

Cours 1

02/09/23

thierry.ramond@universite-paris-saclay.fr

Introduction :

Q: à quelles parties du plan peut-on associer une mesure ?

→ toutes celles que l'on peut découper en nombre fini rectangles

→ les disques πR^2

Plan du cours:

ch1- Intégrale de Riemann

- fonctions continues + convergence uniforme

ch2- Théorie de la mesure

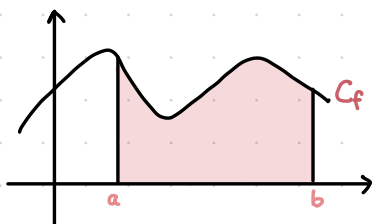
ch3- Intégration par rapport à une mesure

ch4- Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

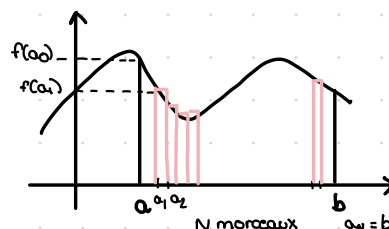
ch5- Espaces L^p

ch6- Transformations de Fourier

Chapitre 1 - Intégrale de Riemann



$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x) \}$$



$$N \rightarrow +\infty$$

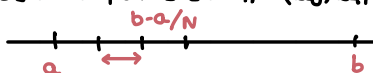
I. Fonctions en escalier

Dans ce paragraphe, on parle de fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition contient l'intervalle fermé borné $[a, b]$

DEF: une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est une famille finie $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ de points $[a, b]$ tq:
 $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$

EX: Soit $N \in \mathbb{N}^*$. la subdivision régulière de $[a, b]$ à $N+1$ points est $\sigma_N = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ avec

$$\forall j \in \{0, \dots, N\}, a_j = a_0 + j \frac{b-a}{N}$$



Le pas d'une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_M)$ est $\delta(\sigma) = \max_{j=0, \dots, M-1} (a_{j+1} - a_j)$

REM: Si $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ est une subdivision de $[a, b]$, alors les intervalles $[a_j, a_{j+1}[$ forment une partition de $[a, b]$

DEF: Une application $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier lorsqu'il existe une

subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_M)$ de $[a, b]$ et des constantes

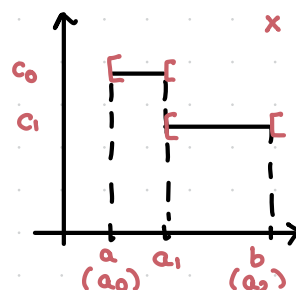
$(c_0, c_1, \dots, c_{M-1})$ telles que $f|_{[a_j, a_{j+1}[} = c_j$

(fonction constante par morceaux)

autrement dit, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier lorsqu'elle peut s'écrire:

$$(*) \quad f = \sum_{j=0}^{M-1} c_j \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[} + f(b) \mathbb{1}_{\{b\}} \quad \text{où} \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

et $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_M)$ est une subdivision de $[a, b]$



REM: Si f est en escalier, on peut trouver de nombreuses subdivisions σ pour lesquelles (*) est vraie

Lorsque pour 2 subdivisions σ et σ' tous les points de σ appartiennent à σ' , on dit que σ' est plus fine que σ

PROP: Une application $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier ssi :

- i) f prend un nombre fini de valeurs
- ii) $\forall c \in \mathbb{R} \setminus f(b), f^{-1}(c)$ est ou bien vide ou bien une réunion finie d'intervalles fermés à gauche, bornés.
 $\uparrow$ image de c par f

PREUVE: Supposons i et ii)

On note $c_0, \dots, c_{N-1}$ les valeurs prises par f et $A_j = f^{-1}(c_j) \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

A_j est une réunion finie d'intervalles $A_j = [\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}] \cup \dots \cup [\alpha_{j,m(j)}, \beta_{j,m(j)}]$

On note $\sigma = (x_0, \dots, x_M)$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en ordonnant tous les $\alpha_{j,m(j)}$ et $\beta_{j,m(j)}$

Mq f est constante sur tous les $I_\ell = [x_\ell, x_{\ell+1}]$.

Dans $]x_\ell, x_\ell]$ il n'y a aucune extrémité des A_j donc f est constante sur $]x_\ell, x_{\ell+1}[$

et f est continue à droite en x_ℓ , donc elle est constante sur I_ℓ .

* La réciproque est immédiate.

PROP: Soit $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$. Si $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

- i) $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}([a, b])$
- ii) $fg \in \mathcal{E}([a, b])$
- iii) $|f| \in \mathcal{E}([a, b])$
- iv) $\mathcal{E}([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$ où $\mathcal{B}([a, b])$ est l'ensemble des fonctions bornées sur $[a, b]$

PREUVE DE i)

$\lambda = \mu = 1$

Soit σ une subdivision associée à f , et σ' une subdivision associée à g . On note $\tau = \sigma \vee \sigma'$ la subdivision obtenue en prenant tous les points de σ et de σ' et les ordonnant par ordre croissant. La fonction $f+g$ est en escalier pour la subdivision τ .

En effet les valeurs prises par $f+g$ sont continues dans $\{c_j + c'_k; j \in \{0, N\}, k \in \{0, \dots, M-1\}\}$, où j'ai noté $c_0, \dots, c_{N-1}$ les valeurs prises par f .

→ En particulier, le nombre de valeurs prises par $f+g$ est fini

→ $(f+g)^{-1}(c_j + c'_k) = \bigcup_{\substack{j_1, k_1 \\ c_{j_1} + c'_{k_1} = c_j + c'_k}} [\alpha_{j_1,1}, \alpha_{j_1,1}] \cap [\alpha_{k_1,1}, \alpha_{k_1,1}] = \bigcup \text{finie d'intervalles}$ (*)

Autre preuve: Notons $\sigma_f = (x_0, \dots, x_N)$ et $\sigma_g = (y_0, \dots, y_M)$

Notons $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g = (z_0, \dots, z_T)$

Sur $[z_j, z_{j+1}[$ f et g sont constantes: si $z_j = x_k \rightarrow$ si $z_{j+1} = x_{k+1}$, f est constante et $[z_j, z_{j+1}[\subset [x_k, x_{k+1}[$

→ si $z_{j+1} = y_\ell \leq x_{k+1}$ donc f est constante et $z_j = x_k \geq y_{\ell-1}$ donc g est constante

→ Donc $\lambda f + \mu g$ est constante sur chaque $[z_j, z_{j+1}[$.

REM: $\mathcal{E}([a, b])$ est un espace vectoriel (sous espace de $\mathcal{B}([a, b])$)

sur $\mathcal{B}([a, b])$ on dispose de la norme (de la convergence) uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ (espace complet)

Cette norme fait de $\mathcal{E}([a, b])$ un espace vectoriel normé.

On sait que $(\mathcal{B}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, mais $\mathcal{E}([a, b])$ n'est pas fermé dans $\mathcal{B}([a, b])$ donc pas complet (il existe des fonctions en escalier qui convergent uniformément mais dont la fonction limite n'est pas en escalier).

DEF: On note $\mathcal{R}([a, b])$ et appelle des fonctions réglées : le sous espace vectoriel $\overline{\mathcal{E}([a, b])}^{\|\cdot\|_\infty}$

c'est l'ensemble des fonctions bornées qui s'écrivent comme limite uniforme de suites de fonctions en escalier

PROP: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application

- i) Si f est continue, alors f est réglée
- ii) Si f est continue par morceaux, alors f est réglée.
- iii) Toute limite uniforme d'une suite de fonctions réglées est réglée
- iv) Si f est monotone, alors elle est réglée

PREUVE DE i)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) = \alpha > 0 \text{ tq } \forall x, y \in [a, b] \quad |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(α uniforme à tous les x)

Soit $\varepsilon = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\alpha_n = \alpha(1/n)$ le réel donné par (*).

Soit $N_n \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{b-a}{N_n} < \alpha_n$ et σ_n la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{N_n}$

Soit $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \sum_{j=0}^{N_n-1} f(a_j) \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[}(x) + f(b) \mathbb{1}_{\{b\}}(x)$

On a $\|f_n - f\|_\infty \leq 1/n$ (ce qui prouve (i))
à faire

Si $x \in [a_j, a_{j+1}[$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$
 $|x - a_j| \leq a_{j+1} - a_j = \frac{b-a}{n} < \alpha_n$
 $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |f(a_j) - f(x)| \leq \varepsilon$

PREUVE DE ii) si f est continue par morceaux, on applique ce qui précède sur chacun des morceaux où f est continue.

PREUVE DE iii)

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et (f_n) une suite de fonctions continues qui converge vers f . Pour chaque n , on peut trouver une fonction g_n en escalier tq $\|f_n - g_n\| < 1/n$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, \|f_n - f\| \leq \varepsilon/2$.

Soit alors $M_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, 2/\varepsilon)$

Donc pour $n \geq M_\varepsilon$ $\|f - g_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - g_n\|$
 $\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

PREUVE DE iv)

On suppose f croissante sur $[a, b]$. Soit $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$

Soit $\varepsilon > 0$. $M = E\left(\frac{\beta - \alpha}{\varepsilon}\right) + 1$

et $\sigma_\varepsilon = (\alpha_0^\varepsilon, \alpha_1^\varepsilon, \dots, \alpha_M^\varepsilon)$ où $\alpha_j = \alpha + j\varepsilon$.

Pour chaque seuil α_j , on définit l'instant x_j où f dépasse le niveau α_j :

$$x_j = \inf \{x \in [a, b]; f(x) \geq \alpha_j\}$$

Puisque f est croissante, la suite x_j l'est aussi

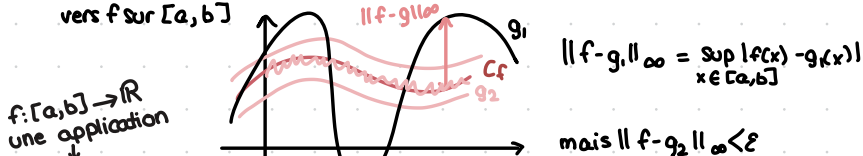
$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}[, \alpha_j \leq f(x) < \alpha_{j+1}$$

Soit alors $g_\varepsilon: x \mapsto \alpha_j$ si $x \in [x_j, x_{j+1}[$

On a $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$

Donc la fonction en escalier g_ε approche f à ε près.

DEF: On dit que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée lorsqu'il existe une suite (f_n) de f en escalier qui convergent uniformément vers f sur $[a, b]$



PROP: f est réglée ssi f admet en tout point de $[a, b]$ une limite à droite (sauf en b) et une limite à gauche (sauf en a)

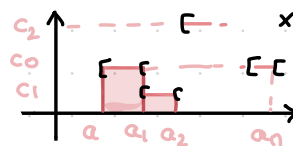
PROP: L'ensemble $\mathcal{R}([a, b])$ des fonctions réglées sur $[a, b]$ est un sev de l'ensemble des fonctions bornées sur $[a, b]$, stable pour $|\cdot|$.

II. Intégrale de Riemann des fonctions réglées

1) Cas des fonctions en escalier

DEF : Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application en escalier: il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ de $[a, b]$ et des constantes $c_0, \dots, c_{N-1}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[}(x)$ si $x \neq b$ (*)

On appelle intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ la quantité $\int_a^b f = \sum_{j=0}^{N-1} c_j (a_{j+1} - a_j)$



PROP: La quantité $\int_a^b f$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ vérifiant (*).

PREUVE: Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ et $\sigma' = (a'_0, \dots, a'_M)$ et $(c_0, \dots, c_{N-1})$, $(c'_0, \dots, c'_{M-1})$ de subdivisions et deux familles de réels telles que $f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[}(x) = \sum_{k=0}^{M-1} c'_k \mathbb{1}_{[a'_k, a'_{k+1}[}(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Soit $\tau = \sigma \vee \sigma'$ la subdivision qu'on obtient en prenant tous les points de σ et σ' puis en les réordonnant par ordre croissant. On note que τ est plus fine que σ et que σ' .

Je note $\tau = (a''_0, \dots, a''_P)$ ($P \leq N+M$) et $f(x) = \sum_{\ell=0}^{P-1} d_\ell \mathbb{1}_{[a''_\ell, a''_{\ell+1}[}(x) \quad \forall x \neq b$

Il suffit de montrer que $\sum_{j=0}^{N-1} c_j (a_{j+1} - a_j) = \sum_{\ell=0}^{P-1} d_\ell (a''_{\ell+1} - a''_\ell)$ (**)

La preuve s'appliquera aussi à σ' , et on aura aussi: $\sum_{k=0}^{M-1} c'_k (a'_{k+1} - a'_k) = \sum_{\ell=0}^{P-1} d_\ell (a''_{\ell+1} - a''_\ell)$

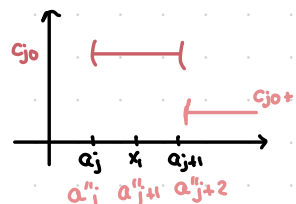
(On peut donc supposer que σ' est plus fine que σ .)

On montre donc (**)

On sait que $\tau = \sigma \vee (x_1, \dots, x_k)$

On peut raisonner par récurrence sur α :

→ $\alpha = 1$: $\tau = \sigma \vee (x_1)$. Il existe un unique $j_0 \in \{0, \dots, N-1\}$ tq $x_1 \in [a_{j_0}, a_{j_0+1}[$



$$\text{Soit } I(\sigma) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j (a_{j+1} - a_j) \text{ et } I(\tau) = \sum_{\ell=0}^{(N+1)-1} d_\ell (a''_{\ell+1} - a''_\ell)$$

$$\begin{aligned} \text{On a } I(\tau) &= \sum_{\ell=0}^{j_0-1} d_\ell (a''_{\ell+1} - a''_\ell) + d_{j_0} (a''_{j_0+1} - a''_{j_0}) + d_{j_0+1} (a''_{j_0+2} - a''_{j_0+1}) + \sum_{\ell=j_0+2}^N d_\ell (a''_{\ell+1} - a''_\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{j_0-1} c_\ell (a_{\ell+1} - a_\ell) + c_{j_0} (x_1 - a_{j_0}) + c_{j_0} (a_{j_0+1} - x_1) + \sum_{\ell=j_0+2}^N c_{\ell+1} (a_{\ell+2} - a_{\ell+1}) \\ &\quad \text{(avant } x_1, \sigma \text{ et } \sigma' \text{ coïncident)} \quad \text{(décaler les indices)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{j_0-1} c_\ell (a_{\ell+1} - a_\ell) + c_{j_0} (a_{j_0+1} - a_{j_0}) + \sum_{\ell=j_0+2}^N c_{\ell+1} (a_{\ell+2} - a_{\ell+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{j_0-1} c_j (a_{j+1} - a_j) + c_{j_0} (a_{j_0+1} - a_{j_0}) + \sum_{j=j_0+1}^{N-1} c_{j+1} (a_{j+1} - a_j) \\ &= I(\sigma) \end{aligned}$$

→ preuve écrite sur le poly:

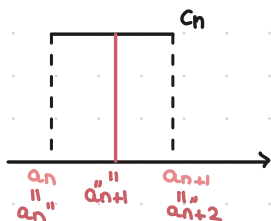
Soit $\sigma' = (a'_0, \dots, a'_M)$ et $(c'_0, \dots, c'_M)$ une autre subdivision et d'autres constantes telles que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{1}_{[a'_k, a'_{k+1}[}(x) c'_k \text{ pour } x \neq b$$

$$\text{Montrons que } I = \sum_{j=0}^{N-1} c_j (a_{j+1} - a_j) = \sum_{k=0}^{M-1} c'_k (a'_{k+1} - a'_k) = I'$$

Notons $\sigma'' = \sigma \vee \sigma'$. On note que $\sigma \subset \sigma''$ (on dit que σ'' est plus fine que σ).

Supposons que σ'' ait un point de plus:



$$\begin{aligned} a_0 &= a''_0 < a'_1 < \dots < a_n = a''_n < a''_{n+1} < a_{n+1} = a''_{n+2} < \dots < a_M = a''_{M+1} = b \\ c'_0 &= c_0, \quad c'_1 = c_1, \quad \dots, \quad c'_n = c_n, \quad c''_{n+1} = c_n, \quad c''_{n+2} = c_{n+1}, \quad \dots, \quad c'_M = c_{M-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'' &= \sum_{j=0}^N (a_{j+1}'' - a_j'') c_j'' \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1}'' - a_j'') c_j'' + \underbrace{(a_{n+1}'' - a_n'')}_{a_n} \underbrace{c_n''}_{c_n} + \underbrace{(a_{n+2}'' - a_{n+1}'')}_{a_{n+1}} \underbrace{c_{n+1}''}_{c_n} + \sum_{j=n+2}^N c_j'' (a_{j+1}'' - a_j'') \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1}'' - a_j'') c_j'' + (a_{n+1}'' - a_n'') c_n + (a_{n+1}'' - a_{n+1}'') c_n + \sum_{j=n+2}^N c_{j-1}'' (a_j'' - a_{j-1}'') \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) c_j + (a_{n+1} - a_n) c_n + \sum_{j=n+1}^N c_j (a_{j+1} - a_j) = I.
\end{aligned}$$

PROP: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier. On note $I(f) = \int_a^b f$

i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{E}([a, b]) \quad I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$

$$\left(\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \right)$$

Cela signifie que I est linéaire.

ii) Si $f \in \mathcal{E}([a, b])$ vérifie $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, alors $I(f) \geq 0$.

On dit que I est positive.

REM: $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$

iii) On a toujours $|I(f)| \leq (b-a) \|f\|_\infty$

iv) Si $c \in [a, b]$ alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (relation de Chasles)

v) $\forall f \in \mathcal{E}([a, b]), \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Attention: jusqu'à présent on a toujours travaillé sous l'hypothèse $a \leq b$ ($\int_a^a f = 0$)

PREUVE: i) Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b]), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On considère $\tau = \sigma_f \vee \sigma_g = (z_0, \dots, z_p)$

Sur chaque intervalle $[z_k, z_{k+1}]$, les fonctions f et g sont constantes: $f = c_k, g = d_k$

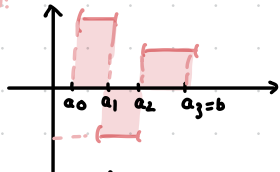
$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda c_k + \mu d_k \text{ et donc}$$

$$I(\lambda f + \mu g) = \sum_{k=0}^{p-1} (\lambda c_k + \mu d_k) (z_{k+1} - z_k) = \lambda \sum_{k=0}^{p-1} c_k (z_{k+1} - z_k) + \mu \sum_{k=0}^{p-1} d_k (z_{k+1} - z_k) = \lambda I(f) + \mu I(g)$$

$$ii) I(f) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j (a_{j+1} - a_j) \geq 0$$

$0 \leq f(x)$ pour les $x \in [a_j, a_{j+1}]$

REM:



$$I(f) = \underbrace{(a_1 - a_0) c_0}_{R_1} + \underbrace{(a_2 - a_1) c_1}_{-R_2} + \underbrace{(a_3 - a_2) c_2}_{+R_3}$$

$I(f)$ est une somme algébrique d'aire de rectangles

$$iii) I(f) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j (a_{j+1} - a_j)$$

$$\text{Or } |c_j| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) \leq b - a \text{ puisque } [a_j, a_{j+1}] \subset [a, b]$$

$$\text{Donc } |I(f)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} |c_j| (a_{j+1} - a_j)$$

$$\leq \|f\|_\infty \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j)$$

$$\leq (b-a) \|f\|_\infty$$

iv) Soit σ une subdivision associée à f
On considère $\tau = \sigma \vee \tau_c$

...

v) $\forall x \in [a, b]$, on a

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\Rightarrow - \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

NOTATION: Pour $a \leq b$, on sait ce que vaut $\int_a^b$ pour $f \in \mathcal{E}([a, b])$ si $a > b$, $\int_a^b f = ?$

Par Chasles, on doit avoir $\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0$, d'où $\boxed{\int_a^b f = - \int_b^a f}$

2) Cas des fonctions réglées

PROP: Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$ une fonction réglée, et (f_n) une suite de $\mathcal{E}([a, b])$ telle que $(f_n) \rightarrow f$ uniformément. La suite (I_n) définie par $I_n = \int_a^b f_n$ converge, et sa limite ne dépend pas du choix de la suite (f_n) .

PREUVE:

1) $\sum I_n$ converge

$\mathbb{R}$ est complet. Il suffit de montrer que (I_n) est de Cauchy.

Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

$$|I_p - I_q| = \left| \int_a^b f_p - \int_a^b f_q \right| = \left| \int_a^b f_p - f_q \right| \leq \|f_p - f_q\|_{\infty} (b-a)$$

Soit $\varepsilon > 0$. (f_n) converge vers f nous fournit un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq $\forall p, q \geq N(\varepsilon)$:

$$\|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon / (b-a)$$

$\Rightarrow$ Donc $|I_p - I_q| \leq \varepsilon$

Donc (I_n) converge vers un réel I .

2) Si (g_n) est une autre suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f . $\int_a^b g_n \rightarrow J$. Montrer $I = J$.

On considère la suite (h_n) définie par : $h_{2n} = f_n$

$$h_{2n+1} = g_n$$

$\Rightarrow (h_n)$ converge uniformément vers f , donc $\int_a^b h_n$ converge vers un réel K .

Or (h_n) admet:

$\rightarrow$ une sous-suite convergente vers I , donc $I = K$

$\rightarrow$ une sous-suite convergente vers J , donc $J = K$

Donc $I = J$ $\square$

(i.e., I et J sont des valeurs d'adhérence de $(\int_a^b h_n)$ donc $I = K$ et $J = K$)

DEF: Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$. On appelle intégrale de f et on note $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$, où (f_n) une suite quelconque de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f .

PROP: Les propriétés i), ii), iii) et iv) vues pour les fonctions en escalier sont également vraies pour les intégrales des fonctions réglées.

PREUVE: Passer à la limite!

$$\text{De plus, } \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

$$v) -|f| \leq f \leq |f|$$

$$\Rightarrow \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \|f_p - f_q\|_{\infty}$$

3) Cas particulier des fonctions continues

DEF: Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que l'application $F:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f lorsque:

i) F est dérivable sur $]a, b[$

ii) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$

De plus, si F_0 est une primitive de f sur $]a, b[$, alors f admet une infinité de primitives: ce sont les fonctions $F_0 + c$ où $c \in \mathbb{R}$

PROP: Soit $f \in C^0([a, b])$. Alors

$F_0: x \mapsto \int_a^x f$ est une primitive de f

En particulier, si F est primitive quelconque de f on a $\int_a^x f = F(x) - F(a)$

NOTATION: On note souvent $\int_a^x f - \int f dx = \{ \text{primitives de } f \}$

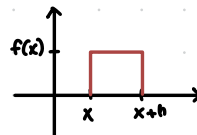
PREUVE: Soit $x \in]a, b[$ et $h \in \mathbb{R}$ tq $x+h \in]a, b[$

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| = \left| \int_a^{x+h} f - \int_a^x f - hf(x) \right| = \left| \int_x^{x+h} f - hf(x) \right|$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t) - hf(x) \right|$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \right|$$

$$\leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|$$



$$\rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

$\leq \varepsilon$ car f uniformément continue.

Comme f est continue sur le compact $[a, b]$, f est uniformément continue.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tq $\forall y_1, y_2, |y_1 - y_2| \leq \alpha \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tq si $|h| < \alpha$, alors $\forall t \in [x, x+h]$ on a $|t - x| \leq \alpha$ donc $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$

Donc, pour $|h| < \alpha$ on a $\left| \int_a^{x+h} f - \int_a^x f - hf(x) \right| \leq \int_x^{x+h} \varepsilon \leq |h| \varepsilon$

c. à. d.

$$\left| \int_a^{x+h} f - \int_a^x f - hf(x) \right| = o(h) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Cela prouve que F est dérivable en x , dérivée $f(x)$

Attention: si f n'est que réglée, on peut définir $F(x) = \int_a^x f$. Mais F n'a aucune raison d'être dérivable.

(pas une primitive) exemple: $\mathbb{1}_{[c, b]}$, $F(x) = \int_a^x f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ (x-c) & \text{si } x > c \end{cases}$

Cours 3 16/09/25

REM: Pour calculer $\int_a^b f$ avec f continue, il suffit de connaître une primitive explicite de f . On a alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

PROP: Soit $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 .

$$\text{On a } \int_a^b u(x) v'(x) = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \quad \int fg' = [fg] - \int fg'$$

PREUVE: $(uv)' = uv' + u'v$

$$\text{Donc } \int_a^b (uv)' = \int_a^b uv' + \int_a^b u'v$$

$$\text{et donc } uv(b) - uv(a) = \int_a^b uv' + \int_a^b u'v$$

$$\int_a^b f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

Δ! vérifier classes...

EXEMPLE: Calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) = [x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(x) = 0 + \int_0^{\pi/2} \cos(x) = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

PROP: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec f' continue et $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $\varphi'(t) > 0$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. On suppose de plus que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors $\int_a^b f(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

PREUVE: Soit F une primitive f sur $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$$

$$\text{Donc } \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t) = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)$$

REM: À propos de "dx" ou "dt"

"En physique" on note parfois $\psi'(t) = \frac{d\psi}{dt}(t)$

Pour simplifier on note x la fonction $\varphi \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \leadsto dx = x'(t)dt$

La formule de changement de variable devient $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$

III. Fonctions intégrables au sens de Riemann

1) Somme de Darboux

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ une subdivision de $[a, b]$

Pour $j \in \{0, \dots, N-1\}$ on note $m_j = \inf \{f(x), x \in [a_j, a_{j+1}[\}$

$M_j = \sup \{f(x), x \in [a_j, a_{j+1}[\}$

DEF: On appelle somme de Darboux inférieure (resp. supérieure) pour f associée à σ la quantité

$$D_-(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{N-1} m_j (a_{j+1} - a_j)$$

$$\text{resp } D_+(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j (a_{j+1} - a_j)$$

REM: Soit $\psi: x \mapsto \sum_{j=0}^{N-1} m_j \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[}(x)$ et $\Psi: x \mapsto \sum_{j=0}^{N-1} M_j \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[}(x)$

$$\text{On a } \psi \leq f \leq \Psi \text{ et } \int_a^b \psi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \Psi$$

EXEMPLE: Soit $f = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \mathbb{1}_{[a_j, a_{j+1}[}$ une fcn en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ la subdivision correspondante

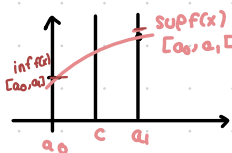
$$\text{on a } D_-(f, \sigma) = \int_a^b f = D_+(f, \sigma)$$

PROP: Si τ est plus fine que σ alors $D_-(f, \sigma) \leq D_-(f, \tau) \leq D_+(f, \tau) \leq D_+(f, \sigma)$

REM: Cela signifie en particulier que lorsqu'on raffine une subdivision σ

→ $D_-(f, \cdot)$ augmente

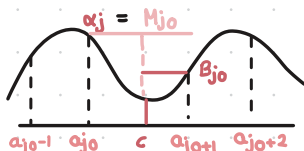
→ $D_+(f, \cdot)$ diminue



PREUVE: Pour toute subdivision τ on a $D_-(f, \tau) \leq D_+(f, \tau)$

Pour montrer les deux autres inégalités, on raisonne par récurrence sur le nombre de points supplémentaires

de τ par rapport à σ , et on peut se contenter de considérer le cas où τ contient un point de plus que σ , qu'on note c .



Si $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$, $\exists j_0 \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $c \in [a_{j_0}, a_{j_0+1}[$

$$\text{On a } D_+(f, \tau) = \sum_{j=0}^{j_0-1} (a_{j+1} - a_j) M_j + (c - a_{j_0}) \alpha_{j_0} + (a_{j_0+1} - c) \beta_{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) M_j$$

$$\text{où } \alpha_{j_0} = \sup_{x \in [a_{j_0}, c]} f(x) \leq \sup_{x \in [a_{j_0}, a_{j_0+1}[} f(x) \leq M_{j_0} \quad \text{et} \quad \beta_{j_0} \leq \sup_{x \in [c, a_{j_0+1}[} f(x) \leq \sup_{x \in [a_{j_0}, a_{j_0+1}[} f(x) \leq M_{j_0}$$

$$D_+(f, \tau) \geq \sum_{j=0}^{j_0-1} (a_{j+1} - a_j) M_j + \frac{(c - a_{j_0}) M_{j_0} + (a_{j_0+1} - c) M_{j_0}}{(a_{j_0+1} - a_{j_0}) M_{j_0}} + \sum_{j=j_0+1}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) M_j$$

$$\geq D_+(f, \sigma)$$

PROP: Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. L'ensemble $\{D_+(f, \sigma), \sigma \in \mathcal{F}\}$ admet une borne inférieure.

De même, l'ensemble $\{D_-(f, \sigma), \sigma \in \mathcal{F}\}$ admet une borne supérieure.

PREUVE: Soit $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$

$$D_-(f, \sigma) \leq D_-(f, \sigma \vee \tau) \leq D_+(f, \sigma \vee \tau) \leq D_+(f, \tau) \text{ car } \sigma \vee \tau \text{ est plus fine que } \sigma \text{ et } \tau$$

Donc $\{D_-(f, \sigma), \sigma \in \mathcal{F}\}$ est non vide et majoré; il admet une borne supérieure α telle que $\alpha \leq D_+(f, \tau)$ pour tout τ .

$$\text{Donc } \sup_{\sigma \in \mathcal{F}} D_-(f, \sigma) = \alpha \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}} D_+(f, \tau)$$

2) Fonctions intégrables au sens de Riemann

DEF: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée

On dit que f est Riemann intégrable lorsque $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} D_-(f, \sigma) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} D_+(f, \sigma)$

REM: Les fonctions en escalier sont Riemann intégrables

PROP (admise): Les fonctions réglées sont Riemann intégrables.

De plus, $\sup_{\sigma} D_-(f, \sigma) = \inf_{\sigma} D_+(f, \sigma) = \int_a^b f$ définie avant

PROP: f est Riemann-intégrable ssi $\forall \varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a, b]$ tel que $D_+(f, \sigma) - D_-(f, \sigma) < \varepsilon$

PREUVE: Supposons f Riemann intégrable. Soit $I = \sup_{\sigma} D_-(f, \sigma) = \inf_{\sigma} D_+(f, \sigma)$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \sigma_\varepsilon^+$ et σ_ε^- tq: $I - D_-(f, \sigma_\varepsilon^-) < \varepsilon/2$, $D_+(f, \sigma_\varepsilon^+) - I < \varepsilon/2$

Soit $Z_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^+ \vee \sigma_\varepsilon^-$. Z_ε est plus fine que σ_ε^+ et σ_ε^- donc

$$D_-(f, \sigma_\varepsilon^-) \leq D_-(f, Z_\varepsilon) \leq D_+(f, Z_\varepsilon) \leq D_+(f, \sigma_\varepsilon^+)$$

$$\begin{aligned} \text{or } D_-(f, Z_\varepsilon) - D_+(f, Z_\varepsilon) &\leq D_-(f, Z_\varepsilon) + D_+(f, Z_\varepsilon) - I - I \\ &\leq D_+(f, \sigma_\varepsilon^+) - I + D_-(f, \sigma_\varepsilon^-) + I \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

reciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \sigma_\varepsilon$ tq

$$D_+(f, \sigma_\varepsilon) - D_-(f, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\inf_{\sigma} (D_+(f, \sigma) - D_-(f, \sigma)) < \varepsilon$

$$\text{Donc } \inf_{\sigma} D_+(f, \sigma) - \sup_{\sigma} D_-(f, \sigma) = 0$$

DEF: Soit f une fonction Riemann intégrable. On note $\int_a^b f(x) dx$ le nombre $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} D_-(f, \sigma) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} D_+(f, \sigma)$

DEF: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée

Soit σ une subdivision de $[a, b]$

Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de points de $[a, b]$ tels que $a_j \leq x_j \leq a_{j+1}$

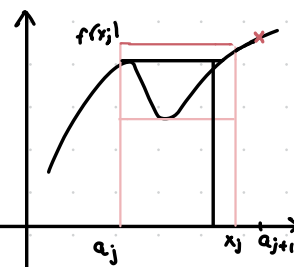
On note $R(f, \sigma, x) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) f(x_j)$. C'est la somme de Riemann pour f associée à σ et x .

$$\text{On a toujours } D_-(f, \sigma) \leq R(f, \sigma, x) \leq D_+(f, \sigma)$$

PROP: Soit $\forall n \in \mathbb{N}$ une subdivision σ_n de pas $\delta(\sigma_n)$. Si $\delta(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors pour toute fonction f Riemann intégrable, on a:

$$\begin{cases} D_-(f, \sigma_n) \rightarrow \int_a^b f \\ D_+(f, \sigma_n) \rightarrow \int_a^b f \end{cases}$$

$$\text{et donc } R(f, \sigma_n, x) \rightarrow \int_a^b f \text{ aussi.}$$



IV. Insuffisances de la R-intégrabilité

1) Pas assez de fctns R intégrables essentiellement, ça ne concerne que les fonctions bornées, qui sont continues par morceaux

Ex: fonction de Dirichlet

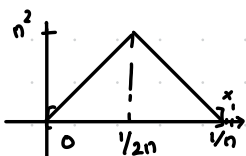
Soit $D: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$D_-(D, \sigma) = 0$ car chaque intervalle de σ contient un irrationnel

$D_+(D, \sigma) = 1$

Donc D n'est pas R-intégrable

2) Problème avec la convergence des suites de fonctions



f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$

$$\int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$$

Cours 4

Chapitre 2 - Parties mesurables de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Intro:

- regarder des schémas, mais l'idée est que pour l'intégrale de Riemann, on découpeait verticalement alors que pour Lebesgue, on va découper horizontalement.
- pb: les $A_k = f^{-1}([y_k, y_{k+1}[)$ peuvent être très compliqués. En tous cas, en général A_k n'est pas un intervalle.
- Ensuite, on va pouvoir dire $\int_a^b f$ est proche de $\sum_k \text{mes}(A_k) \times y_k$
- question suivante: que signifie $\text{mes}(A_k)$?

I. Mesure extérieure sur $\mathbb{R}$

1) Recouvrements

DEF: Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (partie de $\mathbb{R}$)

On dit qu'une famille d'ouverts $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert lorsque $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$

DEF: On dit qu'un ensemble A est **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$

Autrement dit: on peut numéroter avec les entiers naturels, tous les éléments de A

EXEMPLES:

- $\mathbb{N}$ est dénombrable, $\mathbb{Z}$ est dénombrable ($\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$)
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
~ on peut identifier avec un couple (p, q) , $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrables
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

PROP: Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on peut trouver un recouvrement dénombrable de E par des intervalles ouverts:

- ex: ① $E = [a, +\infty[$, $V_k =]a - \frac{1}{k}, a + k[\Rightarrow E \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} V_k$
- ② $E =]a, b]$, $V_k =]a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}[\Rightarrow]a, b] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} V_k$

PREUVE: Cela découle du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. I.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver deux rationnels r_1, r_2 tels que $r_1 < x < r_2$

Soit $\mathcal{A} = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, r_1 < r_2 \text{ et }]r_1, r_2[\cap E \neq \emptyset\}$

Tout d'abord, $\mathcal{A} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ qui est dénombrable donc $\mathcal{A}$ est dénombrable

Soit $x \in E$. Il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tq $r_1 < x < r_2$. En particulier $]r_1, r_2[\cap E \neq \emptyset$, donc $(r_1, r_2) \in \mathcal{A}$

Autrement dit, $E \subset \bigcup_{(r_1, r_2) \in \mathcal{A}}]r_1, r_2[$ cqfd

PROP [Borel - Lebesgue]: Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

De tout recouvrement $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $[a, b]$, on peut extraire un recouvrement fini.

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ tels que $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$

2) Mesure extérieure

Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{R}_E$ des recouvrements dénombrables constitués d'intervalles ouverts pour E n'est pas vide. On peut définir le nombre

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) \text{ tq } \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[\in \mathcal{R}_E \right\}$$

REM: La borne inf. existe car l'ensemble est non vide et minoré par 0

REM: si $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $E_1 \subset E_2$ alors $\lambda^*(E_1) \leq \lambda^*(E_2)$

En effet si $\mathcal{R}_2$ est un recouvrement de E_2 , alors $\mathcal{R}_2$ est aussi un recouvrement de E_1 .

L'ensemble dont on prend la borne inf pour E_1 contient l'ensemble dont on prend la borne inf pour E_2 . $\lambda^*(E_1) \leq \lambda^*(E_2)$ $E_1 \subset E_2$

PROP. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $[a, b]$ l'un des intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$.

On a : $\lambda^*(I_a, b) = b - a$

PREUVE. On mq $\lambda^*(I_a, b) \leq b - a$

$$\lambda^*(I_a, b) = \inf \left\{ \sum_K (b_K - a_K) : (\exists a_K, b_K) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(\exists a_K^\varepsilon, b_K^\varepsilon)_{K \in \mathbb{N}}$ tq $\lambda^*(I_a, b) \leq \sum_{K \in \mathbb{N}} (b_K^\varepsilon - a_K^\varepsilon) + \varepsilon$

C'est le cas en particulier pour $(\exists a - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2)$

On a $\sum_j (b_j^\varepsilon - a_j^\varepsilon) = b_1^\varepsilon - a_1^\varepsilon = (b + \varepsilon/2) - (a - \varepsilon/2) = b - a + \varepsilon$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda^*(I_a, b) \leq b - a + \varepsilon$ d'où $\lambda^*(I_a, b) \leq b - a$

• on mq $\lambda^*(I_a, b) \geq b - a$

cas nt: $I_a, b = [a, b]$. Soit $(\exists a_j, b_j)$, une famille qui recouvre $[a, b]$. Pour Borel - Lebesgue, je peux en extraire un recouvrement fini de $[a, b]$

Il existe $j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ tels que $[a, b] \subset \bigcup_{K=1}^n]a_{j_K}, b_{j_K}[$

Quitter à renuméroter, on peut supposer que les a_{j_K} sont rangés par ordre croissant, de même que les b_{j_K} .

$$\begin{array}{ccccccc} & a_{j_1} & & a_{j_2} & & \dots & & a_{j_n} & & b_{j_n} \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ a & & b_{j_1} & & b_{j_2} & & & & & b \end{array}$$

$$\sum_{K=1}^n (b_{j_K} - a_{j_K}) = (b_{j_n} - a_{j_n}) + (b_{j_{n-1}} - a_{j_{n-1}}) + \dots + (b_{j_1} - a_{j_1})$$

$$= b_{j_n} + (b_{j_{n-1}} - a_{j_n}) + (b_{j_{n-2}} - a_{j_{n-1}}) + \dots + (b_{j_1} - a_{j_2}) - a_{j_1} \geq b - a$$

Enfin, $\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j - a_j \geq \sum_{K=1}^n b_{j_K} - a_{j_K} \geq b - a$, d'où $\lambda^*([a, b]) \geq b - a$

cas général: $[a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2] \subset I_a, b \subset [a, b] \forall \varepsilon > 0$

Donc $\lambda^*([a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2]) \leq \lambda^*(I_a, b) \leq \lambda^*([a, b]) \leq b - a$

$\Rightarrow$ par double inégalité, on a bien $\lambda^*(I_a, b) = b - a$

EXEMPLE:

① $E = [0, 1] \cup]2, 3]$, $\lambda^*(E) = ?$

$E \subset]-2, 1 + \varepsilon[\cup]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[\forall \varepsilon > 0$

" $\exists a_1, b_1 [\cup] a_2, b_2 [$

$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) = 2\varepsilon + 1 + 2\varepsilon = 1 + 4\varepsilon$

donc $\lambda^*(E) \leq 1 + 4\varepsilon \forall \varepsilon > 0$ et $\lambda^*(E) \leq 1$

Enfin $[0, 1] \subset E$ donc $\lambda^*([0, 1]) \leq \lambda^*(E)$

d'où $\lambda^*(E) = 1$

② $E = \{a\}$ $\lambda^*(E) = 0$

En effet $E \subset [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$

donc $\lambda^*(E) \leq 2\varepsilon \forall \varepsilon > 0$

donc $\lambda^*(E) = 0$

③ $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$ bien que $\mathbb{Q}$ soit dense ds $\mathbb{R}$ En effet, $\mathbb{Q}$ est dénombrable : $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$

Soit $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n \in]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}[= I_n$

La famille $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement dénombrable de $\mathbb{Q}$ par des intervalles ouverts!

Donc $\lambda^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) - (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$

Finalement, $(\varepsilon \rightarrow 0)$, $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$

④ $E_1 = [0, 2]$, $E_2 = [1, 3]$

d'où $\lambda^*(E_1) = 2$ et $\lambda^*(E_2) = 2$

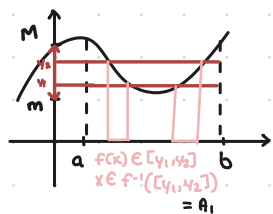
mais $\lambda^*(E_1 \cup E_2) = \lambda^*([0, 3]) = 3$

REM. si E est dénombrable, $\lambda^*(E) = 0$

$\lambda^*(E_1 \cup E_2) \leq \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$

Cours 5 30/09/25

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$



$$\int_a^b f \sim \sum y_k \text{mes } A_j$$

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} (b_j - a_j) \text{ où } \bigcup_{j \in \mathbb{N}}]a_j, b_j[\text{ recouvre } E \right\}$$

$$\lambda^*([a, b]) = b - a$$

3) Propriétés

PROP: L'application $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ vérifie les 4 propriétés suivantes :

i) $\forall E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), E \subset F \Rightarrow \lambda^*(E) \leq \lambda^*(F)$

ii) $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad \lambda^*(E + x_0) = \lambda^*(E)$

(la mesure extérieure est invariante par translation)

$$\{E + x_0\} = \{y \in \mathbb{R} + x_0 \mid \exists x \in E \text{ avec } y = x + x_0\}$$

iii) $\lambda^*([a, b]) = b - a$

iv) Si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable des parties de $\mathbb{R}$, $\lambda^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k \lambda^*(E_k)$ [λ^* est sous-additive]

Ex: $E_1 = [0, 2]$ $E_2 = [1, 3]$ $E_1 \cup E_2 = [0, 3]$ $3 \leq 4$

Pas d'égalité en général.

PREUVE DE iv: Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un recouvrement dénombrable $(I_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts de E_k tel que

$$\lambda^*(E_k) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(I_{k,j}) - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

↑
pour E_k

$$\text{On a } E_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{k,j}$$

$$\text{Donc pour } E = \bigcup_k E_k, \text{ on a } E \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{k,j} \right)$$

$$\text{On peut écrire } E \subset \bigcup_{(k,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} I_{k,j}$$

dénombrable

Donc par définition,

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{(k,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \lambda^*(I_{k,j}) = \sum_k \sum_j \lambda^*(I_{k,j}) \quad \text{où } I_{k,j} =]a_{k,j}, b_{k,j}[$$

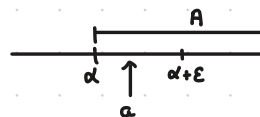
$$\leq \sum_k \left(\lambda^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right)$$

$$\leq \sum_k \lambda^*(E_k) + \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \sum_k \lambda^*(E_k) + 2\varepsilon$$

Conclusion: $\forall \varepsilon > 0, \lambda^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k \lambda^*(E_k) + 2\varepsilon$

où $\lambda^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k \lambda^*(E_k)$



$$\alpha = \inf A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in A$$

$$\text{tq } \alpha \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[$$

REM: Si $E = [a, +\infty[$, on a $[a, n] \subset E$ pour tout n

Donc $\lambda^*(E) \geq \lambda^*([a, n]) = n - a$ pour tout n , donc $\lambda^*(E) = +\infty$

II. Parties mesurable de $\mathbb{R}$

1) Définition additivité

DEF: On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est mesurable (Lebesgue mesurable) lorsque

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

(catharodory)

REM: On sait déjà que $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$
Donc $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$



→ Si $\lambda^*(A) = +\infty$

$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ est toujours vrai

→ Soit $(E_k)_k$ une famille dénombrable de parties mesurables de $\mathbb{R}$, si les E_k sont tous 2 à 2 disjoints ($E_{k_1} \cap E_{k_2} = \emptyset$ pour $k_1 \neq k_2$).
Alors $\lambda^*(\bigcup_k E_k) = \sum_k \lambda^*(E_k)$

REM: On peut trouver une famille (E_k) dénombrable de parties de $\mathbb{E}$ telle que $\lambda^*(\bigcup_k E_k) < \sum_k \lambda^*(E_k)$
L'hypothèse de mesurabilité est essentielle.
(mais c'est dur)

PREUVE: Soit (E_k) une famille dénombrable de parties mesurables de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On veut ma $\lambda^*(\bigcup_{k=1}^n A \cap E_k) = \sum_{k=1}^n \lambda^*(A \cap E_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

Par récurrence :

→ $n=1$ $\lambda^*(A \cap E_1) = \lambda^*(A \cap E_1)$ est vrai

→ Supposons que (1) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a : $\lambda^*(\bigcup_{k=1}^{n+1} A \cap E_k) = \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n A \cap E_k \cap E_{n+1}) + \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n A \cap E_k \cap E_{n+1}^c)$ car E_{n+1} mesurable (2)

$$\text{Or } \bigcup_{k=1}^n (A \cap E_k) \cap E_{n+1} = \bigcup_k (A \cap E_k \cap E_{n+1}) = A \cap E_{n+1}$$

$$\bigcup_{k=1}^n (A \cap E_k) \cap E_{n+1}^c = \bigcup_{k=1}^n A \cap (E_k \cap E_{n+1}^c) = \bigcup_{k=1}^n A \cap E_k$$

Donc (2) devient

$$\lambda^*(\bigcup_{k=1}^{n+1} A \cap E_k) = \lambda^*(A \cap E_{n+1}) + \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n A \cap E_k)$$

$$\text{Avec l'HR, on trouve } \lambda^*(\bigcup_{k=1}^{n+1} A \cap E_k) = \lambda^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \lambda^*(A \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda^*(A \cap E_k)$$

$$(*) \text{ En particulier, pour } A = \mathbb{R}, \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n \mathbb{R} \cap E_k) = \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \lambda^*(\mathbb{R} \cap E_k) = \sum_{k=1}^n \lambda^*(E_k)$$

(*) On fait $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n E_k) ?$$

$$\text{Comme } \sum_{k=1}^n \lambda^*(E_k) = \lambda^*(\bigcup_{k=1}^n E_k) \leq \lambda^*(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k)$$

La suite des $(\lambda^*(\bigcup_{k=1}^n E_k))_n$ est croissante et majorée. Donc elle a une limite dans $[0, +\infty]$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \lambda^*(E_k) \leq \lambda^*(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k)$$

2) La tribu de Lebesgue

[tribu = σ -algèbre]

DEF: On note $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des parties Lebesgue mesurables sur $\mathbb{R}$.

REM: $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$: il y a des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas Lebesgue mesurables.

Ce n'est pas parce qu'on a mal travaillé. La raison fondamentale, c'est que l'on a besoin de l'axiome du choix.

PROP: $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ est une tribu, c.à.d. qu'elle vérifie les 3 propriétés:

i) $\mathbb{R} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

ii) si $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, alors $E^c \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

iii) si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, alors $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

De manière générale, si X est un ensemble, une tribu sur X est un sous ensemble de $\mathcal{P}(X)$ qui qui vérifie (i), (ii), et (iii)

Conséquences immédiates:

→ $\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$: $\emptyset = \mathbb{R}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ donc $\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ d'après i) et ii)

→ si $(E_k) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$: $(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k^c)$ est dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

Donc $(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k^c)^c \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Or $(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k^c)^c = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (E_k^c)^c = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$

PREUVE:

i) On doit mq $A = \mathbb{R}$ vérifie Carathéodory:

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$

$\lambda^*(A \cap \mathbb{R}) \quad \lambda^*(A \cap \mathbb{R}^c)$

$\lambda^*(A) \quad \lambda^*(\emptyset) = 0$

Donc l'égalité est vraie.

ii) Soit $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. On veut mq E^c vérifie Carathéodory: soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E^c) + \lambda^*(A \cap (E^c)^c)$

or $\lambda^*(A \cap E^c) = \lambda^*(A \cap (E^c)^c) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) = \lambda^*(A)$ car $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

iii) Cas de 2 ensembles: Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

A-t-on $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$?

On peut écrire $I = \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$

Or $(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) = (A \cap E_1) \cap E_2^c \cup (A \cap E_1) \cap E_2 \cup (A \cap E_2)$

$E_2^c \cup E_2 = \mathbb{R}$
 $(A \cap E_1) \cap \mathbb{R} = (A \cap E_1) \cap E_2 \cup (A \cap E_1) \cap E_2^c$

$= (A \cap E_1) \cap E_2^c \cup (A \cap E_2)$

Donc $I \leq \lambda^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \lambda^*(A \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$

$\leq \lambda^*(A \cap E_2^c) + \lambda^*(A \cap E_2) = \lambda^*(A)$ car $(E_2) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

Finalement, $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$

Donc $E_1 \cup E_2$ est mesurable. Cette inégalité suffit.

↓: $\lambda^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$
 $= \lambda^*((A \cap E_2^c) \cap E_1) + \lambda^*((A \cap E_2^c) \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_2^c)$ car E_1 est mesurable

(*) Cas d'une réunion finie de parties mesurables par récurrence

(*) Cas d'une réunion dénombrable: soit $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de parties mesurables.

$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ et $F_n = \bigcup_{k=0}^n E_k$ pour tout n .

On veut mq E est mesurable. On sait que les F_n sont mesurables.

→ La suite (F_n) est croissante: $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout n

→ $\bigcup_n F_n = E$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap F_n) + \lambda^*(A \cap F_n^c)$ car F_n mesurable

$$\geq \lambda^*(A \cap F_n) + \lambda^*(A \cap E^c) \text{ car } F_n^c \supset E^c \quad (?)$$

Comme $(A \cap F_n) \nearrow (A \cap E)$, on a $\lambda^*(A \cap F_n) \longrightarrow \lambda^*(A \cap E)$

Donc en passant à la limite dans (3), on obtient: $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$

Ce qui prouve que E vérifie Carathéodory.

3) Exemples de parties mesurables

REM: Il est très difficile d'exhiber des parties de $\mathbb{R}$ non-mesurables.

PROP: Sont mesurables:

- i) Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris les demi-droites)
- ii) Tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Tous les fermés aussi
- iii) Si M est mesurable de mesure extérieure nulle, alors toute partie de M est également mesurable de mesure ext. nulle (caractéristique de la tribu de Lebesgue)

Cours 6 07/10/25

Mesure extérieure:

$$\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$\rightarrow \lambda^*([a, b]) = b - a$$

$$\rightarrow \lambda^*(E + x_0) = \lambda^*(E)$$

$$\rightarrow \lambda^*(\emptyset) = 0$$

$$\rightarrow E \subset F \Rightarrow \lambda^*(E) \leq \lambda^*(F)$$

$$\rightarrow \lambda^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_k) \text{ sous additivité}$$

DEF: $E \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est mesurable lorsque $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties mesurables.

$\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une tribu

$\rightarrow$ Si (E_k) sont mesurables et 2 à 2 disjoints $\lambda^*\left(\bigcup E_k\right) = \sum \lambda^*(E_k)$

PROP: Soit $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille croissante parties de $\mathbb{R}$.

$$\text{On a } [0, +\infty] \ni \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^*(E_k) = \lambda^*\left(\bigcup_k E_k\right)$$

REM: $(E_k)_k$ est dite croissante lorsque $E_k \subset E_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

PREUVE: $\rightarrow$ Comme λ^* est croissante, $(\lambda^*(E_k))_k$ est également croissante.

Donc ou bien $(\lambda^*(E_k))_k$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, ou bien $\lambda^*(E_k) \rightarrow +\infty$

$\rightarrow$ Soit $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$

Puisque $E_k \subset E$ pour tout k , $\lambda^*(E_k) \leq \lambda^*(E)$

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^*(E_k) \leq \lambda^*(E)$

$\rightarrow$ Soit $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^*(E_k)$

Si $L = +\infty$, il n'y a rien à démontrer.

On se concentre sur le cas où $L < +\infty$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille d'intervalles ouverts bornés $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tels que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(I_j) \geq \lambda^*(E) - \varepsilon$

à corriger

- Pour chaque j , on note $A_j = \{k \in \mathbb{N}, I_j \cap E_k \neq \emptyset\}$
- La famille $\{I_k\}_{k \in A_j}$ est un recouvrement de E_k par une famille d'intervalles ouverts bornés.
- Donc $\lambda^*(E_j) \leq \sum_{k \in A_j} \lambda^*(I_k) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(I_j) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$ pour tout j
- Donc en faisant $j \rightarrow +\infty$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda^*(E_j) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$

3) Exemples de parties mesurables :

PROP: Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable

PREUVE: $\rightarrow$ On commence par le cas où $I =]e, +\infty[$ avec $e \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ tjs vrai par sous-additivité

Mq I vérifie la propriété de Carathéodory : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A \cap I^c)$

Il suffit de considérer le cas où $\lambda^*(A) < +\infty$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un recouvrement $(]a_j, b_j[)_{j \in \mathbb{N}}$ dénombrable par des ouverts de A tq $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(]a_j, b_j[) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$

Donc $\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j - a_j \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$

$$\text{Or } \lambda(A \cap I) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}}]a_j, b_j[\cap I\right)$$

$$\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(I \cap]a_j, b_j[)$$

$$\lambda(A^c \cap I) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}}]a_j, b_j[\cap I^c\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(I \cap]a_j, b_j[)^c$$

$$\text{Donc } \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} (\lambda^*(I \cap]a_j, b_j[) + \lambda^*(I^c \cap]a_j, b_j[)) \quad (1)$$

$I =]e, +\infty[$: si $e > b_j$, $I \cap]a_j, b_j[= \emptyset$

si $e \leq a_j$, $I \cap]a_j, b_j[=]a_j, b_j[$

si $a_j < e < b_j$, $I \cap]a_j, b_j[=]e, b_j[$

De même : $I^c \cap]a_j, b_j[= \emptyset$ si $e \leq a_j$

$=]a_j, e]$ si $a_j < e < b_j$

$=]a_j, b_j[$ si $e > b_j$

$$\text{Donc (1) devient } \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A \cap I^c) \leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ e \leq b_j}} \lambda^*(I \cap]a_j, b_j[) + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ e > a_j}} \lambda^*(I^c \cap]a_j, b_j[)$$

$$\leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ a_j \leq e \leq b_j}} \lambda^*(]a_j, b_j[\cap I) + \lambda^*(]a_j, b_j[\cap I^c) + \sum_{e > b_j} \lambda^*(]a_j, b_j[) \quad \text{I}$$

$$+ \sum_{e < a_j} \lambda^*(]a_j, b_j[) \quad \text{II}$$

$$\leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ a_j < e < b_j}} \lambda^*(]e, b_j[) + \lambda^*(]a_j, e]) + \text{I} + \text{II}$$

$$\leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ a_j \leq e \leq b_j}} (b_j - e) + (e - a_j) + \sum_{a_j > e} b_j - a_j + \sum_{b_j < e} b_j - a_j$$

$$\leq \sum_j (b_j - a_j) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A \cap I^c) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient bien Carathéodory

$\rightarrow$ cas des autres intervalles

ceux-ci peuvent s'écrire à partir de demi-droites ouvertes en effectuant les opérations de passage au complémentaire, réunion et intersection dénombrable

$$\text{ex: }]a, b] =]a, +\infty[\cap]-\infty, b]$$

$$=]a, +\infty[\cap (]b, +\infty[)^c$$

$$[a, b] = [a, +\infty[\cap]-\infty, b]$$

$$= ([a, +\infty[\cap]-\infty, a - \frac{1}{n}]) \cap]b, +\infty[)^c$$

$$]-\infty, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, +\infty[$$

PROP: Les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}$ sont mesurables

PREUVE: → Les fermés sont les complémentaires des ouverts. Il suffit de prouver que les ouverts sont mesurables.
Or tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts (admis)

PROP: Soit $N \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda^*(N) = 0$

Alors toute partie $E \subseteq N$ est mesurable, avec $\lambda^*(E) = 0$

PREUVE: → D'abord, si $E \subseteq N$, $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(N)$. Donc $\lambda^*(E) = 0$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. $\lambda^*(A \cap E) \leq \lambda^*(A \cap N) \leq \lambda^*(N) = 0$

Donc $\lambda^*(A \cap E^c) \leq \lambda^*(A)$

Ainsi: $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E^c) + 0$

$\geq \lambda^*(A \cap E^c) + \lambda^*(A \cap E)$

Donc E est bien mesurable

4) Un exemple d'ensemble non mesurable

(*) On va définir et étudier l'ensemble de Vitali:

sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, je définis une relation binaire $\mathcal{R}$ par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

Cette relation est réflexive $x \mathcal{R} x$ pour tout x .

Elle est symétrique: $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$

Elle est transitive: $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \rightarrow x \mathcal{R} z$.

C'est une relation d'équivalence. On note $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in [0, 1]$ pour $\mathcal{R}$.

$[x] = \{y \in [0, 1], x - y \in \mathbb{Q}\} = \{x + q \in [0, 1], q \in \mathbb{Q}\}$

Au passage, pour tout $x \in [0, 1]$, $[x]$ est dénombrable

L'ensemble $[0, 1] / \mathcal{R}$ des classes d'équivalence est donc infini non dénombrable

L'axiome du choix permet de définir l'ensemble V (de Vitali) comme constitué d'exactly un élément de chaque classe d'équivalence
(Attention: il n'existe pas d'algorithme qui permette de faire ce choix)

Pour montrer que V ne peut pas être mesurable, on va utiliser l'invariance par translation de λ^* .

→ On peut écrire $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Je note $V_n = V + r_n$ pour $n \geq 1$.

→ $\lambda^*(V_n) = \lambda^*(V)$

→ si $n \neq m$, $V_n \cap V_m = \emptyset$ i.e. les V_n sont 2 à 2 disjoints

→ $[0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ puisque $V \subset [0, 1]$ et $r_n \in [-1, 1]$

→ Supposons que V soit mesurable. Les V_n aussi. Puisqu'ils sont 2 à 2 disjoints, $\lambda^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^*(V_n)$ (2)

→ Or $\lambda^*([0, 1]) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq 1} V_n\right) \leq \lambda^*([-1, 2])$

$\sum_{n \geq 1} \lambda^*(V_n)$

Supposons que $\lambda^*(V) = 0$. Alors $\lambda^*(V_n) = 0$. Alors $\sum \lambda^*(V_n) = 0$, c'est absurde (à cause de la 1^{ère} inégalité)

Donc $\lambda^*(V) \neq 0$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^*(V_n) = +\infty$, c'est également absurde.

Donc (2) est fausse et V ne peut pas être mesurable.

DEF: On appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ l'application $\lambda: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$: $\lambda(E) = \lambda^*(E)$
pour $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$

PROP: Soit $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties de $\mathbb{R}$, mesurables

Si $E_j \subset E_{j+1}$ partout j alors $\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda(E_j) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ [thm de croissance monotone]

DEF: On appelle mesure de Lebesgue l'application $\lambda: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\lambda(E) = \lambda^*(E)$; $\lambda^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} = \lambda$

5) Autres tribus, autres mesures

DEF: Soit X un ensemble.

Un sous ensemble C de $\mathcal{P}(X)$ est une tribu lorsque

- i) $X \in C$
- ii) si $E \in C$, alors $E^c = X \setminus E \in C$
- iii) si $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in C$

EXEMPLE: $\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une tribu sur $\mathbb{R}$

$\rightarrow C = \{\emptyset, X\}$ est une tribu sur X

$\rightarrow \mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X

$\rightarrow$ Soit $A \in \mathcal{P}(X)$, $C = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ est une tribu. C'est la plus petite tribu qui contient A .

PROP: L'intersection d'une famille de tribus est une tribu.

ex: ? examen (2 tribus)

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus de $\mathcal{E}$ sur I (I est un ensemble quelconque)

On pose $T = \{A \subset E; A \in \mathcal{T}_i \forall i \in I\}$ (Test bien l'intersection des tribus $\mathcal{T}_i$, $i \in I$)

On montre que T est bien une tribu:

$\rightarrow \emptyset \in T$ car $\emptyset \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$

$\rightarrow T$ stable par complémentaire car, si $A \in T$, on a $A \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$, donc $A^c \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$ (car $\mathcal{T}_i$ est stable par passage au complémentaire), donc $A^c \in T$.

$\rightarrow T$ est stable par union dénombrable, car si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, on a $A_n \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ (car $\mathcal{T}_i$ est stable par union dénombrable), donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

PROP: Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X . Il existe une tribu C telle que si C' est une tribu contenant $\mathcal{E}$ alors $C \subset C'$

DEF: La tribu C donnée par cette proposition s'appelle tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

PREUVE: L'ensemble des tribus qui contiennent $\mathcal{E}$ n'est pas vide: il contient $\mathcal{P}(X)$ par exemple.

Soit $C = \bigcap_{C' \text{ contient } \mathcal{E}} C'$

C est une tribu qui convient.

DEF: Soit $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}$ la famille de tous les ouverts de X . On appelle tribu de Borel la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ses éléments sont appelés boréliens de $\mathbb{R}$.

Attention: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R})$

(pas complète) (complète)

En particulier, il existe des sous-ensembles F d'une partie Lebesgue mesurable N de mesure nulle qui ne sont pas des Boréliens (cf. TD4-ensemble de Cantor)

DEF: Soit $\mu: C \rightarrow [0, +\infty]$ une application.

On dit que μ est une mesure (positive) lorsque :

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Pour toute famille dénombrable $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C 2 à 2 disjoints, on a : $\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(E_j) \in [0, +\infty]$
(μ est σ -additive)

EXEMPLE: $\lambda: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure

$\rightarrow \lambda^*, P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ n'est pas une mesure; λ^* est seulement sous additive

$\rightarrow \delta_n: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\delta_n(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in E \text{ est une mesure de Dirac en } a. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\rightarrow X = \mathbb{N}$. $\chi: P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\chi(E) = \text{card } E$ est une mesure sur $P(\mathbb{N})$, appelée mesure de comptage.

Vocabulaire: Soit X un ensemble, et C une tribu sur X . On dit (X, C) est un espace mesurable (NPC avec partie mesurable)
si de plus $\mu: C \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure, on dit que le triplet (X, C, μ) est un espace mesuré.

III. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables.

1) Définitions, exemples

DEF: Soit $E \in P(\mathbb{R})$ et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est mesurable lorsque $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\left] \alpha, +\infty \right[)$ est Lebesgue mesurable.

REM: Pour que $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ soit mesurable, $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} f^{-1}(\left] -\alpha, +\infty \right[)$ doit être mesurable.

REM: De manière générale, si (X, C_X) et (Y, C_Y) sont des espaces mesurables, et $f: X \rightarrow Y$ une application.

On dit que f est mesurable lorsque $\forall B \in C_Y$, $f^{-1}(B) \in C_X$.

(tribu la plus grosse possible au départ,
la plus petite possible à l'arrivée)

{ ici, on considère le cas où $X = \mathbb{R}$, $C_X = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $Y = \mathbb{R}$, $C_Y = B(\mathbb{R})$

PROP: Une application $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable ssi :

- i) ou bien $f^{-1}(\left] \alpha, +\infty \right[)$ est mesurable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- ii) ou bien $f^{-1}(\left] -\infty, \alpha \right[)$ est mesurable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- iii) Ou bien $f^{-1}(\left] -\infty, \alpha \right[)$ est mesurable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

PV: facile

Cas particulier: si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, et $\left] \alpha, \beta \right[\subset \mathbb{R}$, alors $f^{-1}(\left] \alpha, \beta \right[)$ est mesurable.

En effet, $\left] \alpha, \beta \right[= \left] \alpha, +\infty \right[\cap \left] -\infty, \beta \right[$

$$\text{Donc } f^{-1}(\left] \alpha, \beta \right[) = f^{-1}(\left] -\infty, \beta \right[\cap \left] \alpha, +\infty \right[) = \underbrace{f^{-1}(\left] -\infty, \beta \right[)}_{\text{mesurable}} \cap \underbrace{f^{-1}(\left] \alpha, +\infty \right[)}_{\text{mesurable}}$$

PROP: Soit $E \subset \mathbb{R}$. La fonction $1_E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable ssi E est Lebesgue mesurable.

PREUVE: $E = 1_E^{-1}(\{1\}) = 1_E^{-1}(\left] 0, +\infty \right[)$ est mesurable si 1_E l'est.

* Réciproquement, si E est Lebesgue mesurable. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$1_E^{-1}(\left] \alpha, +\infty \right[) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

donc est mesurable.

2) Opérations sur les fonctions mesurables

PROP: Soit $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Soit $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et $h:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors: i) h est mesurable

ii) si $f(x) \in]a, b[$ pour tout $x \in E$, alors $h \circ f$ est bien définie et mesurable

iii) $f + g$ est mesurable

iv) fg est mesurable

PREUVE: i) $h^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, donc c'est un ouvert.

Donc $h^{-1}(] \alpha, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(h \circ f)^{-1}(] \alpha, +\infty[) = f^{-1}(h^{-1}(] \alpha, +\infty[))$

$$\left(\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} &]a, b[\\ E & \xleftarrow{f^{-1}} &]a, b[\end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ & \xleftarrow{h^{-1}} &] \alpha, +\infty[\end{array} \right)$$

Or $h^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ est un ouvert, donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Puisque $f: (E, \mathcal{L}(E)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, $f^{-1}(h^{-1}(] \alpha, +\infty[))$ est Lebesgue mesurable.

Attention: h mesurable ne suffit pas (on sait que $f^{-1}(\cdot)$ est mesurable, mais pas $\mathcal{L}(\mathbb{R})$)

$$iv) (f \circ g)^{-1}(] \alpha, +\infty[) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f(x) > r\} \cap \{g(x) > \alpha - r\}$$

$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{f^{-1}(]r, +\infty[)}_{\text{mesurable}} \cap \underbrace{g^{-1}(] \alpha - r, +\infty[)}_{\text{mesurable}} \quad \text{est mesurable.}$$

$$iv) fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2].$$

Soit $h: x \mapsto x^2$ est continue. Donc $h \circ (f+g) = (f+g)^2$ est mesurable par ii), de même que $h \circ f = f^2$ et $h \circ g = g^2$.

Donc fg s'écrit comme somme de fonctions mesurables.

$\Rightarrow$ D'après iii) elle est mesurable.

PROP: Soit $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

Sont mesurables: i) $|f|$

ii) $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ (où: f^+ est la partie positive de f)

iii) $\max(f, g)$, $\min(f, g)$

PROP: Soit $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables.

i) Les fonctions suivantes, de E dans $[-\infty, +\infty]$ sont mesurables

$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

ii) Je note $A = \{x \in E; \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)\}$

Alors, $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ définie par $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ est mesurable.

REM: A est exactement la partie de E où (f_n) converge simplement. Ce que dit ii), c'est que là où elle existe la limite simple est mesurable.

Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

I. Intégrale des fonctions étagées positives

1) Fonctions étagées

DEF: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est étagée lorsque

- i) f prend un nombre fini de valeurs $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+([0, +\infty])$
- ii) $\forall j \in \{1, \dots, n\}, A_j = f^{-1}(\{c_j\})$ est mesurable

DEF: Soit f une fonction étagée.

On appelle intégrale de Lebesgue de f la quantité:

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = \sum_{c \in f(\mathbb{R})} c \cdot \lambda(f^{-1}(\{c\})) = \sum_{c \in f(\mathbb{R})} c \times \lambda(f=c)$$

REM: une fonction positive f s'écrit

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

si les c_j sont distincts, cette écriture porte le nom d'écriture canonique de $f \in \mathcal{E}^+(\mathbb{R})$

- $X = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^n A_j)$, ceci oblige X mesurable

PROP: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application mesurable, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}^+(X)$ qui est croissante et qui converge simplement vers f .
(fonctions étagées positives)

[preuve: poly]

2. Intégrale de Lebesgue de fonctions étagées positives

DEF: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction étagée positive. On appelle intégrale de Lebesgue de f la quantité:

$$\int_X f d\lambda = \int_X f(x) d\lambda(x) = \sum_{c \in f(X)} c \lambda(f^{-1}(\{c\})) \in [0, +\infty]$$

avec la convention $0 \times \lambda(A) = 0 \quad \forall A$ mesurable y compris si $\lambda(A) = +\infty$

REM: Pour la fonction nulle sur $X = \mathbb{R}$ on a $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = 0 \times \lambda(\mathbb{R}) = 0$

Cette convention permet aussi d'affirmer que pour $f \in \mathcal{E}^+(\mathbb{R})$, $\int f d\lambda = +\infty$ ssi $\exists c > 0$ tq $\lambda(f^{-1}(\{c\})) = +\infty$

Par exemple, dans le cas où $f = \mathbb{1}_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) d\lambda(x) = \lambda(A)$$

D'ailleurs, si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction étagée positive, et $A \subset X$ une partie Lebesgue-mesurable, on note:

$$\int_A f d\lambda = \int_X f \mathbb{1}_A d\lambda$$

En particulier, $\forall [a, b] \quad \int_{[a, b]} d\lambda = \lambda([a, b]) = b - a$

Si $N \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable de mesure nulle

$\forall f \in \mathcal{E}^+(\mathbb{R})$ (pour toute fonction étagée positive $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ on a:

$$\int_N f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f 1_N d\lambda = \sum_{c \in f(\mathbb{R})} c \lambda(f^{-1}(c) \cap N) = 0$$

car $\forall c \in f(\mathbb{R})$, la partie $f^{-1}(c) \cap N$ est mesurable de mesure nulle.

PROP: Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{E}^+(X)$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, la fonction $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}^+$ et on a:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\lambda = \alpha \int_X f d\lambda + \beta \int_X g d\lambda$$

$$\text{si de plus } f \leq g, \text{ alors } \int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda$$

PREUVE:

ii) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{E}^+(X)$. Pour a et b dans $\mathbb{R}_+$, posons $A_a = \{f=a\}$ et $B_b = \{g=b\}$

Comme l'ensemble des A_a et celui des B_b constituent des partitions de X , on a:

$$\lambda(A_a) = \sum_{b \in g(X)} \lambda(A_a \cap B_b) \text{ et } \lambda(B_b) = \sum_{a \in f(X)} \lambda(A_a \cap B_b)$$

et on peut donc écrire:

$$\int f d\lambda = \sum_{(a,b) \in f(X) \times g(X)} a \lambda(A_a \cap B_b) \text{ et } \int g d\lambda = \sum_{(a,b) \in f(X) \times g(X)} b \lambda(A_a \cap B_b)$$

on remarque aussi que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) d\lambda &= \sum_{c \in (\alpha f + \beta g)(X)} c \lambda(\{ \alpha f + \beta g = c \}) \\ &= \sum_{\substack{(a,b) \in f(X) \times g(X) \\ c = \alpha a + \beta b}} c \lambda(\{f=a \text{ et } g=b\}) \\ &= \sum_{(a,b) \in f(X) \times g(X)} (\alpha a + \beta b) \lambda(A_a \cap B_b) \end{aligned}$$

et on en déduit des égalités précédentes que $\int (f + \alpha g) d\lambda = \int f d\lambda + \alpha \int g d\lambda$

iii) si $f \leq g$, alors $g = f + (g-f)$ avec $f, (g-f) \in \mathcal{E}^+(X)$.

$$\text{Donc } \int g d\lambda = \int f d\lambda + \int (g-f) d\lambda \geq \int f d\lambda$$

$$\text{Donc } \int_X g d\lambda \geq \int_X f d\lambda$$

RQ: si $f \in \mathcal{E}^+$ et $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j}$ où les E_j sont des parties Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$, pas forcément disjointes et les $a_j \in [0, +\infty]$ pas forcément distincts, alors $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{j=1}^n a_j \lambda(E_j)$

$$(\text{par linéarité positive: } \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}} 1_{E_j} d\lambda = \sum_{j=1}^n a_j \lambda(E_j))$$

II. Fonctions mesurables positives

1) Définition et premières propriétés

DEF: Soit $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

On appelle intégrale de Lebesgue de f sur X la quantité :

$$\int_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X \psi d\lambda, \psi \in \mathcal{E}^+(X), \psi \leq f \right\} \in [0, +\infty]$$

REM: Si $f \in \mathcal{E}^+(X)$, cette définition est cohérente avec la précédente (grâce à la croissance de l'intégrale sur $\mathcal{E}^+(\mathbb{R})$)

PROP: Soient f, g mesurables positives, si $f \leq g$, alors $\int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda$

PREUVE: Soit $\psi \in \mathcal{E}^+(X)$ tq $\psi \leq f$. Alors $\psi \leq g$ et par croissance de l'intégrale sur $\mathcal{E}^+(X)$, on a :

$$\int_X \psi d\lambda \leq \int_X g d\lambda$$

$$\text{donc } \int_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X \psi d\lambda, \psi \in \mathcal{E}^+(X), \psi \leq f \right\} \leq \int_X g d\lambda$$

PROP: [Inégalité de Markov]

Si f est une application mesurable positive et $\alpha > 0$, on a

$$\lambda(\{x \in X, f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\lambda$$

PREUVE: Soit $h = \alpha \cdot 1_{\{x \in X, f(x) \geq \alpha\}}$, $h \in \mathcal{E}^+(X)$ et $h \leq f$

$$\text{donc } \int_X h d\lambda \leq \int_X f d\lambda$$

$$\alpha \lambda(\{x \in X, f(x) \geq \alpha\}) \leq \int_X f d\lambda$$

PROP: Soit $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

Alors $\int_X f d\lambda = 0 \Leftrightarrow f = 0$ presque partout sur X

De plus, si $\int_X f d\lambda < +\infty$ alors f est finie presque partout sur X

DEF: On dit que $P(x)$ est vraie pp quand

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}; P(x) \text{ est faux}\}) = 0$$

PREUVE:

($\Rightarrow$) Supposons que $\int_X f d\lambda = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par Markov:

$$\lambda(\{x \in X, f(x) \geq 1/n\}) \leq n \int_X f d\lambda = 0 \quad \text{c.à.d. } N_n = f^{-1}([1/n, +\infty[) \text{ est de mesure nulle.}$$

Donc $N = \bigcup_{n=1}^{+\infty} N_n = \{x \in X, f(x) > 0\}$ est de mesure nulle, c.à.d. $f = 0$ pp sur X .

($\Leftarrow$) Si $f=0$ p.p sur X , la partie mesurable $N=\{x \in X, f(x) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est de mesure nulle.
 Soit alors ψ une fonction étagée positive inférieure à f , qu'on écrit $\psi = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$ où les $A_j \in \mathcal{L}(X)$ forment une partition de X et $c_j \in [0, +\infty] \forall j$.

On a alors:

$$\int_X \psi d\lambda = \int_N \psi d\lambda = \sum_{j=1}^n c_j \lambda(A_j \cap N) \leq \sum_{j=1}^n c_j \lambda(N) = 0$$

En prenant la borne sup sur l'ensemble des fonctions étagées positives inférieures à f , on obtient $\int_X f d\lambda = 0$.
 Supposons maintenant que $\int_X f d\lambda < +\infty \forall n \in \mathbb{N}^*$. Par Markov:

$$\lambda(\{x \in X, f(x) = +\infty\}) \leq \lambda(\{x \in X, f(x) \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_X f d\lambda < +\infty \quad (n \rightarrow +\infty \text{ donne le résultat})$$

2) Le théorème de convergence monotone (Beppo-Levi)

THM: Soit X une partie mesurable de $\mathbb{R}$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'applications mesurables positives.

Alors:

i) f_n converge simplement vers $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda = \int_X f d\lambda = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda$

Autrement dit, dans ce cas, on peut échanger limite et intégrale.

PREUVE: (* 5)

Soit $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ la limite de la suite (f_n) . Puisque (f_n) est croissante, on a $\forall n \quad f_n \leq f_{n+1} \leq f$

La suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)$ est croissante majorée par $\int_X f d\lambda$. Donc $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda$ existe dans $[0, +\infty]$ et vérifie $L \leq \int_X f d\lambda$.

On montre maintenant que $\int_X f \leq L$. Soit $\psi = \sum_{j=1}^K c_j 1_{A_j}$ une fonction étagée positive inférieure à f .

On fixe $\alpha \in]0, 1[$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N} : E_n = \{x \in X; \alpha \psi(x) \leq f_n(x)\}$

Les E_n forment une suite croissante de parties mesurables, et on a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

(En effet, $\forall x \in X, \psi(x) \leq f(x)$ donc $\alpha \psi(x) \leq \alpha f(x) < f(x)$)

Soit $\varepsilon = f(x) - \alpha \psi(x) > 0$. $\exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq: $E_n = (f_n - \alpha \psi)^{-1}([0, +\infty[)$

$$n \geq N \Rightarrow f_n(x) > f(x) - \varepsilon > \alpha \psi(x) \Rightarrow x \in E_n$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \psi 1_{E_n} = \sum_{j=1}^K c_j 1_{A_j} 1_{E_n} \text{ et } \int \psi 1_{E_n} d\lambda = \sum_{j=1}^K c_j \lambda(A_j \cap E_n)$$

De plus, pour chaque j , la suite $(A_j \cap E_n)_n$ est croissante et tend vers A_j .

La continuité à gauche de la mesure de Lebesgue donne alors $\lambda(A_j \cap E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(A_j)$

$$\text{et donc } \int \psi 1_{E_n} d\lambda \rightarrow \sum_{j=1}^K c_j \lambda(A_j) = \int \psi d\lambda$$

$$\text{et puisque } \psi \leq f_n \text{ sur } E_n: \quad \alpha \int \psi 1_{E_n} \leq \int f_n 1_{E_n} d\lambda \leq \int f_n d\lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \psi d\lambda \leq L$$

ceci est vrai pour toute fonction $\psi \in \mathcal{E}^+(X)$ inférieure à f , on a donc $\int_X f d\lambda \leq L$.

PREUVE:

i) Comme (f_n) est croissante, pour $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est une suite croissante dans $[0, +\infty]$

Donc: $\rightarrow$ Soit elle est majorée, donc elle converge vers $f(x)$

$\rightarrow$ soit elle tend vers $+\infty$, et on note $f(x) = +\infty$ la limite

ii) Pour tout n , $f_n \leq f_{n+1} \leq f$

$$\text{donc } \int_X f_n d\lambda \leq \int_X f_{n+1} d\lambda \leq \int_X f d\lambda$$

donc $\left(\int_X f_n d\lambda\right)_n$ est une suite croissante majorée par $\int_X f d\lambda$

Notons $L := \lim_n \int_X f_n d\lambda$. On a $L \leq \int_X f d\lambda$.

$$\text{Nq. } L \geq \int_X f d\lambda$$

. Soit $\psi \in \mathcal{E}^+(X)$ tq $\psi \leq f$

On peut écrire $\psi(x) = \sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j}$

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{x \in X; \alpha \psi(x) \leq f_n(x)\}$

* Les E_n sont mesurables: $E_n = (f_n - \alpha \psi)^{-1}([0, +\infty[)$

* Soit $\varepsilon = f(x) - \alpha \psi(x) > 0$

$\exists N = N(\varepsilon, x)$ tq $\forall n > N$, $f_n(x) > f(x) - \varepsilon \geq \alpha \psi(x)$ car $f_n(x) > f(x) - \varepsilon$

Donc $\forall n > N$, on a $x \in E_n$.

On a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, et $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout n

$$\begin{aligned} \text{Pour chaque } n, \psi \mathbb{1}_{E_n} &= \sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j} \mathbb{1}_{E_n} \\ &= \sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j \cap E_n} \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_X \psi \mathbb{1}_{E_n}(x) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^k c_j \lambda(A_j \cap E_n)$$

$$\text{or } \lambda(A_j \cap E_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda(A_j) \text{ car } A_j \cap E_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A_j$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \psi \mathbb{1}_{E_n} d\lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k c_j (\lambda(A_j \cap E_n)) \\ &= \sum_{j=1}^k c_j \lambda(A_j) = \int_X \psi d\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } \alpha \psi(x) \mathbb{1}_{E_n}(x) \leq f_n(x)$$

$$\text{Donc } \alpha \int_X \psi d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \int_X \psi \mathbb{1}_{E_n} d\lambda$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda \leq L$$

En faisant $\alpha \rightarrow 1$, on obtient $\int_X \psi d\lambda \leq L$

puis en prenant le sup sur toutes les fct $\psi \in \mathcal{E}^+(X)$ tq $\psi \leq f$

$$\text{on a } \int_X f d\lambda = \sup_{\psi} \int_X \psi d\lambda \leq L$$

PROP: L'application I qui à une fonction mesurable positive sur X associe son intégrale: $I(f) = \int_X f d\lambda$ est positivement linéaire:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \forall f, g \text{ fonctions mesurables positives } \int_X (\alpha f + \beta g) d\lambda = \alpha \int_X f d\lambda + \beta \int_X g d\lambda$$

PREUVE: Soit (φ_n) et (ψ_n) deux suites dans $\mathcal{E}^+(X) + q$ $\varphi_n \rightarrow f$ et $\psi_n \rightarrow g$ en croissant

$$I(\alpha \varphi_n + \beta \psi_n) = \alpha I(\varphi_n) + \beta I(\psi_n) \rightarrow \text{vrai car fonctions étagées}$$

$$I(\varphi_n) \rightarrow I(f) \text{ TCM}$$

$$I(\psi_n) \rightarrow I(g) \text{ TCM}$$

$$\text{Donc } I(\alpha \varphi_n + \beta \psi_n) \rightarrow \alpha I(f) + \beta I(g)$$

$$\downarrow \\ I(\alpha f + \beta g) \stackrel{TCM}{=}$$

III. Intégrales de Lebesgue des fonctions mesurables

Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On peut écrire: $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$ et $|f| = f^+ + f^-$

DEF: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable.

On dit que f est intégrable au sens de Lebesgue sur X lorsque:

$$\int_X |f| d\lambda < +\infty.$$

REM.: $|f|$ est mesurable positive donc son intégrale a un sens dans $[0, +\infty]$

• On note $\mathcal{L}^1(X)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrables.

• On a également $\begin{cases} f^+ \leq |f| \\ f^- \leq |f| \end{cases}$ donc $\begin{cases} \int_X f^+ d\lambda \leq \int_X |f| d\lambda \\ \int_X f^- d\lambda \leq \int_X |f| d\lambda \end{cases}$

En particulier, si $f \in \mathcal{L}^1(X)$, alors f^+ et $f^- \in \mathcal{L}^1(X)$

DEF: Soit $f \in \mathcal{L}^1(X)$. On appelle intégrale de Lebesgue de f le nombre:

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda \quad (\text{bien défini car on suppose } f^+ \text{ et } f^- \text{ intégrables})$$

PROP: L'application $I: \mathcal{L}^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à f associe $I(f) = \int_X f d\lambda$ est linéaire positive

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$$

$$\text{et } f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$$

$$\text{en particulier, } \left| \int_X f d\lambda \right| \leq \int_X |f| d\lambda$$

PREUVE: Ineq Triangulaire $\leadsto -|f| \leq f \leq |f|$

$$\text{donc } \int -|f| d\lambda \leq \int f d\lambda \leq \int |f| d\lambda$$

$$\text{et } \left| \int f d\lambda \right| \leq \int |f| d\lambda$$

PROP: $\mathcal{L}^1(X)$ est un sev dans l'espace des fonctions mesurables dans X pour la somme des fonctions et la somme des fonctions par un scalaire.

PREUVE:

$$\rightarrow 0 \in \mathcal{L}^1(X) \text{ car } \int_X 0 d\lambda = 0 < +\infty$$

$$\rightarrow \text{si } f \in \mathcal{L}^1(X) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \int_X |\alpha f| d\lambda = \int_X |\alpha| |f| d\lambda = |\alpha| \int_X |f| d\lambda < +\infty$$

$$\rightarrow \text{Soit } f, g \in \mathcal{L}^1(X), \int |f+g| d\lambda \leq \int |f| + |g| d\lambda = \int |f| d\lambda + \int |g| d\lambda < +\infty$$

REM:

- Soit $f \in \mathcal{L}^1(X)$ et $A \subset X$ mesurable. On note $\int f d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_{A^c} f d\lambda$

- Si $A \cup B = X$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $1_A + 1_B = 1_{A \cup B} = 1_X$

Dans ce cas, $\int_X f d\lambda = \int_X f 1_{A \cup B} d\lambda = \int_X f 1_A + f 1_B d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_B f d\lambda$ (relation de Chasles)

PROP: Soient $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, et $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur X telles que $f \leq g$ pp sur X . Alors $\int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda$ avec égalité ssi $f=g$ pp sur X .

PREUVE: Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ tq $f \leq g$ pp sur X et $h = g - f$.

On note $N \subset X$ la partie mesurable et de mesure nulle tq $f(x) \leq g(x) \forall x \in X \setminus N$.

La fonction h est mesurable et comme $|h| \leq |g| + |f|$, $h \in \mathcal{L}^1(X)$. De plus, $h \geq 0$ sur $X \setminus N$ par hypothèse, donc

$$0 \leq \int_{X \setminus N} h d\lambda = \int_X h d\lambda = \int_X g d\lambda - \int_X f d\lambda, \text{ d'où } \int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda.$$

On a égalité ssi $\int_X h d\lambda = 0$, mais h est une fonction mesurable positive, donc $h=0$ pp, c.à.d. $f=g$ pp sur X .

REM: Supposons $N \subset X$ mesure nulle. Soit $f \in \mathcal{L}^1(X)$, $\int_X f d\lambda = \int_{X \setminus N} f d\lambda + \int_N f d\lambda$, or $|\int_N f d\lambda| \leq \int_N |f| d\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \text{En effet, soit } (\varphi_n) \text{ suite } \uparrow \text{ de } \mathcal{L}^+(X) \text{ qui tend vers } |f|. \text{ On a: } \int \varphi_n 1_N d\lambda &= \int \sum_{j=1}^n c_j^+ 1_{A_j^+} 1_N d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^n c_j^+ \lambda(A_j^+ \cap N) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Par TCM, } \lim \int \varphi_n 1_N d\lambda = \int \lim \varphi_n 1_N d\lambda = \int |f| 1_N d\lambda = 0$$

2) Lien avec l'intégrale de Riemann

PROP: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est Lebesgue intégrable sur $X=[a, b]$ et la fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\lambda(t)$ est la primitive de f qui s'annule en a .

$$\text{En particulier, } \int_{[a, b]} f(t) d\lambda(t) = \int_a^b f(t) dt$$

PREUVE: Soit $F(x) = \int_a^x f(t) d\lambda(t)$. Pour $x \in]a, b[$ et h assez petit, on a:

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| &\leq \left| \int_x^{x+h} f(t) d\lambda(t) - hf(x) \right| \\ &\leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| d\lambda(t) \end{aligned}$$

reste de la preuve est m^me pour l'intégrale de Riemann.

IV. Théorèmes limites

- 1) Théorème de convergence monotone (preuve au programme)
- 2) Théorème de Fatou

THM: [Lemme de Fatou]

Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X , positives

$$\text{Alors } \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\lambda(x)$$

PREUVE: On se rappelle que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k$ [pas à connaître]

Soit alors $g_k: x \mapsto \inf_{k \geq n} f_k(x)$

La suite (g_k) est croissante. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

On applique le TCM

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n(x) d\lambda(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) d\lambda(x)$$

Or $\forall k \geq n, g_n \leq f_k$.

$$\text{Donc } \int_X g_n(x) d\lambda(x) \leq \int_X f_k(x) d\lambda(x) \quad \forall k \geq n$$

$$\text{Donc } \int_X g_n(x) d\lambda(x) \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\lambda(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n(x) d\lambda(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\lambda(x)$$

$$\text{donc } \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) d\lambda(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\lambda(x)$$
$$= \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x)$$

3) Thm de convergence dominée

PROP: Soit $X \subset \mathbb{R}$ mesurable, et (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X . On suppose que:

i) La suite (f_n) converge presque partout vers $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

ii) Il existe $g: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui est intégrable sur X et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pour presque tout } x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)$$

g ne dépend pas de n !

Alors f est intégrable sur X et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\lambda(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \int_X f(x) d\lambda(x)$$

PREUVE: $\rightarrow$ (dans le cas où il n'y a pas de "presque partout") [x]

Soit $\varphi_n = 2g - |f_n - f|$. Les (φ_n) sont positives mesurables, donc on peut appliquer le lemme de Fatou

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) d\lambda(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n(x) d\lambda(x)$$

$$\text{Or } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{n \rightarrow +\infty} 2g - |f_n - f| = 2g$$

$$\text{Donc } \int_X 2g d\lambda(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X 2g - |f_n(x) - f(x)| d\lambda(x)$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int |f_n - f|(x) d\lambda(x) \leq 0$ $\begin{matrix} \nearrow \liminf - \psi_n \\ = -\limsup \psi_n \end{matrix}$

Donc $\int_{\mathcal{X}} |f_n - f| d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Finalement, $\left| \int_{\mathcal{X}} f_n d\lambda - \int_{\mathcal{X}} f d\lambda \right| \leq \int_{\mathcal{X}} |f_n - f| d\lambda \leq \int_{\mathcal{X}} |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0$

et on a montré le TCD.

EXEMPLE: (exercice type)

Soit $\alpha > 1$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$

Soit $X = [0, +\infty[$, et $f_n: x \mapsto e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$

On veut déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\lambda(x)$

$\uparrow$ mesurable car continue $\uparrow$ indicatrice mesurable

(le max demandé pour justifier la mesurabilité)

$\rightarrow f_n$ mesurable comme produit de l'indicatrice de $[0, n]$ qui est mesurable sur X et de $x \mapsto e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ qui est continue sur X donc mesurable.

$\rightarrow f_n(x) = e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x) \rightarrow e^{-\alpha x} e^x \cdot 1 \quad \forall x \in X$
car $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})} \sim e^{n \cdot \frac{x}{n}} = e^x$

$\rightarrow$ On cherche $g \in \mathcal{L}^1(X)$ telle que

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$|e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x)| \leq g(x)$

or $e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x) \leq e^{-\alpha x} e^x \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$
(la continuité ne suffit pas pour mq c'est intégrable)
 $\underbrace{e^{-\alpha x}}_{\text{indep de } n} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\leq e^x} \underbrace{\mathbb{1}_{[0, n]}(x)}_{\leq 1}$

et $\int_X g(x) d\lambda(x) = \int_{[0, +\infty[} e^{-(\alpha-1)x} d\lambda(x)$
 $< +\infty$ car $\alpha > 1$

Par le TCM: $\int_0^n e^{-(\alpha-1)x} d\lambda(x) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-1)x} d\lambda(x)$
 $\int_0^n e^{-(\alpha-1)x} \mathbb{1}_{[0, n]}(x) d\lambda(x)$

$\rightarrow e^{-(\alpha-1)x}$
 $\int_0^n e^{-(\alpha-1)x} d\lambda(x) = \int_0^n e^{-(\alpha-1)x} dx = \left[\frac{e^{-(\alpha-1)x}}{-(\alpha-1)} \right]_0^n$
 $\uparrow$ intervalle fermé borne $\rightarrow$ on peut passer à Riemann
 $= \frac{1}{\alpha-1} (1 - e^{-(\alpha-1)n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1}$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-1)x} d\lambda(x) = \frac{1}{\alpha-1} < +\infty$

Conclusion:

Le TCD permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-1)x} d\lambda(x) = \frac{1}{\alpha-1}$

Cas des intégrales à paramètre

On considère des fonctions de la forme $x \in X, F(x) = \int_I f(x, b) d\lambda(x)$

Dans la définition de F intervient une fonction $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et X une partie mesurable de $\mathbb{R}$.

PROP: [Continuité]

On suppose que:

- i) $\forall u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- ii) Pour presque tout x , la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue sur I
- iii) Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tq $\forall u \in I$ et presque tout $x \in X, |f(u, x)| \leq g(x)$

$\uparrow$ ne dépend pas du paramètre

Alors, la fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue

PROP: [C']

Soit $X \subset \mathbb{R}$ mesurable, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Soit $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que:

- i) Pour tout $u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est intégrable sur X (pour F soit définie)
- ii) Pour presque tout $x \in X, u \mapsto f(u, x)$ est C^1 . On note $\partial_1 f(u, x)$ sa dérivée par rapport à u
- iii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tq pour tout $u \in I$ et presque tout $x \in X$, on a $|\partial_1 f(u, x)| \leq g(x)$

Alors: F est dérivable sur I et

$$F'(u) = \int_X \partial_1 f(u, x) d\lambda(x)$$

Idee de la preuve pour la Continuité:

Soit $u_0 \in I$. On veut que F est continue en u_0 . Il suffit de mq pour toute suite $(u_n) \subset I$ qui tend vers $u_0, F(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F(u_0)$

On note $f_n: x \mapsto f(u_n, x)$. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(u_0, x)$ grâce à ii). Par iii) $|f_n(x)| \leq g(x)$

D'après le TCO:

$$\int_X f_n(x) d\lambda(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_X f(u_0, x) d\lambda(x) \quad \text{donc } F(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F(u_0) \quad [\text{détails dans le poly}]$$

EXEMPLES:

i) $F: u \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u^2 t^2)}{1+t^2} d\lambda(t)$. On veut mq F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

→ Soit $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u, t) = \frac{\sin(u^2 t^2)}{1+t^2}$

- i) Pour tout $u \in \mathbb{R}, t \mapsto f(u, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc elle est mesurable.
- ii) Pour tout $t \in]0, +\infty[, u \mapsto \frac{\sin(u^2 t^2)}{1+t^2}$ est continue.
- iii) $|f(u, t)| = \left| \frac{\sin(u^2 t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t)$

intégrable sur $[0, +\infty[$
car c'est une fonction positive

$$\text{avec } \int_0^{+\infty} g(t) d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

CONCLUSION: F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Même question pour $G(u) = \int_0^{+\infty} \sin(u^2 t^2) e^{-tu} d\lambda(t)$

→ Soit $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, u) = \sin(t^2 u^2) e^{-tu}$$

i) $\forall u \in]0, +\infty[\quad t \mapsto \sin(u^2 t^2) e^{-tu}$ est continue donc mesurable

ii) $\forall t \in]0, +\infty[\quad u \mapsto \sin(u^2 t^2) e^{-tu}$ est continue

t ouvert ou fermé
ne change rien donc
on prend l'1 le plus petit possible

iii) On cherche $g \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[)$ telle que $|\sin(u^2 t^2) e^{-tu}| \leq g(t)$
or $|\sin(u^2 t^2) e^{-tu}| \leq 1$ mais $1 \notin \mathcal{L}^1([0, +\infty[)$

Mieux: il s'agit de montrer que G est continue en chaque $u_0 \in]0, +\infty[$ (on regardera plus tard le cas $u_0 = 0$)

Puisque $u_0 > 0$, il existe $a > 0$ tq $a < u_0$. Mieux, $\forall u \in]u_0 - a, +\infty[$, on a:

i, ii) sont vraies, et

iii) $|\sin(t^2 u^2) e^{-tu}| \leq e^{-at} = g(t)$ avec $g \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[)$

D'après le TCD appliqué sur $I =]a, +\infty[$, G est continue en u_0 et même sur $]a, +\infty[$.

CONCLUSION:

G est continue en chaque $u_0 > 0$

+ continuité en 0, $g(0) = 0$, $\int_0^\infty g(u) du \rightarrow 0$

Remarque additionnelle:

Dans tout ce qui précède, on a considéré des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On aurait pu tout aussi bien considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$: si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on écrit

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) \text{ avec } \operatorname{Re} f(x) = \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2}, \operatorname{Im} f(x) = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2i}$$

$$\text{et on convient que } \int_X f(x) d\lambda(x) = \int_X \operatorname{Re} f(x) d\lambda(x) + i \int_X \operatorname{Im} f(x) d\lambda(x)$$

$$\text{Exemple: } \int_0^\pi e^{ix} d\lambda(x) = \int_0^\pi \cos(x) d\lambda(x) + i \int_0^\pi \sin(x) d\lambda(x)$$

$$\text{On a aussi } \int_0^\pi e^{ix} d\lambda(x) \stackrel{= 2i}{=} \left[\frac{e^{ix}}{i} \right]_0^\pi = -i(e^{i\pi} - e^{i0}) = -i(-1 - 1) = 2i$$

Attention $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ lorsque $\int_X |f(x)| d\lambda(x) < +\infty$
 $\uparrow$ module du nombre complexe $f(x)$

Comme $|\operatorname{Re} f(x)|, |\operatorname{Im} f(x)| \leq |f(x)|$,

$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(X)$

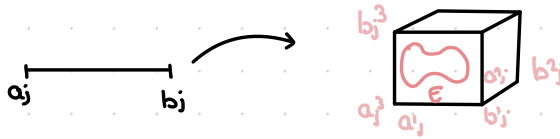
Chapitre 4 - Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

($d > 1$)

Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$:

Dans $\mathbb{R}$: $\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} (b_j - a_j), \text{ où } (\exists a_j, b_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_E \right\}$

Dans $\mathbb{R}^d$:



$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(P_j), \text{ où } (P_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_E \right\} \text{ et } \text{vol}(P_j) = \prod_{k=1}^d (b_j^k - a_j^k)$$

* toutes les propriétés vues précédemment sont applicables,
mais avec passage d'intervalle à pavé

(...)

DEF: On dit que $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est mesurable lorsque $\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda_d^*(A) = \lambda_d^*(A \cap E) + \lambda_d^*(A^c \cap E)$

L'ensemble des parties λ_d -mesurables est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$: c'est une tribu, appelée tribu de Lebesgue

→ Les ouverts, les fermés, les pavés sont λ_d -mesurables: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$.
 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est complète.

DEF: La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est la restriction de λ_d^* à la tribu de Lebesgue. On dispose de l'espace mesure $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ (Autrement dit, λ_d est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$).

DEF: Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ mesurable. On dit que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable lorsque $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$

Par exemple, les fonctions continues sont mesurables.

Les résultats concernant "fonctions mesurables et opérations" sont vrais. ^(à la composition)

2) Les produits cartésiens de parties mesurables sont mesurables

PROP: Soit $A_1 \subset \mathbb{R}$, $A_2 \subset \mathbb{R}$ deux parties λ_1 -mesurables.

Alors $A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$ est λ_2 -mesurable

$$\text{De plus, } \lambda_2(A_1 \times A_2) = \lambda_1(A_1) \times \lambda_1(A_2)$$

PREUVE: voir les notes

admise

REM: ça se généralise: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d$ est mesurable quand chaque $A_j \subset \mathbb{R}$ λ_1 -mesurable, et dans ce cas
 $\lambda_d(A_1 \times \dots \times A_d) = \prod_{j=1}^d \lambda_1(A_j)$

* si $A_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $A_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ mesurables, alors $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ est $\lambda_{d_1+d_2}$ -mesurable et

$$\lambda_{d_1+d_2}(A_1 \times A_2) = \lambda_{d_1}(A_1) \times \lambda_{d_2}(A_2)$$

II. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

1) Fonctions étagées positives

DEF: Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est étagée positive lorsqu'il existe $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+$ tq $A_j = f^{-1}(\{c_j\})$ est λ_d -mesurable pour tout j , et

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

$$\text{L'intégrale de Lebesgue de } f \in \mathcal{E}^+(\mathbb{R}^d) \text{ est } \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_d(A_j)$$

Δ : pas le n d

→ L'intégrale de Lebesgue sur $\mathcal{E}^+(\mathbb{R}^d)$ a exactement les mêmes propriétés que celle sur $\mathcal{E}^+(\mathbb{R})$

2) Fonctions mesurables positives

DEF: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application mesurable positive. On note :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \psi d\lambda_d, \psi \in \mathcal{E}^+(\mathbb{R}^d), \psi \leq f \right\} \in [0, +\infty]$$

cette intégrale vérifie les mêmes propriétés que pour $d=1$, y compris le TCM

3) Fonctions mesurables

DEF: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable sur $X \subset \mathbb{R}^d$.

On dit que f est intégrable sur X lorsque $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\lambda_d(x) < +\infty$

On note $\mathcal{L}^1(X)$ l'ensemble de fonctions intégrables sur X .

$$\text{Pour } f \in \mathcal{L}^1(X), \text{ on note } \int_X f(x) d\lambda_d(x) = \int_X f^+(x) d\lambda_d(x) - \int_X f^-(x) d\lambda_d(x)$$

$$\text{avec } f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

REM: On a $f^+ + f^- = |f|$, donc si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors f^+ et f^- aussi

→ Le lemme de Fatoú, le TCM et les résultats de continuité et de dérivabilité des intégrales à paramètre sont encore vrais.

Q: Comment calculer $\int_X f(x) d\lambda_d(x)$ quand $X \in \mathbb{R}^d$?

III. Théorèmes de Tonelli et de Fubini

1) Le thm de Tonelli

PROP: (Thm de Tonelli)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction λ_2 -mesurable.

Si f est positive, alors

i) Pour p.t. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable positive, de même que la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y)$ est mesurable positive.

ii) Pour p.t. $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable positive, et $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(x)$ est mesurable

iii) De plus, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) \in [0, +\infty]$

PREUVE: voir les notes

admise

2) Théorème de Fubini

PROP: Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction λ_2 -mesurable.

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, alors

i) $x \mapsto \int f(x, y) dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

ii) $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ p.p. en x

$$\text{iii) } \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y)$$

MODE D'EMPLOI:

On dispose d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ λ_2 -mesurable

On veut calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y)$

→ Est-ce que cette quantité est bien définie, i.e. que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$?

On applique Tonelli à $|f|$ pour mq $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| d\lambda_2(x, y) < +\infty$

→ Supposons que ce soit le cas, comment calculer $\int f(x, y) d\lambda_2(x, y)$?
Puisque f est intégrable, on peut appliquer Fubini.

EXEMPLE 1: $f(x, y) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \mathbb{1}_{[0, x]}(y)$

f est mesurable

On veut calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y)$

→ On s'assure que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$. $|f(x, y)| = f(x, y)$ car f est positive.

$$\text{D'après Tonelli, } \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x)$$

pas l.i. car positive

On calcule d'abord

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \mathbb{1}_{[0, x]}(y) d\lambda_1(y) \right] d\lambda_1(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, x]}(y) d\lambda_1(y) \right] d\lambda_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[\int_0^x d\lambda_1(y) \right] d\lambda_1(x) \\ &= \int_0^{+\infty} x e^{-x} d\lambda_1(x) \end{aligned}$$

$$\text{Pour } A > 0, \text{ On calcule } \int_0^A x e^{-x} d\lambda_1(x) = \int_0^A x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^A + \int_0^A e^{-x} dx$$

$$= -A e^{-A} + \left[-e^{-x} \right]_0^A$$

$$= -A e^{-A} - e^{-A} + 1 \rightarrow 1 \text{ quand } A \rightarrow +\infty$$

(ou bien utiliser une majoration finale $x e^{-x} \leq C e^{-x/2}$)

Or $x \mapsto x e^{-x}$ est positive

donc $g_n = g \mathbb{1}_{[0, n]} \rightarrow g$ simplement et d'après TCM, $\int g_n d\lambda_1 \rightarrow \int g d\lambda_1$

$$\int_0^n x e^{-x} dx \rightarrow 1$$

$$\text{Donc } \int f(x, y) d\lambda_2(x, y) = 1 < +\infty$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$

→ Il reste à calculer $I = \int f(x, y) d\lambda_2(x, y)$

$$\text{D'après Fubini, } \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) \text{ calcul déjà fait} = 1$$

REM: Calcul de $J = \int \left(\int e^{-x} 1_{[0, +\infty[}(x) 1_{[0, x]}(y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) = \int \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} 1_{[0, x]}(y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y)$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } J &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x} 1_{[0, +\infty[}(y) 1_{[y, +\infty[}(x) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0, +\infty[}(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x} 1_{[y, +\infty[}(x) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) = 1 \end{aligned}$$

IV. Théorème de Changement de variable

PROP: Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit $\phi: U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme

Soit aussi $J_x \phi$ la matrice jacobienne de ϕ au point $x \in U$.

i) $f \in \mathcal{L}^1(V)$ ssi $f \circ \phi \cdot |\det J_x \phi|$ est dans $\mathcal{L}^1(U)$

ii) Dans ce cas, $\int_V f(y) d\lambda_d(y) = \int_U f \circ \phi(x) |\det J_x \phi| d\lambda_d(x)$

DEF: $\phi: U \rightarrow V$ est un C^1 -diffeo lorsque :

i) $\phi: U \rightarrow V$ est bijective

ii) ϕ est C^1 sur U

iii) ϕ^{-1} est C^1 sur V .

EX: $\phi:]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ϕ est bijective de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$

$$J_x \phi = \begin{pmatrix} \partial_r \phi_1 & \partial_\theta \phi_1 \\ \partial_r \phi_2 & \partial_\theta \phi_2 \end{pmatrix} \text{ où } \phi_1, \phi_2 \text{ sont les composantes de } \phi$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow |\det J_x \phi| = r$$

$$\int f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta] dr$$

Chap 5: les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

I. L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}^1$

Soit (X, τ, μ) un espace mesuré (pensez à $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ ou $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$).

On suppose que la mesure μ est σ -finie : il existe une famille dénombrable $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X , de mesure finie, telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ (automatique pour la mesure de Lebesgue)

i) Une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(X, \mu)$

On a défini $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur X qui vérifient $\int_X |f| d\mu < +\infty$. On a vu que $(\mathcal{L}^1, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

PROP: Soit $M_1: \mathcal{L}^1(X, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $M_1(f) = \int_X |f(x)| d\mu(x)$. Alors.

i) $M_1(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.

ii) $M_1(\alpha f) = |\alpha| M_1(f)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

iii) $M_1(f+g) \leq M_1(f) + M_1(g)$ [Inégalité triangulaire]

Δ! M_1 n'est pas une norme : on n'a pas $M_1(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$$\begin{aligned} \text{PREUVE : iii)} \quad M_1(f+g) &= \int_X |f+g| d\mu \leq \int_X (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) \leq \int_X |f(x)| d\mu(x) + \int_X |g(x)| d\mu(x) \\ &\leq M_1(f) + M_1(g) \end{aligned}$$

(On dit que M_1 est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$)

PROP. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$

i) S'il existe f mesurable tq $f_n \rightarrow f$ pp, et s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ pp alors $f \in \mathcal{L}^1$ et $M_1(f_n - f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

ii) S'il existe $f \in \mathcal{L}^1$ tq $M_1(f_n - f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \uparrow$ inj) tq $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ pp.

Δ! Il existe des exemples de suites (f_n) tq $M_1(f_n - f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ mais tq $f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pp.

PREUVE:

i) TCD

ii) On suppose que $f_n \in \mathcal{L}^1$ pour tout n , $f \in \mathcal{L}^1$ et $M_1(f_n - f) = \int |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

(*) pour $K=1$: $\exists n_1$ tq $M_1(f_{n_1} - f) \leq 2^{-1}$ (def convergence) ($n_1 = N_{2^{-1}}$).

pour $K=2$: $\exists n_2 > n_1$ tq $M_1(f_{n_2} - f) \leq 2^{-2}$ ($n_2 = \max(N_{2^{-2}}, n_1 + 1)$)

|

Par récurrence, je peux construire une suite (n_k) strictement croissante tq $\forall k, M_1(f_{n_k} - f) \leq 2^{-k}$

La suite (f_{n_k}) est une suite extraite de (f_n) .

(*) Pour $K \in \mathbb{N}^*$, je pose $E_K = \{x \in X, |f_{n_K}(x) - f(x)| > 2^{-K/2}\}$

D'après l'inégalité de Markov, $\mu(E_K) \leq \frac{1}{2^{-K/2}} \int |f_{n_K}(x) - f(x)| d\mu \leq \frac{2^{-K}}{2^{-K/2}} \leq 2^{-K/2}$

(*) Soit $E = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{K \geq m} E_K$

• si $x \notin E$, $f_{n_K}(x) \xrightarrow[K \rightarrow +\infty]{} f(x)$

en effet, si $x \notin E$, il existe m_0 tq $x \notin \bigcup_{K \geq m_0} E_K$. Donc $x \in \bigcap_{K \geq m_0} E_K^c$, i.e. $\forall K \geq m_0, |f_{n_K}(x) - f(x)| \leq 2^{-K/2} \xrightarrow[K \rightarrow +\infty]{} 0$

• $\mu\left(\bigcup_{K \geq m} E_K\right) \leq \sum_{K \geq m} \mu(E_K) \leq \sum_{K \geq m} 2^{-K/2} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\text{Lebesgue}} 0$

donc $\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{K \geq m} E_K\right) = 0$

CCL: (f_{n_k}) converge vers f sauf sur E qui est de mesure nulle, donc pp.

2) L'espace $L^1(X, \mu)$

DEF: On note $L^1(X, \mu)$ l'ensemble des classes d'équivalences des fonctions de $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ pour la relation: $f \sim g$ si $f = g$ pp
 $L^1(E, \mu) = \{[f], f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)\}$ où $[f]$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ égales à f pp.

PROP: L'addition et la multiplication par un réel sont compatibles avec la relation d'équivalence $\sim$:

si $[f], [g] \in L^1$, la classe $[f+g]$ ne dépend pas du choix des représentants de f et g :

si $f' \in [f]$ et $g' \in [g]$ $f+g \sim f'+g'$

si $f' \in [f]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha f \sim \alpha f'$

PREUVE:

Soit $f' \in [f]$ et $g' \in [g]$, $f = f'$ sauf sur M de mesure nulle, et $g = g'$ sauf sur N de mesure nulle.

Donc $f+g = f'+g'$ sauf sur $M \cup N$, qui est de mesure nulle: $[f'+g'] = [f+g]$

DEF: On note $[f] + [g] = [f+g]$

$$\alpha[f] = [\alpha f]$$

pour $[f], [g] \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

PROP: $(L^1(X, \mu), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

PREUVE: Vérifier que $(L^1, +)$ est un groupe commutatif et qui vérifie $MA D_2$

On peut définir l'intégrale d'un élément de L^1 . En effet, si $[f] \in L^1$ et $f' \in [f]$, on a $\int f' d\mu = \int f d\mu$,
car $\int f - f' d\mu = 0$
 $\uparrow$ mesure nulle

DEF: On pose $\int [f] d\mu = \int f' d\mu$ pour n'importe quel $f' \in [f]$

PROP: L'application $\| \cdot \|_1 : L^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$ est une norme sur $L^1(X)$

PREUVE: $\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$ pour tout représentant
 $\|[f]\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ pp donc $[f] = [0]$

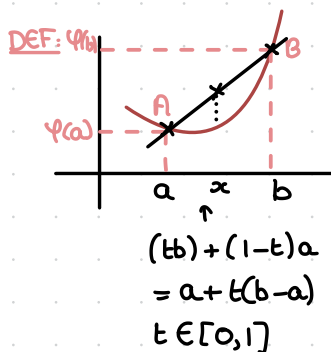
3) Théorème de Riesz - Fischer :

PROP: $(L^1, \| \cdot \|_1)$ est un espace vectoriel normé complet (Banach)

(Δ), en général, L^1 n'est pas un Hilbert : on ne peut pas trouver de produit scalaire $\langle, \rangle$ tq $\|[f]\|_1 = \sqrt{\langle [f], [f] \rangle}$

II. Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

1) Deux inégalités de convexité



Une fonction $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, est dit convexe lorsque $\forall t \in [0, 1]$,

$$\Psi(tb + (1-t)a) \leq t\Psi(b) + (1-t)\Psi(a)$$

PROP:

i) si $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors Ψ est continue sur $\overset{\circ}{I}$

ii) si $\Psi \in C^2(I)$, alors Ψ convexe $\Leftrightarrow \Psi'' \geq 0$

PROP: Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour $a, b \geq 0$, on a $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$

PREUVE: Soit $\Psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Psi(x) = x^p$

$\Rightarrow \Psi''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$ donc Ψ est convexe

Donc $\Psi(tb + (1-t)a) \leq t\Psi(b) + (1-t)\Psi(a)$ pour tout $t \in [0, 1]$

$$(tb + (1-t)a)^p \leq tb^p + (1-t)a^p$$

Pour $t = 1/2$: $\left(\frac{b+a}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}a^p$ cqfd

REM: Il est très simple de montrer que $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$

$$(a+b) \leq 2 \max(a, b)$$

PROP: Pour $p \in [1, +\infty[$ (pas forcément entier). Pour $a, b > 0$, on a
 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = \frac{p}{p-1}$, q s'appelle l'exposant conjugué de p)

PREUVE:

(*) si $a=0$ et/ou $b=0$, c'est vrai

(*) On considère $a, b > 0$. On a: $ab = e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)}$

or $\varphi: x \mapsto e^x$ est convexe: $\varphi''(x) = e^x \geq 0$

$$\exp\left(\frac{\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)}{1}\right) \leq \frac{1}{p} \exp(\ln(a^p)) + \frac{1}{q} \exp(\ln(b^q)) \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

2) L'espace $\mathcal{L}^p, p \in [1, +\infty[$

DEF: On note $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$

PROP: $(\mathcal{L}^p(X, \mu), +, \cdot)$ est un espace vectoriel

PREUVE: C'est un sev de l'espace des fonctions mesurables sur X :

$\rightarrow 0 \in \mathcal{L}^p$ ($\int 0^p = 0 < +\infty$)

$\rightarrow$ si $f, g \in \mathcal{L}^p$, alors $f+g \in \mathcal{L}^p$. En effet, $\int |f+g|^p d\mu \leq \int (|f|+|g|)^p d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right) < +\infty$

RG: Il est faux en général qu'on ait une inclusion du type $\mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2}$

Par exemple, sur $X =]0, +\infty[$, $x \mapsto x^{-1/2} (1+x)^{-1} \in \mathcal{L}^1$ mais $\notin \mathcal{L}^2$

et $x \mapsto (1+x)^{-1} \in \mathcal{L}^2$, $\notin \mathcal{L}^1$

sauf: lorsque la mesure μ est finie (mesure de probas)

$(\mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2} \text{ lorsque } p_1 \geq p_2)$

PROP: [Inégalité de Hölder]

Soit $M_p: \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $M_p(f) = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

On a pour $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\int |fg| d\mu \leq M_p(f) M_q(g)$

REM: $p=2$, alors $q=2$ et Hölder s'écrit: $\int |fg| d\mu \leq M_2(f) M_2(g) \leq \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{1/2}$, c'est Cauchy-Schwarz

PREUVE: utiliser la 2^e inégalité de convexité

3) L'espace $L^p, p \in [1, +\infty[$

DEF: On note $L^p(X, \mu) = \{f \in \mathcal{L}^p\}$ pour la $\sim$ relation $f \sim g$ que pour L^1 .

PROP: $(L^p(X, \mu), +, \cdot, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.