEF: On dit que $P(x)$ est vraie pp quand

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}; P(x) \text{ est faux}\}) = 0$$

THM: Soit $X \subset \mathbb{R}$ mesurable, et (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X . On suppose que:i) La suite (f_n) converge presque partout vers $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ii) Il existe $g: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui est intégrable sur X et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pour presque tout } x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)$$

x ne dépend pas de n !

Alors f est intégrable sur X et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\lambda(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \int_X f(x) d\lambda(x)$$

Ex 7.1

$$f_n: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \frac{1}{t^2 + \cos^2(t/n)}$$

1) cv simple de (f_n) Soit $t \in [1, +\infty[$

$$f_n(t) \rightarrow \frac{1}{1+t^2} \text{ par continuité en 0 de } \frac{1}{t^2 + \cos^2(t/n)}$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

2) Mq $0 \leq f_n(t) \leq 1/t^2 \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } t \geq 1$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [1, +\infty[$: $\cos^2(t/n) \geq 0$

$$\text{donc } t^2 + \cos^2(t/n) \geq t^2$$

$$\text{donc } \frac{1}{t^2 + \cos^2(t/n)} \leq 1/t^2 \text{ par décroissance de la fonction inverse sur } [0, +\infty[$$

$$\text{De plus, } t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 + \cos^2(t/n) \geq 1 \Rightarrow f_n(t) \geq 0$$

$$\text{Donc on a bien } 0 \leq f_n(t) \leq 1/t^2$$

3) $I_n := \int_{[1, +\infty[} f_n d\lambda$. Mq (I_n) cv et déterminer sa limite $\rightarrow I_n$ a un sens par positivité de f_n / par domination du module de f_n par une fonction $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ On a montré que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ simplement et donc simplement ppDe plus, $g(t) = 1/t^2$ est une fonction intégrable tq $-f(t) \leq 0 \leq f_n(t) \leq g(t)$ donc $|f_n(t)| \leq 1/t^2$ Par le TCD, $\lim \int_1^{+\infty} f_n d\lambda = \int_1^{+\infty} \lim f_n d\lambda = \int_1^{+\infty} f(t) d\lambda$ et cette valeur existe dans $\mathbb{R}$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = [\arctan(x)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi/4.$$

Ex 7.2:1) $I_n = \int_{[1, +\infty[} e^{-t^n} d\lambda(t)$ admet une limite? Si oui la déterminerSoit $n \geq 1$. $\forall t \in [1, +\infty[$, on pose $f_n(t) = e^{-t^n}$ Sens de I_n :Pour $t \in [1, +\infty[$, f_n est mesurable car continue et $f_n \geq 0$ donc I_n a du sens

Application TCD:

Δ! valeurs
au bords

cv simple. Si $t=1$, $f_n(t) = 1/e$

$$t > 1: f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

domination:

18.5
16

Soit $g(x) = e^{-x}$

Δ! ne doit pas dépendre de n!

$$\forall n \in \mathbb{N}, |e^{-t^n}| \leq e^{-t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Par TCD:

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} 1_{[1,3]} d\lambda = 0$$

$$2) K_n = \int_{[1, +\infty[} \frac{t^2}{t^4 + nt} d\lambda(t)$$

Soit $t \in [1, +\infty[$ fixe

$$\frac{t^2}{t^4 + nt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{t^2}{t^4 + nt} \leq 1/t^2 \text{ qui est intégrable}$$

$$\text{TCD: } K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} 0 d\lambda = 0$$

Ex 7.3

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \begin{cases} (\sin(1/x))^n & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Mq chacune des f_n est intégrable

trouver
une domination

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} (\sin(1/x))^n & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1_{[-1,1]}(x)$$

or $1_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $[-1,1]$ est de mesure finie,

donc par comparaison $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

2) Mq $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ simplement p.p. (N ⊂ ℝ en dehors de)

$$\text{si } x=0 \text{ ou } |x| > 1: f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{si } 0 < |x| < 1: \text{ alors } |\sin(1/x)| \leq 1$$

$$\text{On note } N = \left\{ \frac{1}{\pi/2 + k\pi}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

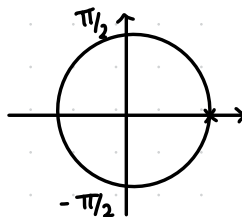
$$\text{Si } x \in N, \text{ alors } \sin(1/x) = \sin(\pi/2 + k\pi) = \pm 1, \text{ donc } |f_n(x)| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{si } x \notin N \text{ et } 0 < |x| < 1, \text{ alors } |f_n(x)| < 1, \text{ donc } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

or $\lambda(N) = 0$ car N est dénombrable. Donc $(f_n)_n$ converge $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$ simplement p.p. vers la fonction nulle.

$$3) I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ?$$

$$\text{Par le TCD, on a } I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$



Ex 7.4 [pas fait en TD]

$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue

1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \cdot \frac{1}{n} \int_{[0, n]} f(t) d\lambda(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ?$

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n: t \geq 0 \mapsto \frac{f(t)}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}(t)$

Pour $t \geq 0$, $f_n(t) \rightarrow 0$, donc $(f_n)_n$ cvs vers la fonction nulle

Les $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ sont mesurables

Pour $n \geq 1$ et $t \geq 0$, on a:

$$|f_n(t)| \leq \frac{|f(t)|}{n} \leq \|f\|_\infty < +\infty$$

$\notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

(on ne peut pas faire mieux)

changement de variable: $t: 0 \rightarrow n$ (t entre 0 et n)

$$s: 0 \rightarrow 1 \text{ si } s = t/n$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue, donc $\frac{1}{n} \int_{[0, n]} f(t) d\lambda(t) = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt$

On fait le changement de variable affine $t = sn$

On a alors $\frac{1}{n} \int_{[0, n]} f(t) d\lambda(t) = \frac{1}{n} \int_0^n f(sn) nds = \int_0^1 f(sn) ds = \int_{[0, 1]} f(sn) d\lambda(s)$

TCD:

- on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n: s \mapsto f(sn)$ pour $s \geq 0$

* les fonctions g_n sont mesurables

- Soit $s \geq 0$

si $s=0$, $g_n(0) = f(0) \rightarrow f(0)$

si $s > 0$, $g_n(s) \rightarrow \ell$

Donc $(g_n)_n$ cv pp vers $g: s \mapsto \ell$

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$, on a: $|g_n(s)| \leq \|f\|_\infty$

fonction constante $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Donc par le TCD: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{[0, n]} f(t) d\lambda(t) = \int_{[0, 1]} \ell d\lambda = \ell$

[pas fait en TD]

Ex 7.5: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-nx^2} f(x)$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $|g_n(x)| \leq |f(x)|$

$\mathbb{R}$ intégrable
 $\Rightarrow = \pm \infty$ sur un nb fin

2) $\mu_n := \int_{[0, 1]} g_n d\lambda$ cv?

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, alors $g_n(x) = e^{-nx^2}$, $f(x) \not\rightarrow 0$

si $f(x) \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, $g_n(x) \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$

Rappels: [continuité et dérivabilité]

PROP: [Continuité]

On suppose que:

- i) $\forall u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- ii) Pour presque tout x , la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue sur I
- iii) Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tq $\forall u \in I$ et presque tout $x \in X, |f(u, x)| \leq g(x)$

Alors, la fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue

^t ne dépend pas du paramètre

PROP: [C']

Soit $X \subset \mathbb{R}$ mesurable, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Soit $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que:

- i) Pour tout $u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est intégrable sur X (pour F soit définie)
- ii) Pour presque tout $x \in X, u \mapsto f(u, x)$ est C^1 . On note $\partial_1 f(u, x)$ sa dérivée par rapport à u
- iii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tq pour tout $u \in I$ et presque tout $x \in X$, on a $|\partial_1 f(u, x)| \leq g(x)$

Alors: F est dérivable sur I et

$$F'(u) = \int_X \partial_1 f(u, x) d\lambda(x)$$

Ex 1:

$$f: \mathbb{R} \times [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{ixt^2 \ln t}}{1+t^4}$$

1) Mq $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad \int_{[1, +\infty[} \left| \frac{e^{ixt^2 \ln t}}{1+t^4} \right| d\lambda(t) = \int_{[1, +\infty[} \frac{d\lambda(t)}{1+t^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{dt}{1+t^4}$$

$$\text{or } \int_{[1, +\infty[} \frac{d\lambda(t)}{1+t^4} = \underbrace{\int_1^T \frac{d\lambda(t)}{1+t^4}}_{\substack{\frac{1}{1+t^4} \text{ continue} \\ \text{et } [1, T] \text{ compact} \\ \text{donc l'intégrale} \\ \text{est finie}}} + \underbrace{\int_T^{+\infty} \frac{d\lambda(t)}{1+t^4}}_{\leq \int_T^{+\infty} \frac{d\lambda(t)}{t^4}}$$

2) Mq F est continue

- i) $t \mapsto f(x, t)$ est mesurable car elle est continue
- ii) $x \mapsto f(x, t)$ est continue comme composée de fonctions continues
- iii) $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^4} = g(t)$ Q1

Donc par le thm de continuité, F est continue

3) Mq f est C^1

- i) Soit $x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable par Q1.
- ii) Soit $t \in [1, +\infty[, x \mapsto \frac{e^{ixt^2 \ln t}}{1+t^4}$ est C^1 comme composée de fonctions C^1

$$iii) \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = it^2 \ln(t) \frac{e^{ixt^2 \ln(t)}}{1+t^4}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = \left| it^2 \ln(t) \frac{e^{ixt^2 \ln(t)}}{1+t^4} \right|$$

$$= |i| |t^2 \ln(t)| \left| \frac{e^{ixt^2 \ln(t)}}{1+t^4} \right|$$

$$+ |e^{ixt^2 \ln(t)}| = |e^{i\theta}| \in \text{cercle trigonométrique}$$

$$\theta = xt^2 \ln(t) = 1$$

$$= t^2 \ln(t) \cdot \frac{1}{1+t^4} = g(t) \in \mathcal{L}^1(T, +\infty \mathbb{C})$$

donc F est C^1

$$g(t) \leq \frac{t^2 \ln(t)}{t^4} \leq \frac{\ln(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \text{ intégrable}$$

ou bien: $g \in \mathcal{L}^1([T, +\infty[)$

car $(\ln(t))$

$$g(t) = \frac{t^2 \ln(t)}{t^4 + 1} \sim \frac{t^2 \ln(t)}{t^4} = \frac{\ln(t)}{t^2}$$

4) C' est la partie imaginaire de $\tilde{F}$; C^1 .

Pour t assez grand, on a $t^4 + t \geq t^4$, donc $0 \leq g(t) \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$

On pose $h = \frac{\ln(t)}{t^2}$ et on étudie $\int_T^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$, $T > 1$

IPP: $\int_T^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt < +\infty$ ($\frac{\ln(t)}{t^2} \leq t^{-3/2}$ pour t assez grand)

donc $h \in \mathcal{L}^1([T, +\infty[)$

donc $g \in \mathcal{L}^1([T, +\infty[)$ par thm de comparaison

Ex2: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

1) Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est intégrable

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)e^{-itx}| \stackrel{\sqrt{\cdot} \text{ module}}{=} |f(t)| \leq |f(t)| \text{ et } f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Par comparaison, $t \mapsto f(t)e^{-itx} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

2) Mq la transformée de Fourier $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx} dt$ est une fonction continue et bornée

On utilise le thm de continuité des intégrales à paramètres:

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t)e^{-itx}$ est mesurable

ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)e^{-itx}$ est continue, car $|f(t)| < +\infty$ pour $t \in \mathbb{R}$

iii) $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $|f(x, t)| \leq |f(t)|$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Donc $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\text{et } \|\hat{f}\|_{\infty} \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < +\infty$$

↑
thm Δ pour les intégrales

TD9 Ex. 1, 2, 4

RAPPELS:

Fubini (Tonelli)

Changement de variable

Coordonnées polaires

Lemme: $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

alors si f est C^0 (resp C^1) sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$

f est C^0 (resp C^1) sur $]0, +\infty[$

Ex 9.1

1) intégrables sur $\mathbb{R}^2$?

a) $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$

Fubini Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} dx \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z^2+1} dz \right)^2, \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z^2+1} dz < +\infty \end{aligned}$$

méthode 1: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z^2+1} dz$

thm cv monotone
↓

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a, a]} \frac{1}{z^2+1} dz$$

comparaison Riemann-Lebesgue
↓

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{z^2+1} dz$$

méthode 2, $\frac{1}{z^2+1} \leq \frac{1}{z^2}$

b) $g(x, y) = \frac{1+x^2}{1+y^2}$

Fubini Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2+1}{y^2+1} dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+1}{y^2+1} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x^2+1) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1} dy \right) dx \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1} dy \right)}_{\pi} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} (x^2+1) dx \right)}_{+\infty} \end{aligned}$$

↪

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2+1) dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 dx + \int_{\mathbb{R}} 1 dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 dx + \infty$$

$$c) \frac{\cos(xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos(xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx dy}{(x^2+1)(y^2+1)} \stackrel{= \text{Q. 9.1}}{< +\infty}$$

Ex 9.2:

$$1) \int_{[0, \pi/2]^2} 1 d\lambda_2(x, y) = \lambda_2([0, \pi/2]^2) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

2) $M_q \cos(x+y) 1_{[0, \pi/2]^2}(x, y)$ intégrable
continue sur un compact
ou $|\cos(x+y)| \leq 1$

$$\begin{aligned} 3) \int_{[0, \pi/2]^2} \cos(x+y) d\lambda_2(x, y) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{[0, \pi/2]} \left(\int_{[0, \pi/2]} \cos(x+y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} [\sin(x+y)]_0^{\pi/2} dx = \int_0^{\pi/2} (\sin(x+\pi/2) - \sin(x)) dx \end{aligned}$$

+ méthode en faisant changement de variable

+ chgmt de variable pour l'intégrale de Gauss.