



Ex.1

$$x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

1) Vérifier que c'est des normes

$$1) \cdot \|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1 \quad [\text{homogénéité}]$$

$$\cdot \|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \stackrel{\text{inég. D}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \quad [\text{inég. D}]$$

$$\cdot \|x\|_1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \geq |x_i| \geq 0$$

donc $|x_i| = 0$ donc $x_i = 0 \forall i$ [définie]

$$\cdot \|x\|_1 \geq 0 \quad [\text{positivité}] \quad \text{Somme de valeurs infinies}$$

$$2) \Delta \cdot \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

On prend $\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y \rangle$ par def

$$= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 \quad \text{CS}$$

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

2) Cauchy Schwarz

$$\text{On étudie } t \mapsto \|x+ty\|^2 \geq 0$$

$$\langle x+ty, x+ty \rangle = \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x, y \rangle$$

$$\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0 \quad \text{car } f(t) \geq 0 \forall t$$

$$\text{d'où } \langle x, y \rangle^2 \leq \|y\|^2 \|x\|^2$$

$$\Downarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\|$$

3) Mq $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\exists j_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } |x_{j_0}| = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=0}^n |x_i| = \underbrace{\sum_{i=0}^{j_0-1} |x_i|}_{\geq 0} + |x_{j_0}| + \underbrace{\sum_{i=j_0+1}^n |x_i|}_{\geq 0} \geq |x_{j_0}| = \|x\|_\infty$$

On sait que $|x_{j_0}| \geq |x_i| \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_{j_0}| \leq n \|x\|_\infty$$

Ex3 Caractérisation séquentielle des fermés

(⇒) Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un ferméSoit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et x sa limite.Supposons par l'absurde que $x \notin F$ Donc $x \in F^c$ qui est un ouvert

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \subset F^c$$

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall k \geq N, \|x_k - x\| \leq \varepsilon$$

$$\text{d'où } x_k \in B(x, \varepsilon) \quad \forall k \geq N$$

$$\text{Donc } x_k \in F^c$$

$$\text{Or } x_k \in F \text{ contradiction } \Rightarrow x \in F$$

* (⇐) Montrons que F pas fermé $\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui vers $x \notin F$

$$F^c \text{ pas ouvert } \Rightarrow \exists x \in F^c, \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap F \neq \emptyset$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B(x, 1/n) \cap F \neq \emptyset$$

En prenant $x_n \in B(x, 1/n) \cap F$, (x_n) qui vers $x \notin F$ par construction.

$$\text{Ex4) } \partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

$$1) \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}, \partial A \text{ fermé}$$

$$A^\circ = \text{Int}(A), \bar{A} = \text{Adh}(A)$$

$$A^\circ \subset A \quad (\overset{\circ}{A} \text{ ouvert})$$

$$\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A}$$

$$\text{d'où } \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} \quad (\text{stable par inclusion})$$

 $\overset{\circ}{A}$ ouvert, donc $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A}$ fermé

$$\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$$

d'où

$$\boxed{\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \subset \mathbb{R}^n \setminus A^\circ}$$

Supposons par l'absurde que l'inclusion est stricte

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} \setminus (\mathbb{R}^n - A)$$

• si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ça ne peut pas arriver

- (*) donc $x \in A$
 donc $x \in A \setminus \overset{\circ}{A}$
 $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ fermé donc $\mathbb{R}^n - \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$ est ouvert
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n - A)$
 $\exists \delta$ tq $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$
 $\Rightarrow \mathbb{R}^n - A \subset \mathbb{R}^n \setminus A$
 $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n - A) \subset A$ passage au complémentaire
 $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n - A) \subset A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$ Absurde.

$$\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (\mathbb{R}^n - \overset{\circ}{A}) \quad , \text{ d'où } \partial A \text{ fermé.}$$

$\downarrow$ fermé $\uparrow$ fermé

2) $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ \& } B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$
 $F = \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)} \stackrel{Q1}{=} \bar{A} \cap \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$

3) $\partial A = \partial A^c$
 $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$
 $\partial(\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \bar{A}$ d'où $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$

4) $A \text{ fermé} \Leftrightarrow \partial A \subset A$
 $(\Rightarrow) A \text{ fermé}, \partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus \overset{\circ}{A} \subset A$
 $(\Leftarrow) \text{ Si } \partial A \subset A, \text{ tq } \bar{A} = A$
 $\bar{A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{A}$
 $= \partial A \cup \overset{\circ}{A} \subset A \cup \overset{\circ}{A} = A$
 d'où $\bar{A} \subset A$
 et $A \subset \bar{A}$ d'où $\bar{A} = A$

5) $A \text{ ouvert} \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$
 $\Downarrow$
 $B = \mathbb{R}^n \setminus A \text{ fermé} \stackrel{4}{\Leftrightarrow} \partial B \subset B$
 $\stackrel{3}{\Leftrightarrow} \partial A \subset \mathbb{R}^n \setminus A$

Ex 5) $D = \{x \in U; h_i(x) \leq 0 \forall 1 \leq i \leq p\}$

1) D est fermé

Notons $D_i = \{x \in U; h_i(x) \leq 0\}$

tq $D = \bigcap_{i=1}^p D_i$

les D_i sont fermés car c'est les images réciproques des fermés $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ par les applications continues h_i .

Donc D est un fermé.

2) ...

3) $x \in \partial D$, tq $\exists i$ tq $h_i(x) = 0$

D fermé, $\partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$

or $D' \subset \overset{\circ}{D}$ d'où $\partial D \subset D \setminus D'$
 $\downarrow$
 ouvert

d'où $x \in \partial D \Rightarrow x \in D \setminus D'$
 donc $\exists i$ tq $h_i(x) = 0$

4) Exemple $D' \neq \emptyset$

$h(x) = 0$. $D' = \emptyset$ (h ne varie pas)

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ex 1.7.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire

1) Mq $\exists v_f \in \mathbb{R}^n$ tq $f(x) = \langle v_f, x \rangle$

existence

Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique.

On pose $\alpha_i = f(e_i)$ pour $i \leq n$

$v_f = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = \langle v_f, x \rangle$$

2) unicité

Si v' vérifie $\langle v', x \rangle = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

On a $f(e_i) = \langle v', e_i \rangle = \alpha_i$

Mais $f(e_i) = \langle v_f, e_i \rangle$

d'où $\langle v', e_i \rangle = \alpha_i \quad \forall i$

d'où $v' = \sum_{i=1}^n \langle v', e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = v_f$

Ex 3.1

1) K compact $\Leftrightarrow \forall \mu_n \in K, \exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extraction tq $\mu_{\psi(n)} \rightarrow \mu \in K$

a) Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente tq $\forall n, \mu_n \in K$. Notons μ sa limite

K est compact donc $\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq $\mu_{\psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu' \in K$

or (μ_n) est convergente donc $\mu_{\psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$ par unicité de la limite

Donc $\mu = \mu' \in K$. [caractérisation séquentielle des fermés]

b) Supposons K non bornée.

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in K \quad \forall k$ et $\|x_k\| \rightarrow +\infty$

$\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extraction tq $x_{\psi(n)} \rightarrow x \in K$ [K compact]

d'où $\|x_{\psi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\| < +\infty$ ← la norme est continue

Contradiction: car on a aussi $\|x_{\psi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

2) $F \subset \mathbb{R}^n$ fermé et bornée, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F .

a) On note $x_k(i)$ la i -ème coordonnée de x_k

Mq $\exists (x_{\psi(k)}(i))_{k \in \mathbb{N}}$ sous suite de $(x_k(i))_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ_i [Thm Weierstraß]

On sait que $x_n(k) \in [-M, M]$ car x_n est bornée.

On pose $I_0 = [-M, M]$, $I_1^+ = [\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}, \beta_0]$

$$I_1^- = [\alpha_0, \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}]$$

Il y a un nombre infini d'indice n tq $x_n(i) \in I_1^+$

(on choisit le "bon" I_1 qui a un nb infini de termes)

pour $I_1 = I_1^+$ ou I_1^- $\{n/x_n(i) \in I_1\}$ infini

Supposons $I_1 = [\alpha_n, \beta_n]$ et $\{n/x_n(i) \in I_1\}$ est infini $\Rightarrow$

On construit de la même manière I_{n+1} et A_{n+1}

$$\text{On a } |\beta_n - \alpha_{n+1}| = \frac{\beta_0 - \alpha_n}{2} = \frac{2M \times 1}{2^n \cdot 2} = \frac{2M}{2^{n+1}}$$

$A_1 \supset \dots \supset A_n$ tous infini

On choisit $\psi(1) \in A_1$

A_2 est infini donc $\exists \psi(2) \in A_2 \supset \psi(1)$

⋮

et $\psi_n \in A_n$ tq $\psi(n) > \psi(n-1)$

Donc $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante

et $x_{\psi(n)} \in I_n$, et $x_{\psi(n+k)} \in I_n \quad \forall n$

$(x_{\psi(n)})$ est de Cauchy $\Rightarrow x_{\psi(n)}$ converge

réponse reformulée:

Comme F est borné, il existe $M > 0$ tel que $F \subset [-M, M]^p$.

On note $I_0 = [-M, M]$ et $A_0 = \{n \in \mathbb{N}; x_n^{(1)} \in I_0\}$.

On divise I_0 en deux sous-intervalles de même longueur

$$I_0^1 = [-M, 0], \quad I_0^2 = [0, M]$$

L'un des deux ensembles $A_0^1 = \{n \in A_0, x_n^{(1)} \in I_0^1\}$ et $A_0^2 = \{n \in A_0, x_n^{(1)} \in I_0^2\}$ est infini.

On choisit celui qui est infini, noté A_1 , et l'intervalle correspondant I_1 .

→ À chaque étape k , on divise I_k en deux parties égales et on choisit l'une des deux contenant une infinité de $x_n^{(1)}$.

On obtient deux suites: $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés

$(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ensembles infini décroissants.

La longueur $|I_k| = \frac{2M}{2^k} \longrightarrow 0$ donc il existe un unique point $\ell_1 \in \bigcap_k I_k$.

→ On choisit ensuite $n_k \in A_k$ croissante et on a $x_{n_k}^{(1)} \longrightarrow \ell_1$

réponse correction:

K est borné, donc la suite $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. Or, c'est une suite de réels, donc par le **thm de Bolzano Weierstraß**, il existe une sous-suite qui converge.

b) Il suffit d'appliquer le même raisonnement qu'à la question précédente à la suite $x_{\psi_1(k)}^{(2)}_{k \in \mathbb{N}}$

c) On obtient $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$

$$x_{\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_n(k)}^{(i)} \longrightarrow \ell_i \quad \forall i$$

$$\begin{matrix} x_{\psi_1, \dots, \psi_n(k)} \\ \uparrow \\ \cap F \end{matrix} \in F \longrightarrow \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in F$$

* réponse correction:

En procédant par récurrence, on construit les sous suites $(x_{\psi_1 \circ \dots \circ \psi_m(k)}^{(m)})_{k \in \mathbb{N}} \quad \forall 1 \leq m \leq n$ qui chacune converge vers ℓ_m . Posons $\psi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_n$. Alors, $\forall 1 \leq m \leq n$, $(x_{\psi(k)}^{(m)})_{k \in \mathbb{N}}$ est extraite de la ss suite précédente, donc converge vers ℓ_m .

Autrement dit, $x_{\psi(k)} \longrightarrow (\ell_1, \dots, \ell_n) \in K$
car K est fermé.

3) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, A_k \in \mathcal{O}(n)$

Posons $A_k^1, A_k^2, \dots, A_k^n$ les vecteurs colonnes de A_k

$A_k \in \mathcal{O}(n)$ donc $\forall 1 \leq i \leq n, \|A_k^{(i)}\| = 1$

Donc $A_k^i \in B_F(\vec{0}, 1)$ fermé et borné de $(\mathbb{R}^n)$, donc compact.

Donc $\forall 1 \leq i \leq n$, il existe $\psi_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $A_{\psi_i(k)}^{(i)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A^{(i)} \in B_F(0, 1)$

Posons $\psi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_n$

Alors $A_{\psi(k)} = (A_{\psi(k)}^1, \dots, A_{\psi(k)}^n) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} (A^1, \dots, A^n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé (*)

$$(*) \quad \mathcal{O}(n) = \{A \mid {}^tAA = Id\}$$

Posons $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$

$$A \longmapsto {}^tAA - Id$$

donc $\mathcal{O}(n) = f^{-1}\{0_n\}$, $\{0_n\}$ est fermé

f est continue car les entrées sont polynomiales

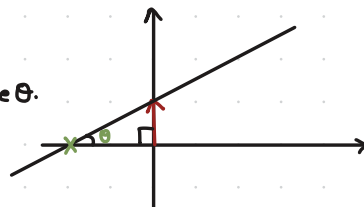
d'où $\mathcal{O}(n)$ fermé

4) Dans $\mathbb{R}^2$.

Soit P_θ la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'angle θ .

L'image de $(0, 1)$ par P_θ est $(-\tan(\theta)^{-1}, 0)$ donc $\|P_\theta\| \geq \tan(\theta)^{-1}$

→ L'ensemble des projections n'est pas borné.



Ex. 3.2

1) $\forall M > 0 \exists R_M$ si $\|x\| > R_M \Rightarrow f(x) > M$

2) On pose $M = f(0)$

3) f est continu sur $B_f(0, R_M)$ compact



Donc $\exists x_0$ tq $f(x_0) = \min_{x \in B_f(0, R_M)} f(x)$

[Thm des bornes atteintes]

Montrons que $f(x_0)$ est le minimum global.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $f(x) \geq f(x_0)$.

cas 1: $x \in B_f(0, R_M)$

$f(x) \geq f(x_0)$ par définition de $f(x_0) = \min_{x \in B_f(0, R_M)} f(x)$

cas 2: $x \notin B_f(0, R_M)$

Par construction, $f(x) \geq f(0) \geq f(x_0)$

d'où $f(x) \geq f(x_0)$.

TD 2

Ex 1.1

$f: C^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $M_n(\mathbb{R})$

[On a $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$J_{f(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$x \mapsto J_{f(x)}$ est $C^0 \Leftrightarrow \forall i, j \quad x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est continue
 $\Leftrightarrow f$ est C^1 (par définition)

Ex 2.2 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ application linéaire

1) dérivées partielles def

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \text{ si ça existe}$$

$$f(x + te_i) = f(x) + t f(e_i)$$

$$\text{d'où } \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = f(e_i) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(e_i)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^m \text{ existe et vaut } f(e_i)$$

ou: f est linéaire donc $f(x) = AX$ où $X \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij})_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = A e_i = i\text{-ème colonne de } A$$

$$(\leadsto D_{f_x} = A, D_{f_x}(h) = Ah, D_{f_x}(h) = h \cdot f'(x))$$

2) différentielle de f en tout point

$$f(x+h) - f(x) = D_{f_x}(h) + o(\|h\|)$$

or $f(x+h) - f(x) = f(h)$ par linéarité

$$h \mapsto f(h) \text{ est linéaire en } h \text{ et } 0 \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

$$\text{donc } f(x+h) = f(x) + f(h) + 0$$

$$\text{d'où } \boxed{D_{f_x}(h) = f(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n}$$

3) f C^1 ?

À h fixé,

$$x \mapsto D_{f_x}(h) = f(h) \text{ est constant donc } C^1$$

Ex 1.4

$F(x) = \langle f(x), x \rangle \leadsto$ dérivées partielles + C^1

$$D_{f_x}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$D_{F_x}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$F(x+h) = \langle f(x+h), x+h \rangle$$

$$= \langle f(x) + D_{f_x}(h) + o(h), x+h \rangle$$

$$= \langle f(x), x \rangle + \langle D_{f_x}(h), x \rangle + \langle f(x), h \rangle + \langle D_{f_x}(h), h \rangle + \langle o(h), x \rangle + \langle o(h), h \rangle$$

linéaires en h pour un x fixé

$$\text{On pose } A_x: h \mapsto \langle f(x), h \rangle + \langle D_{f_x}(h), x \rangle$$

A_x est linéaire.

$$F(x+h) = F(x) + A_x(h) + \langle D_{f_x}(h), h \rangle + \langle o(h), x+h \rangle$$

$$|\langle D_{f_x}(h), h \rangle| \leq \|h\| \cdot \|D_{f_x}(h)\| \text{ Cauchy-Schwarz}$$

$$\text{d'où } |\langle D_{f_x}(h), h \rangle| = o(\|h\|)$$

$$\text{De même, } |\langle o(\|h\|), x+h \rangle| = o(\|h\|)$$

$$\text{On a donc } \boxed{F(x+h) = F(x) + A_x(h) + o(\|h\|)}$$

F est C^1 car f est polynomiale en les f_i et x_i et chaque f_i est C^1

Etapes:

- 1) écrire $f(x+h)$ + développer
- 2) identification des parties linéaires (en h , à x fixé)
- 3) Montrer que le reste est en $o(\|h\|)$

Ex 1.3

$B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire

1) $B \in C^0$

B forme bilinéaire donc $\exists A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $B(x, y) = \langle x, Ay \rangle$

où $A = (B(e_i, e_j))_{i, j \leq n}$

$$B(x, y) = B(\sum x_i e_i, \sum x_j e_j)$$

$$= \sum_{i, j \leq n} x_i y_j B(e_i, e_j) \text{ (bilinéarité)}$$

écriture de la bonne manière
 $\Rightarrow$ polynomiale

$\leadsto B$ est polynomiale en $x_i x_j$ donc $B \in C^0$

2) Différentielle de B en tout point

Soient $h_x \in \mathbb{R}^n, h_y \in \mathbb{R}^n$

$$B(x + h_x, y + h_y) = B(x, y) + B(x, h_y) + B(h_x, y) + B(h_x, h_y)$$

On pose $A_{xy}: (h_x, h_y) \mapsto B(x, h_y) + B(h_x, y)$

$$\text{donc } B(x + h_x, y + h_y) = B(x, y) + A_{xy}(h_x, h_y) + B(h_x, h_y)$$

$\hookrightarrow$ (revenir à la définition)

$$\text{où } |B(h_x, h_y)| = |\langle h_x, A h_y \rangle| \leq \|h_x\| \cdot \|A h_y\| = o(\|h_x, h_y\|)$$

$\downarrow$
 $= o(0)$
 terme linéaire

$$\text{d'où } D_{B(x, y)}(h_x, h_y) = B(x, h_y) + B(h_x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ et } \forall h_x, h_y \in \mathbb{R}^n$$

Ex 2.4 $M \rightarrow M^K$ $\cap M_n(\mathbb{R})$

1) C^∞ ?

[Note: dans le cas dans $\mathbb{R}$

$$F: x \mapsto x^K, D_F x(h) \mapsto K h x^{K-1}$$

$$\text{car: } (x+h)^K = \sum_{i=0}^K \binom{K}{i} x^i h^{K-i}$$

$$= x^K + K h x^{K-1} + \text{polynôme en } h \text{ d'ordre } \geq 2]$$

$$(M+H)^K = \underbrace{(M+H) \times (M+H) \times \dots \times (M+H)}_{K \text{ fois}} \quad (\Delta! \text{ le produit matriciel n'est pas commutatif})$$

$$= M^K + H M^{K-1} + M H M^{K-2} + \dots + M^{K-2} H M + M^{K-1} H + \text{termes avec au moins deux fois } H (= H x H = o(H))$$

À M fixé:

$$A_M: H \mapsto H M^{K-1} + \dots + M^{K-1} H = \sum_i M^i H M^{K-1-i}$$

$$M \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\|M\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|Mx\| \text{ norme}$$

$$\|Mx\| \leq \|M\| \|x\|$$

$$\text{Donc } (M+H)^K = M^K + A_M(H) + \text{termes avec au moins deux fois } H$$

$$\hookrightarrow 2H \leq \|H\|^2 \cdot \|M\|^{K-2}$$

$\parallel$
 $O(\|H\|)$

3) $f: M \rightarrow M^2$

$$df_M(H) = HM + MH$$

$$H_1 \text{ fixé: } M \mapsto df_M(H_1) = H_1 M + M H_1$$

$M_n(\mathbb{R})$ est linéaire.

La différentielle de cette application est elle-même

$$d^2 f_M(H_1, H_2) = H_1 H_2 + H_2 H_1$$

$$d^3 f = 0 \quad \leftarrow \text{(ne dépend pas de } M \text{)} \\ \leadsto \text{fonction constante}$$

$$df_{M+H_2}(H_1) = H_1(M+H_2) + (M+H_2)H_1$$

$$= H_1 M + H_1 H_2 + M H_1 + H_2 H_1$$

$$= df_M(H_1) + H_1 H_2 + H_2 H_1$$

$\parallel$
 terme linéaire + $O(\|H_2\|)$
 en H_2

H_1, H_2 fixé

$$M \mapsto d^2 f(H_1, H_2) = H_1 H_2 + H_2 H_1$$

$$d^2 f_{M+H_3}(H_1, H_2) = H_1 H_2 + H_2 H_1 = d^2 f_M(H_1, H_2) + \underbrace{0}$$

Ex 2.3

$$M \mapsto \det(M) \\ M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

1) C^∞ ?

$$\det(M_{ij}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)} \\ \text{polynômiale en } m_{ij} \text{ donc } f \text{ est } C^\infty$$

2) Dérivées partielles au point I_d + différentielle

* espace de départ : $M_n(\mathbb{R})$
 $\dim = n^2 \leadsto n^2$ dérivées partielles

(E_{ij}) base de $M_n(\mathbb{R})$

$$\det(I_d + tE_{ij}) = \det \begin{pmatrix} & & j \\ & 1 & \\ & & t \\ & & & i \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta!$ det n'est pas une application linéaire

Si $i=j$: $\det(I_d + tE_{ij}) = \det \begin{pmatrix} & & j & & \\ & 1 & & & \\ & & 1+t & & \\ & & & 1 & \\ & & & & i \end{pmatrix} = 1+t$

$$\leadsto \frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(I_d) = 1$$

Si $i \neq j$: $\det(I_d + tE_{ij}) = \det \begin{pmatrix} & & & t & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & i \end{pmatrix} = 1$

$$\text{d'où } \frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(I_d) = 0$$

différentielle:

$$(H = \sum_{i,j \leq n} h_{ij} E_{ij}) \quad df_{I_d} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$$

$$df_{I_d}(H) = \sum_{i,j \leq n} h_{ij} \frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(I_d) \\ = \sum_{i=1}^n h_{ii} = \text{Tr}(H)$$

3) $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(A+H) &= \det(A+H) \\ &= \det(A(I_d + A^{-1}H)) \\ &= \det(A) \cdot \det(I_d + A^{-1}H) \\ &\stackrel{DL}{=} \det(A) [\det(I_d) + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)] \end{aligned}$$

$$= \det(A) + \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)$$

Comme $H \mapsto \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H)$ est linéaire de $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$d_A f(H) = \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H)$$

$$A^{-1} = \frac{{}^t \text{Com} A}{\det(A)}$$

$$\det(A)$$

$$\leadsto d_A f(H) = \det(A) \text{Tr}\left(\frac{{}^t \text{Com} A}{\det A} H\right) = \text{Tr}({}^t \text{Com} A_x H)$$

4) En déduire la différentielle en tout point

$GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert

$$GL_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ est dense

$M \longrightarrow df_M(H)$ est C^0 car f est C^∞

Si $M_0 \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists A_m \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} M_0$ [densité]

Par continuité, $df_{A_m}(H) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} df_{M_0}(H)$

$$\text{Tr}({}^t \text{Com } A_m H) \longrightarrow df_{M_0}(H)$$

La fonction $A \longrightarrow {}^t \text{Com } A$ est C^0

Si $A_m \longrightarrow M_0$, ${}^t \text{Com } A_m \longrightarrow {}^t \text{Com } M_0$

donc $\text{Tr}({}^t \text{Com } A_m \times H) \longrightarrow \text{Tr}({}^t \text{Com } M_0 \times H)$

d'où $df_{M_0}(H) = \text{Tr}({}^t \text{Com } M_0 \times H)$

NOTES

$M_0 \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$

Soit $\varepsilon > 0$

$P(\varepsilon) = \det(M_0 + \varepsilon \text{Id})$ est polynôme en ε

$\det(M_0) = P(0) = 0$ par définition de degré au plus n

$\varepsilon \longrightarrow +\infty$ $\varepsilon \text{Id} + M_0 = \varepsilon \left(\text{Id} + \frac{M_0}{\varepsilon} \right)$

$\Rightarrow \det(M_0 + \varepsilon \text{Id}) = \varepsilon^n \det\left(\text{Id} + \frac{M_0}{\varepsilon}\right)$

$P(\varepsilon) \sim \varepsilon^n \times 1$

$\varepsilon \rightarrow +\infty$ $\text{cardet}\left(\text{Id} + \frac{M_0}{\varepsilon}\right) \rightarrow 1$

$P(\varepsilon)$ n'est pas nul et est degré n

$0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ des racines de P

$\forall r < \min_{1 \leq i \leq n-1} (|\lambda_i|) \Rightarrow P_{|J-1,1| \setminus \{0\}} \neq 0$

si $r < \min_{1 \leq i \leq n-1} (|\lambda_i|)$ $P(1/2) \neq 0$ $M_0 + \frac{1}{2} \text{Id} \in GL_n(\mathbb{R})$

5) $M \longmapsto M^{-1}$

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{Com}(M)$

Les coefficients de la matrice sont polynomiaux donc de classe C^∞ et le déterminant est une fonction de classe C^∞ , donc il en est de même pour l'inversion.

b) On commence par calculer les dérivées partielles.

Si $i \neq j$, alors:

$(I_n + t E_{ij})^{-1} = I_n - t E_{ij}$

$\text{cor}(E_{ij})^2 = 0$

donc $(I_n + t E_{ij})(I_n - t E_{ij}) = I_n - t^2 E_{ij}^2 = I_n$

donc la dérivée partielle correspondante est $-E_{ij}$

Si $i = j$, $I_n + t E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+t \end{pmatrix}$

donc $(I_n + t E_{ii})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} = I_n - \frac{t}{1+t} E_{ii}$

donc la dérivée partielle correspondante est $-E_{ii}$

$$df_{\text{Id}}(H) = \sum_{i,j \leq n} h_{ij} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}(\text{Id}) = \sum_{i,j \leq n} h_{ij} = -\text{Tr}(H)$$

donc $Df_{\text{Id}}(H) = -\text{Tr}(H)$

En déduire la différentielle en tout point:

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$

$(A+H)^{-1} = (A[\text{Id} + A^{-1}H])^{-1}$

$= (\text{Id} + A^{-1}H)^{-1} A^{-1}$
 $= \left(\text{Id} - A^{-1}H + o(\|H\|) \right) A^{-1}$
 $= A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|)$

$\Delta! (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

donc la différentielle en A est $H \longmapsto A^{-1}HA^{-1}$

Ex 2.1

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

1) $Mq \quad F_1(x, t) \longmapsto f(x-ct) \text{ \& } F_2(x, t) \longmapsto f(x+ct)$ sont solution de $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(x, t) = f'(x-ct) \times -c$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t^2} = c^2 \times f''(x-ct) \quad . \text{ Aussi, } \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x^2} = f''(x-ct) = \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\text{donc } \frac{\partial F_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$2) a) \quad \phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2c} \right)$$

$$\tilde{F} = F \circ \phi. \quad Mq \quad \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{On a } \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2c} \right) \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{Aussi, } \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x \partial y} = F''(\phi(x, y)) \times \phi''(x, y) = 0$$

b) En déduire $\exists f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $F(x, t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right] = 0$$

$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x, y)$ est une fonction constante en x    y fixe

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x, y) = G_1(y) \text{ ou } G_1 \text{ est une fonction continue}$$

Soit $g(y)$ une primitive de $G_1(y)$. $g'(y) = G_1(y)$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g(y)$$

$$\phi^t(x, y) \longrightarrow \left(x = \frac{y+t}{2}, t = \frac{y-x}{2c} \right)$$

$$\tilde{F} = F \circ \phi \Leftrightarrow F(t, x) = \tilde{F} \circ \phi^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\tilde{F}(x, y) - g(y)] = 0$$

$$y = x+ct, \quad x = x-ct$$

   x fixe, $\tilde{F}(x, y) - g(y) = G_2(x)$ où G_2 est une fonction de x

$$\tilde{F}(x, y) = g(y) + G_2(x)$$

$$F(t, x) = g(x+ct) + G_2(x-ct)$$

Ex.3.1 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$

1) Calculer le gradient de f et en déduire les points critiques.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

L'unique point critique est $(0,0)$

2) déterminer la nature des points critiques en utilisant une identité remarquable

$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ (tuer les termes mixtes) αxy

$$= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}y^2 + 1 \quad \left(= \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+2xy+y^2}{2} + 1 = \left(\frac{x^2+y^2}{2} + 1 + \frac{(x+y)^2}{2}\right) \right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 \geq 1 = f(0,0)$$

Somme de deux carrés

$\Rightarrow (0,0)$ est un minimum local

$\Rightarrow (0,0)$ est un minimum global

4) $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$

gradient + points critiques

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 2y+4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 4x+2y \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

L'unique point critique est $(0,0)$

5) en étudiant la restriction de g à deux droites bien choisies, déterminer la nature des pts critiques

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x^2 + y^2 + 4xy - 2 \\ &= (x+2y)^2 - 4y^2 + y^2 - 2 \\ &= (x+2y)^2 - 3y^2 - 2 \end{aligned}$$

On pose $L_1 = \{(x,y); x+2y=0\}$ ← [on a pris les termes linéaires au carré]

$$L_2 = \{(x,y); y=0\}$$

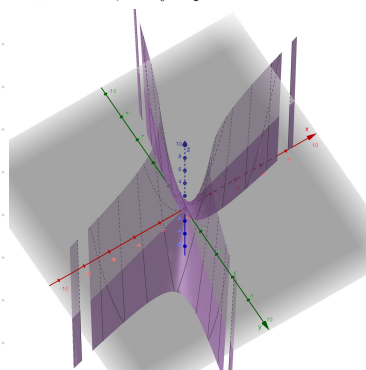
On a: $(x,y) \in L_1; y \neq 0$

$$g(x,y) = -y^2 - 2 < -2 = g(0,0)$$

$$(x,y) \in L_2 \setminus L_1$$

$$g(x,y) = (x+2y)^2 - 2 > -2 = g(0,0)$$

5. Le long de la droite d'équation $x = y$, on a $f(x,y) = 6x^2 - 2 > -2 = f(0,0)$ tandis que le long de la droite d'équation $x = -y$, on a $f(x,y) = -2x^2 - 2 < 0$. Ainsi, il n'y a pas d'extremum local en -2 .



Duration 30 min
10H38 $\rightsquigarrow$ 11H08

II 3.1
3.2

III 1.1
1.2

Lagrange

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = 0$

$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - p(g(x,y) - c)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \nabla f \in \text{Vect}(\nabla g_1, \dots, \nabla g_k)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = 0 \Leftrightarrow g_i(x,y) = c_i$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = 0$

$g(x,y) = c$

Ex 3.1)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$$

1) ∇f + pts critiques

$$\nabla f = (2x+y, 2y+x)$$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

2) Nature des pts critiques

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{2} + 1 + \frac{x^2+2xy+y^2}{2} \\ &= \frac{x^2+y^2}{2} + 1 + \frac{(x+y)^2}{2} \end{aligned}$$

$$f(x,y) \geq 1 \rightsquigarrow \text{min global en } (0,0)$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$$

3) ∇g + pts critiques

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 2y+4x \end{pmatrix}$$

$$\text{pt critique : } (0,0)$$

4) nature des pts critiques

$$g(x,x) = 6x^2 - 2 > -2 = g(0,0)$$

$$g(x,-x) = -2x^2 - 2 < -2 = g(0,0)$$

Ainsi il n'y a pas d'extremum local en -2. On a un point selle.

Ex 3.2) (extrema locaux + globaux des fonctions)

(...)

TD 3 - Contraintes d'égalité

Ex 1.6 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2-1)^2 + y^2 \leq 4\}$ $f(x, y) = xy$

1) Mq C Compact

fermé: Posons $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto (x^2-1)^2 + y^2$$

g est continue car polynomiale, $C = g^{-1}([0, 4])$ est fermé

borné: Soit $(x, y) \in C$, on a $(x^2-1)^2 + y^2 \leq 4$

$$\Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 2$$

de même, $(x^2-1)^2 \leq (x^2-1)^2 + y^2 \leq 4$

$$\text{d'où } |x^2-1| \leq 2$$

$$(|x^2-1|) \leq |x^2-1| \leq 2$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{3}$$

On a montré que $C \subset [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-2, 2]$ donc C est borné

C est fermé et borné, donc compact.

2) En déduire que f admet un min global et un max global

f est continue, C est compact, donc par thm des bornes atteintes, f admet un maximum et un minimum global sur C.

3) a) $\nabla f(x, y) = (y, x)$

b) Mq f possède un unique pt critique dans C° et le déterminer

$$(x, y) \in C^\circ \text{ tq } \nabla f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Réciproquement, $(0, 0) \in C^\circ$ et est un pt critique.

4) a) $\partial C = \bar{C} \setminus C^\circ = C \setminus C^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2-1)^2 + y^2 = 4\}$

$$b) \mathcal{L} = xy - \lambda((x^2-1)^2 + y^2 - 4)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda(2(x^2-1) \times 2x) = y - 4\lambda(x^2-1)x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda 2y = x - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x^2-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda 2y = x - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x^2-1)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$y = 4\lambda x(x^2-1), x = 2\lambda y$$

Comme $x \neq y \neq 0$ (car $(0, 0) \notin \partial C$)

$$\text{On trouve } \lambda = \frac{x}{2y} \leadsto \frac{x}{2\lambda} = 4\lambda x(x^2-1) \text{ donc } x^2-1 = \left(\frac{8\lambda^2}{2\lambda}\right)^{-1} = \frac{y^2}{2x^2}$$

c) pts critiques

En remplaçant le résultat précédent dans la contrainte, on trouve

$$(x^2-1)^2 + 2x^2(x^2-1) = 4 \leadsto 3x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}$$

$$g(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 - (x^2-1)^2$$

$$= 4 - \left(\frac{2+\sqrt{13}}{3} - 1\right)^2 = \dots = \frac{22+2\sqrt{13}}{9}$$

$$4 \text{ pts critiques: } \left(\pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}, \pm \sqrt{\frac{22+2\sqrt{13}}{9}}\right)$$

5) En calculant les valeurs de f aux pts critiques sous contraintes, et en comparant à $f(0, 0)$

on trouve $f(x^+, y^+)$ max et $f(x^-, y^-)$ min.