

3) Déterminer ce minimum

① Le lagrangien est:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -x^2 - y^2 - \lambda_1(2x + y - 2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

② système KKT: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ car c'est un minimum)

$$\begin{cases} -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (1) \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1(2x + y - 2) = 0 & (3) \\ \lambda_2 x = 0 & (4) \\ \lambda_3 y = 0 & (5) \end{cases}$$

distinctions des cas:

(si $\lambda_i = 0$, $h_i < 0$ h_i inactive.

$\lambda_2 \neq 0 \text{ et } \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0 \text{ et } \lambda_3 = 0$, et voir les sous cas pour λ_1 , pour ensuite déduire s'il existe des points critiques.)

③ Résolution

→ si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$(1) \Rightarrow -2x - 2\lambda_1 = 0$$

$$(2) \Rightarrow -2y - \lambda_1 = 0$$

$$\bullet \text{ si } \lambda_1 = 0, x = y = 0$$

$$\bullet \text{ si } \lambda_1 \neq 0$$

$$(1) \quad 2x = -2\lambda_1 \quad] \Rightarrow x = 2\lambda_1$$

$$(2) \quad -2y = \lambda_1$$

$$(3) \quad 2x + y = 2 \Rightarrow 4\lambda_1 + \lambda_1 = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{5}$$

$$\text{et donc } x = \frac{4}{5}$$

Point critique: $(0, 0)$

pt critique: $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

→ si $\lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$

$$(4) \text{ et } (5) \Rightarrow x = y = 0$$

ce qui implique $\lambda_1 = 0$ (2)

$$(1) \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ contradiction avec l'hypothèse}$$

Donc ce cas n'est pas possible (en effet, ça correspond au cas où les 3 contraintes sont actives.)

→ si $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$

$$(5) \Rightarrow y = 0$$

$$(1) \Rightarrow 2x - 2\lambda_1 = 0$$

$$(2) \Rightarrow -\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1 \text{ donc } \lambda_1 \neq 0 \text{ (}\lambda_1 = 0 \text{ impossible)}$$

$$\text{donc } (3) \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Point critique: $(1, 0)$

→ si $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$

$$(4) \Rightarrow x = 0$$

$$\text{donc } (1) \Rightarrow -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \text{ donc } \lambda_1 \neq 0$$

$$\text{donc } (3) \Rightarrow y = 2$$

Point critique: $(0, 2)$

④ Valeurs def en les pts critiques pour trouver le min global:

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 2) = -4$$

$$f(1, 0) = -1$$

$$f(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) = -\frac{4}{5}$$

$(0, 2)$ est le min global

Ex 2.2

$\beta \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto 2x + \beta y$ sous les contraintes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 \leq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

i) Mq les contraintes sont toujours qualifiées

On note $h_1(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ et $h_2(x, y) = x - y - 2 \leq 0$

$$\nabla h_1(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla h_2(x, y) = (1, -1)$$

les contraintes sont qualifiées en un point si les gradients des contraintes actives en ce point forment une famille libre

si seule h_1 est active:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\text{donc } \nabla h_1(x, y) \neq (0, 0)$$

Donc la famille $\{\nabla h_1\}$ est libre

si seule h_2 est active:

$$\forall x, y, \nabla h_2 = (1, -1) \neq (0, 0)$$

donc $\{\nabla h_2\}$ forme une famille libre

si h_1 et h_2 sont actives:

$$(1) x^2 + y^2 = 5 \text{ et } x - y = 2 \quad (2)$$

$$\text{Supposons } \exists \lambda \text{ tq } \nabla h_1(x, y) = \lambda \nabla h_2(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -y$$

$$\text{donc } (2) \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = -1 \text{ et } x = 1$$

$$\text{or } (1) \quad 2 \neq 5 \text{ contradiction}$$

$\Rightarrow \{\nabla h_1, \nabla h_2\}$ forment une famille libre (ne sont pas colinéaires dans $\mathbb{R}^2$)

$\Rightarrow$ Les gradients des contraintes actives forment toujours une famille libre

$\Rightarrow$ Les contraintes sont qualifiées en tout point.

2) Valeurs de β pour lesquelles $(-1, 2)$ est un pt critique sous contraintes

[Le prof en TD a juste résolu le problème d'optimisation en général, pour ensuite trouver β (il exprime x et y en fct de β)]

(1) Lagrangien: $\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2x + \beta y - \lambda_1(x^2 + y^2 - 5) - \lambda_2(x - y - 2)$

$$(2) \text{ KKT } \begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 & (1) \\ \beta - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 & (2) \\ \lambda_1(x^2 + y^2 - 5) = 0 & (3) \\ \lambda_2(x - y - 2) = 0 & (4) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ contraintes actives en $(-1, 2)$

$$h_1(-1, 2) = (-1)^2 + 2^2 - 5 = 0 \Rightarrow \text{contrainte 1 active}$$

$$h_2(-1, 2) = -1 - 2 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow \text{contrainte 2 inactive}$$

$$\text{donc } \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow$ on trouve β

$$(1) \Rightarrow 2 - 2\lambda_1(-1) = 0 \Rightarrow 2\lambda_1 = -2 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \leq 0 \quad \checkmark \text{ ok}$$

$$\text{donc } (2) \Rightarrow -4(-1) + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -4}$$

+ réciproquement, si $\beta = -4$

on peut prendre $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 0$

(la seconde contrainte

est inactive) pour vérifier que

$(-1, 2)$ est un pt critique sous contraintes

3) minimum global?

vérifier que D est compact:

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 5, x - y \leq 2\}$ fermée car définie par des inégalités larges.

De plus, si $(x, y) \in D$, alors $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \Rightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
 $y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \Rightarrow y \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

Donc D est bornée.

$\hookrightarrow$ D est compacte

De plus, f est continue (car polynomiale)

Donc f admet un minimum global sur D.

points critiques pour $\beta = -4$: KKT =
$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 & (1) \\ -4 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 & (2) \\ \lambda_1(x^2 + y^2 - 5) = 0 & (3) \\ \lambda_2(x - y - 2) = 0 & (4) \end{cases}$$

$\rightarrow$ si $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 2$ impossible car $\lambda_2 \leq 0$

$\rightarrow$ si $\lambda_2 = 0$

$$(1) \Rightarrow 2\lambda_1 x = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x = 1 \Rightarrow x = 1/\lambda_1$$

$$(2) \Rightarrow 2\lambda_1 y = -4$$

$$\Rightarrow \lambda_1 y = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2}{\lambda_1}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{4}{\lambda_1^2} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\lambda_1^2} = 5 \Rightarrow \lambda_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ (car } \lambda_1 \leq 0)$$

donc $x = -1$ et $y = 2$

$\rightarrow$ si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$$(4) \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = x - 2$$

$$(3) \Rightarrow (x - 2)^2 + x^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 = 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 8 = 24$$

$$x^{\pm} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = 1 \pm \sqrt{6}/2$$

Points critiques: $\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{6}/2, 1 + \sqrt{6}/2 \\ 1 - \sqrt{6}/2, 1 - \sqrt{6}/2 \end{pmatrix}$

valeur de f en ces points $-10, 6 - \sqrt{6}$ et $6 + \sqrt{6}$

$\rightarrow$ donc on a un min global en $(-1, 2)$

$$f(x, y) = x + y$$

$$x + y \leq 1$$

1) En quels points les contraintes sont-elles qualifiées?

$$h(x, y) = xy - 1$$

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Ainsi les contraintes sont qualifiées $\forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Elles ne sont pas qualifiées en $(0, 0)$

2) Trouver l'unique pt où les conditions KKT sont vérifiées

$$\mathcal{L} = x + y - \lambda(xy - 1)$$

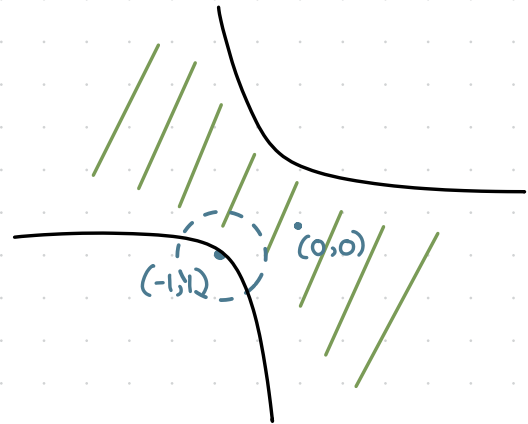
$$\text{KKT} = \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - \lambda x = 0 \\ \lambda(xy - 1) = 0 \end{cases}$$

① si $xy - 1 < 0$ (la contrainte est inactive)

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\text{KKT} \Rightarrow 1 = 0 \text{ impossible}$$

si il y a un point critique à l'intérieur,
 $\leadsto$ absurdité



② $xy = 1$
bord du domaine

$$y = 1/x$$

$$\text{KKT} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{x} = 0 \Rightarrow \lambda = x \\ 1 - \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$x = 1/x \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{On trouve } (x=1, y=1) \Rightarrow \lambda > 0 \quad (\lambda \text{ doit être } < 0!)$$

$$(x=-1, y=-1) \Rightarrow \lambda < 0$$

Donc l'unique solution est $\boxed{(-1, -1)}$

3) Mq ce point n'est pas un extrema local (on prend des suites qui tendent vers $-1, -1$ tq $f(x_n, y_n) > f(-1, -1)$ / $f(x_n, y_n) < f(-1, -1)$)
param. locale de l'hyperbole

$$f(-1, -1) = -2$$

$$f(-t, -\frac{1}{t}) = -t - \frac{1}{t} < -2 \quad (\text{pour } t \text{ proche de } 1)$$

$$\Downarrow$$

$$-t^2 - 1 < 2t$$

donc $(-1, 1)$ n'est pas un min local

et $(-1, -1)$ n'est pas un max local:

$$f(-1+t, -1+t) = (-1+t) + (-1+t) \quad (t > 0)$$

$$= -2 + 2t > -2 \quad \forall t > 0$$

d'où $(-1, -1)$ n'est pas un max local.

(on pose $P(t) = -t^2 - 1 + 2t$)

$$P(1) = 0$$

$$P(t) = -[t^2 - 1 - 2t]$$

$$= -(t-1)^2 < 0 \quad \forall t$$

$$\leadsto \forall t \in \mathbb{R}_+, -t - \frac{1}{t} < -2, t \neq 1$$

Ex 2.5

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y \mapsto x(1+y^2)$$

minimiser sous contraintes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 - x^2/4 \end{cases}$$

1) Justifier l'existence d'un minimum global $h_1 = x^2 + y^2 - 4, h_2 = 1 - \frac{x^2}{4} - y$

Posons $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } y \leq 1 - x^2/4\}$

D est défini par des inégalités larges, donc D est fermé.

Si $(x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq 4$ donc $x \in [-2, 2]$ et $y \in [-2, 2]$

D est fermé et borné, donc compact.

f est C^0 dessus. Donc f admet un minimum global.

2) Mq les contraintes sont qualifiées en tout point

$$\nabla h_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \nabla h_2 = \begin{pmatrix} -1/2 x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla h_1, \nabla h_2) \text{ pas libre} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \text{ ou} \\ \det(\nabla h_1, \nabla h_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2x & -1/2 x \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + xy = 0$$

$$(\nabla h_1, \nabla h_2) \text{ pas libre} \Rightarrow x(y-2)=0$$

$$D = \{h_1 \leq 0\} \cap \{h_2 \leq 0\}$$

$$\text{si } p \in \{x=0\} \cap D$$

$$p = (0, \alpha) \text{ où } \begin{cases} \alpha^2 - 4 \leq 0 \\ 1 - \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha \geq 1 \quad \alpha \leq \sqrt{4} = 2 \quad \alpha \in [1, 2]$$

$$\text{si } \alpha \in]1, 2[\quad h_1(p) < 0 \text{ et } h_2(p) < 0$$

$$\text{sinon, } \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = 2 \text{ mais une seule condition est active}$$

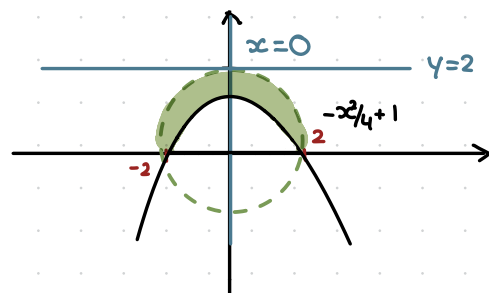
$$\text{Pour tout } \nabla h_1(0, 1) \neq 0 \quad \nabla h_2(0, 1) \neq 0$$

$$\nabla h_1(0, 2) \neq 0 \quad \nabla h_2(0, 2) \neq 0$$

Dans les deux cas, $p = (0, 1)$ ou $p = (0, 2)$, les contraintes sont qualifiées.

$$\text{et } \{y=2\} \cap D = \{(0, 2)\}$$

$\uparrow$ qualifié.



Soit p est sur l'une des droites

Soit aucune des deux
 $\uparrow$ gradients forment
une famille libre

($\forall p \in D$ si $p \in \{x=0\} \cup \{y=2\}$
 p est qualifié
sinon $p \notin \{x=0\} \cup \{y=2\}$
 $\downarrow$
($\nabla h_1(p), \nabla h_2(p)$) libre
donc p est qualifié)

3) a) Écrire le système KKT

$$\mathcal{L} = x(1+y^2) - \mu_1(x^2+y^2-4) - \mu_2\left(1-\frac{x^2}{4}-y\right)$$

$$\text{KKT} = \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1+y^2) - 2\mu_1 x + \frac{\mu_2 x}{2} = 0 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2xy - 2\mu_1 y + \mu_2 = 0 & (2) \\ \mu_1(x^2+y^2-4) = 0 & (3) \\ \mu_2\left(1-\frac{x^2}{4}-y\right) = 0 & (4) \end{cases}$$

b) On suppose les deux contraintes sont actives. Calculer x, y, μ_1 et μ_2

$$(h_1 = h_2 = 0)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y^2 - 4 + 4 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y(y-4) = 0 \end{cases}$$

donc

$$(x, y) = \begin{pmatrix} -2, 0 \\ 2, 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ si $y=4$, $x=0$
la 1^{ère} équation
n'est pas vérifiée

$$\text{en } x=2, y=0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - 2\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mu_2 = 0$$

dans les deux cas, $\mu_2 = 0$ pas possible, $\mu_1 = \pm 1/4$
 $(x = -2, y = 0)$

c) on suppose qu'une seule contrainte est active

cas 1: $\mu_1 = 0$ et $1 - x^2/4 - y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y^2 + \frac{\mu_2 x}{2} = 0 \\ 2xy + \mu_2 = 0 \\ y = 1 - x^2/4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu_2 = -24x$ dans (1)

donne $1 + y^2 = 4y - 4y^2$ ($x^2 = 4 - 4y$ car $b_2 = 0$)

i.e. $5y^2 - 4y + 1 = 0$ cette équation n'a pas de solution $\Rightarrow x = \pm \sqrt{5/3}$ ($-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}$) vérifie $\mu_1 \leq 0$.

cas 2: $\mu_2 = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$

(1) $\Rightarrow 1 + y^2 = 2\mu_1 x$

(2) $\Rightarrow 24x = 2\mu_1 y$

si $y = 0$, $x = \pm 2$. mais si $x = 2$, $\mu_1 > 0$. donc $x = -2$

si $y \neq 0$, (2) $\Rightarrow 2x = 2\mu_1$

donc (1) $\Rightarrow 1 + y^2 = 2x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - y^2 - 1 = 0$ et $x^2 = 4 - y^2$

$\Rightarrow 8 - 2y^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow -3y^2 + 7 = 0$

$\Rightarrow y^2 = 7/3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{7/3}$

d) En déduire le minimum: il reste le cas où les 2 contraintes sont inactives $\mu_1 = \mu_2 = 0$ or il n'y a pas de solutions dans ce cas. On calcule f (chaque valeur) $\Rightarrow$

Exercice 2.4 (pas fait en TD)

$x \approx 1\text{€}$ $y \approx 3\text{€}$

nb de X nb de Y

coût de fabrication: $C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 10000$

1) $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x, y) = ?$

$P(x, y) = \underbrace{x + 3y}_{\text{argent généré par les voitures}} - \underbrace{C(x, y)}_{\text{coût de production}}$

2) Capacité de production: 20 jouets par jour

On cherche à maximiser P sous la contrainte $x + y = 20$

On pose $g(x, y) = x + y - 20$

$\nabla g(x, y) = (1, 1) \neq 0$ en tout point.

On peut donc utiliser la méthode de Lagrange.

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y)$

On résout le système: $\nabla P(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, $g(x, y) = 0$

$\begin{cases} -10x + 2y + 3 = \lambda & \Rightarrow -10x + 2y + 3 = -10y + 2x + 3 \\ -10y + 2x + 3 = \lambda & \Rightarrow 12y - 12x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$

En remplaçant dans la contrainte on obtient $x = y = 10$

$P(10, 10) = 260$

Pour les contraintes additionnelles $x, y \geq 0$, elle ne sont pas vérifiées sur D ssi $(x, y) = (20, 0)$ ou $(x, y) = (0, 20)$

or $f(0, 20) = f(20, 0) = -940$ donc le maximum est bien atteint en $(10, 10)$

3) [Optimisation avec $x + y \leq 20$]

On pose $h_1(x, y) = -x$, $h_2(x, y) = -y$, $h_3(x, y) = x + y - 20$

1) Qualification des contraintes

$\nabla h_1 = (-1, 0)$, $\nabla h_2 = (0, -1)$, $\nabla h_3 = (1, 1)$

$\rightarrow$ les 3 vecteurs ne forment pas une famille libre dans $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ si on prend l'un (ils sont tous $\neq (0, 0)$) ou deux de ces vecteurs, la famille est libre.

$\rightarrow$ Il suffit donc de voir que les contraintes ne peuvent pas être active en m temps

$\hookrightarrow$ on aurait $x = y = 0$, $0 = 20$ impossible

Donc les contraintes sont qualifiées en tout point.

2) Lagrangien

$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x + 3y - C(x, y) + \lambda_1 x + \lambda_2 y - \lambda_3(x + y - 20)$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ (il s'agit de maximiser)

3) Système KKT:

$$\begin{cases} -10x + 2y + 3 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 & (1) \\ -10y + 2x + 3 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 x = 0 & (3) \\ \lambda_2 y = 0 & (4) \\ \lambda_3(x + y - 20) = 0 & (5) \end{cases}$$

4) Résolution:

[cas: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 0$]

si $\lambda_3 \neq 0$: $x + y = 20$ nous sommes dans le cas traité précédemment.

On suppose $\lambda_3 = 0$

→ si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (h_1, h_2 inactives)

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow -10x + 2y + 3 = 0 \\ (2) &\Rightarrow -10y + 2x + 3 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow x = y$$

donc (1) $\Rightarrow -8x = -3 \Rightarrow x = 3/8 = y$

point critique: $\boxed{(3/8, 3/8)}$

→ si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

on aurait $x = y = 0$ et donc (1) $\Rightarrow \lambda_1 = -3$ ce qui contredit $\lambda_1 \geq 0$

→ si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$

$$(1) \Rightarrow -10x + 2y + 3 = -\lambda_1$$

$$(2) \Rightarrow -10y + 2x + 3 = 0$$

$$(3) \Rightarrow x = 0$$

$$\text{donc (2)} \Rightarrow -10y = -3 \Rightarrow y = 3/10$$

$$\text{donc (1)} \Rightarrow -\lambda_1 = 6/10 + 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 < 0 \text{ ce qui contredit } \lambda_1 \geq 0$$

→ si $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$

$$(4) \Rightarrow y = 0$$

$$\text{donc (1)} \Rightarrow -10x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3/10$$

$$\text{donc (2)} \Rightarrow \lambda_2 = -2x - 3$$

$$\Rightarrow \lambda_2 < 0 \text{ ce qui contredit } \lambda_2 \geq 0$$

$$P(3/8, 3/8) > P(10, 10)$$

donc le profit sera plus grand si on ne produit pas à pleine capacité.

Ex 3.1) 16 000 grosses voituresExo 3.1

10 000 petites

600 unités a

400 unités caoutchouc

→ il faut une unité de c

et une d'acier pour produire une petite voiture

une unité c et 2 d'acier pour produire une grande voiture

1) x : grosses voitures y : petites voitures

$$f(x, y) = 16000x + 10000y \text{ maximiser}$$

$$\text{sous les contraintes } x + y \leq 400, 2x + y \leq 600, x \geq 0, y \geq 0$$

$$\text{On pose } h_1(x, y) = -x$$

$$h_2(x, y) = -y$$

$$h_3(x, y) = x + y - 400$$

$$h_4(x, y) = 2x + y - 600$$

$$\text{On a: } C = \{(x, y) ; h_i \leq 0 ; i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

est compact car fermé et borné et f est C^0 dessus, donc f admet un maximum sur C

[ce qui a été fait en TD]:

Par le thm de la solution sommet, la solution est sur un sommet (pb linéaire)

$$\begin{cases} h_3(x, y) = 0 \\ h_4(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 400 = 0 \\ 2x + y - 600 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 200$$

(En ignorant les contraintes h_1 et h_2)

$$f(200, 200) = 5200000 \in$$

idk why he started testing the other ones???

$$\rightarrow \begin{cases} h_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ h_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases} \mid \begin{cases} h_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 600 \\ h_4(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(0, 600) = 4000000 \end{cases} \mid \begin{cases} h_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 400 \\ h_3(x, y) = 0 \\ f(x, y) = 4000000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 300 \\ h_4(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(0, 300) = 4800000 \end{cases} \mid \begin{cases} h_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 400, y = 0 \\ h_3(x, y) = 0 \text{ impossible car } h_4(x, y) = 200 > 0 \end{cases}$$

→ le maximum est 5200000€ atteint en $x = 200 = y$.

Avec KKT:

1) Lagrangien: $\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 16000x + 10000y + \lambda_1 x + \lambda_2 y - \lambda_3(x + y - 400) - \lambda_4(2x + y - 600)$
où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ (car on cherche à maximiser)

2) KKT: (en ignorant $x \geq 0$ et $y \geq 0$)

$$\begin{cases} 16000 - \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 & (1) \\ 10000 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & (2) \\ \lambda_3(x + y - 400) = 0 & (3) \\ \lambda_4(2x + y - 600) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 6000 - \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 6000 \text{ et donc } \lambda_3 = 4000$$

$$\text{donc } \begin{cases} x + y = 400 \\ 2x + y = 600 \end{cases} \text{ donc } x = y = 200.$$

2) Si l'on part de 700 unités d'acier

Les contraintes sont toutes les deux actives puisque la 1^{ère} équation ne change pas.

$$\text{On a: } \begin{cases} x+y=400 \\ 2x+y=700 \end{cases}$$

donc $x=300$ et $y=100$

(profit de 9800000€)

3) Avec le m raisonnement,

$$\begin{cases} x+y=400 \\ 2x+y=900 \end{cases} \text{ donc } x=500 \text{ et } y=-100$$

or y doit être >0 .

→ on ne peut pas ignorer les contraintes sur les variables.

→ l'une au moins de ces contraintes doit être active (soit $x=0$ soit $y=0$ à l'optimum)

si $x=0$, $y=400$ → profit = 400 000

si $y=0$, $x=400$ → profit de 6400 000.
 c'est la solution maximale.

4) a) $f(u,v) = 400u + 600v$ (minimiser)

sous les contraintes:

$$\begin{cases} u+v \geq 10\,000 \\ u+2v \geq 16\,000 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

explication: u = prix d'achat d'une unité de caoutchouc
 v = prix d'achat d'une unité d'acier

coût total $f(u,v) = 400u + 600v$

Le fabricant n'acceptera de vendre ses stocks que si c'est au moins aussi avantageux que de fabriquer des voitures.

petite voiture: 1 caoutchouc + 1 acier vendue 10000€
→ $u+v \geq 10000$

grosse voiture: 1 caoutchouc + 2 acier, 16000€
→ $u+2v \geq 16000$

$u, v \geq 0$ (prix positive)

b) Mq le dual de ce problème est équivalent au problème de l'énoncé

On calcule la matrice H et le vecteur d correspondant:

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -10\,000 \\ -16\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $z = (u, v)$

le primal s'écrit $\min c^T z$ sous $H z \leq d$ où $c = (400, 600)^T$

le dual est: $\max d^T \mu$ sous $H^T \mu = c, \mu \leq 0$

en notant $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$

$$\text{on obtient: } \max -10000\mu_1 - 16000\mu_2 \text{ sous } \begin{cases} -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 400 \\ -\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_4 = 600 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \leq 0 \end{cases}$$

changement de signe:

en renommant on pose $\tilde{\mu}_j = -\mu_j$ ($\tilde{\mu}_j \geq 0$) et on renomme $\tilde{\mu}_j$ en μ_j .

Le pb dual devient,

$$\text{maximiser } 10\,000\mu_1 + 16\,000\mu_2 \text{ sous } \begin{cases} 400 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & (1) \\ 600 = \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_4 & (2) \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \mu_3 = 400 - \mu_1 - \mu_2 \geq 0$$

$$\mu_4 = 600 - \mu_1 - 2\mu_2 \geq 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 \leq 400 & (\text{max } 10000\mu_1 + 16000\mu_2) \\ \mu_1 + 2\mu_2 \leq 600 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

En posant $x = \mu_1$, $y = \mu_2$, on retrouve exactement le pb de la question initiale.

4)c) Thm de dualité forte

max du pb primal = min pb dual

donc $u = 4000$, $v = 6000$ (μ_1 et μ_2 en $\mathbb{Q}$)

(autrement dit, le concurrent doit proposer 4000 € par unité de caoutchouc et 6000 € par unité d'acier pour que le fabricant soit indifférent entre vendre ses stocks et produire des voitures).

Ex 3.3 [pas fait en TD]

100000 € : actions 2000 l'unité

800/an l'unité

terrains 300 m²

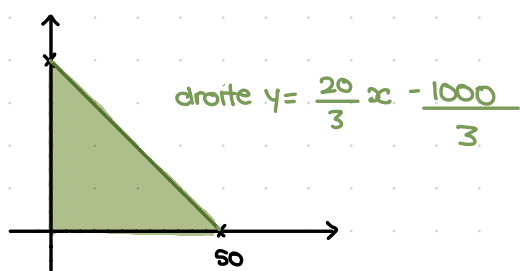
100 /an /m²

$x :=$ nb actions achetées

$y :=$ nb mètres carrés achetés

- 1) On cherche à maximiser : $800x + 100y$ sous les contraintes : $2000x + 300y \leq 100\ 000$
 $x \geq 0$, $y \geq 0$

- 2) Dessin des contraintes:



- 3) existence d'un profit maximum

L'ensemble D des points satisfaisant les contraintes est fermé car il est défini par des inégalités larges

De plus, comme $x \geq 0$, $\forall (x,y) \in D$: $2000x \leq 2000x + 300y \leq 100\ 000$

donc $x \in [0, 50]$. De même, $y \in [0, \frac{1000}{3}]$

Donc D est compact. f est continue, donc il existe un maximum global

- 4) Trouver le max

D'après thm de la solution sommet, le maximum est atteint en un sommet de D.

→ L'intersection de $2000x + 300y = 100\ 000$ et $x=0$ donne $y = \frac{1000}{3}$ ✓ vérifie les contraintes

→ si $2000x + 300y = 100\ 000$ et $y=0$, $x=50$ ✓ vérifie les contraintes

→ si $x=0$ et $y=0$ on a le point (0,0)

$f(0, \frac{1000}{3}) = \frac{100\ 000}{3}$, $f(50, 0) = 40\ 000$, $f(0, 0)$

La plus grande valeur est 40000, donc le maximum est atteint pour $x=50$ et $y=0$ et vaut 40000€.

TD 4 - Convexité

DEF: $M \subset \mathbb{R}^n$ est dite convexe si $\forall x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$

$$x + t(y-x) \in M \Leftrightarrow (1-t)x + ty \in M$$

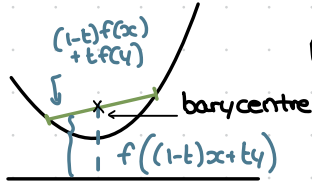
PROF: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Hess (f) = a toute ses v.p. $> 0 \Rightarrow f$ convexe

$< 0 \Rightarrow f$ concave

Δ Il faut pouvoir dériver 2 fois. $f'' > 0 \Rightarrow f$ convexe

$x \mapsto |x|$ est convexe mais

DEF: f est convexe si $\forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$
 $(\Leftrightarrow \{(x, y) ; y \geq f(x)\}$ est un ensemble convexe



par exemple pour $f(x) = |x|$:

$$\begin{aligned} |(1-t)x + ty| &\leq |(1-t)x| + |ty| \text{ Ineq } \nabla \\ &= (1-t)|x| + t|y| \\ &= (1-t)f(x) + tf(y) \end{aligned}$$

exemples: exp convexe

linéaire convexe (et concave)

log concave

Ex1: C partie convexe de $\mathbb{R}^n$

1) $M_q \bar{C}$ convexe

Soient $x, y \in \bar{C}$, $t \in [0, 1]$

$$\exists x_n \in C ; x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

$$\exists y_n \in C ; y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$$

$$ty + (1-t)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} ty_n + (1-t)x_n \in C \text{ car } y_n, x_n \in C \text{ et } t \in [0, 1]$$

$$\text{d'où } ty + (1-t)x \in \bar{C}$$

2) $M_q \bar{C}$ convexe

Supposons $\exists x, y \in \bar{C}$ et $t_0 \in [0, 1]$ tq $q = (1-t_0)x + t_0y \in C \setminus C^\circ = \partial C$

$$\exists q_n \notin C, q_n \rightarrow q. \partial C = (\mathbb{R}^n \setminus C)$$

$$r_n = q_n - q \rightarrow 0$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad B(x, \varepsilon_0) \subset C$$

$$B(y, \varepsilon_0) \subset C$$

$$\exists N \geq 0 ; \forall n \geq N \quad \|r_n\| < \varepsilon_0$$

$\Downarrow$

$$\forall n \geq N \quad x + r_n \in B(x, \varepsilon_0) \subset C$$

$$y + r_n \in B(y, \varepsilon_0) \subset C$$

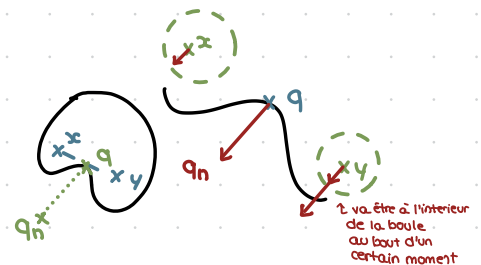
$$x + r_n, y + r_n \in C$$

$$\Rightarrow (1-t_0)(x + r_n) + t_0(y + r_n) \in C \quad \forall n \geq N \quad (C \text{ convexe})$$

$$(1-t_0)x + t_0y + r_n$$

$$q + r_n = q_n, \text{ or } q_n \notin C$$

Absurde



il va être à l'intérieur de la boule au bout d'un certain moment

3) C_1 et C_2 convexe $\Rightarrow C_1 \cap C_2$ convexe

Soient $x, y \in C_1 \cap C_2$ et $t \in [0, 1]$. Alors $(1-t)x + ty \in C_1$ par convexité et de $\bar{m} \in C_2$

donc $(1-t)x + ty \in C_1 \cap C_2$. $\hookrightarrow C_1 \cap C_2$ convexe

Examen:

optimisation linéaire
contrainte d'inégalité
optimisation convexe

Exos 2.1
2.5
3.2
3.4

Ex 2.1:

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - axy - 2x - 2y$$

1) $\nabla f_a + H_s f_a$

$$\nabla f_a = \begin{bmatrix} 2x - ay - 2 \\ 2y - ax - 2 \end{bmatrix}$$

$$H_s(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{bmatrix}$$

2) Pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle convexe?

Si les valeurs propres de la hessienne sont positives strictement, alors f_a est convexe

$$|H f_a(x, y)| = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{vmatrix} = 4 - a^2$$

$$\text{Tr}(H f_a(x, y)) = 4 > 0$$

Il faut que $4 - a^2 > 0$ i.e. $a \in [-2, 2]$

3) Mq pour $a \in]-2, 2[$, f_a possède un unique minimum global + le calculer

$$\begin{aligned} \text{On a: } f_a(x, y) &= x^2 + y^2 - axy - 2x - 2y \\ &= \left(x - \frac{ay}{2}\right)^2 - \frac{a^2 y^2}{4} + y^2 - 2x - 2y \\ &= \left(x - \frac{ay}{2}\right)^2 + y^2 \underbrace{\left[1 - \frac{a^2}{4}\right]}_{>0} - 2x - 2y \end{aligned}$$

$$\lim_{\|x, y\| \rightarrow +\infty} f_a(x, y) = +\infty$$

f_a est continue, elle admet un minimum global

$$\begin{aligned} \text{Pt critique de } f_a: \nabla f_a = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ 2y - ax - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4-a^2} \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2a}{4-a^2} = \frac{2(2+a)}{(2+a)(2-a)} = \frac{2}{2-a} \\ y = \frac{4+2a}{4-a^2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Le minimum global est } (x, y) = \left(\frac{2}{2-a}, \frac{2}{2-a}\right)$$

4) $|a| > 2$

a) Calculer $f_a(x, y) - \frac{1}{2} \langle H f_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$

$$= -2x - 2y$$

b) Mq f n'a pas de minimum global

$$H f_a = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Polynôme caractéristique: } \chi^2 - 4\chi + (4 - a^2)$$

$$vp = (2 - a), (2 + a),$$

Une des valeurs propres est négative (on a supposé $|a| > 2$). Notons la λ_- et prenons v_- son vecteur propre

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_a(tv_-) - \frac{1}{2} \langle H f_a(tv_-), tv_- \rangle$$

$$= f_a(tv_-) - \frac{1}{2} t^2 \langle H f_a(v_-), v_- \rangle = f_a(tv_-) - \frac{1}{2} t^2 \langle \lambda_- v_-, v_- \rangle$$

$$= f_a(tv_-) - \frac{1}{2} t^2 \lambda_- \|v_-\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, tv_- \right\rangle$$

$$\text{donc } f_a(t r_-) = \frac{1}{2} t^2 \lambda_- \|r_-\|^2 - t \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, r_- \right\rangle$$

si $t \rightarrow +\infty$

$$f_a(t r_-) \rightarrow -\infty \text{ car } \lambda_- < 0$$

donc f_a n'a pas de minimum global

5) $a = \pm 2$?

$$f_a(x, y) = \left(x - \frac{ay}{2} \right)^2 - 2x - 2y$$

$$y = t, x = \frac{at}{2}$$

$$f\left(\frac{at}{2}, t\right) = \frac{-2at}{2} - 2t$$

$$= t[-a-2]$$

si $a=2$: $f\left(\frac{at}{2}, t\right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$

si $a=-2$: $f_2(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 2(x+y)$

$$= (x+y)^2 - 1 - 2(x+y)$$

$$= (x+y-1)^2 - 2$$

$\Rightarrow$ a pour minimum -2 qui est atteint $\forall (x, y)$ tq $x+y=1$

Ex 2.5 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto e^{-x}$$

minimiser sous $h(x, y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y} \leq 0$$

1) convexe? + min global

[composée: $g \circ f$ convexe si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et croissante]

$(x, y) \mapsto -x$ est linéaire donc convexe

$(x) \mapsto e^x$ est convexe et croissante

donc $(x, y) \mapsto e^{-x} := f$ est convexe

gradient + hessienne de h :

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} \\ -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ son déterminant = 0

$\hookrightarrow$ sa trace ≥ 0 car $y > 0$

$H_h(x, y)$ est une matrice positive, donc h est convexe

La contrainte ne peut être satisfaite que pour $x=0$, $f(0)=1 = \text{minimum de } f$.

2) a) dual + résoudre

Lagrangien: $\mathcal{L}(x, y, \mu) = e^{-x} - \mu \frac{x^2}{y}$, $\mu \leq 0$ (on minimise)

On doit calculer la fonction duale $f^*(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}, y > 0} \mathcal{L}(x, y, \mu)$

or $\mathcal{L}(x, y, \mu) \geq 0$

$$\text{et } \mathcal{L}(x, y, \mu) \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} e^{-x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc $f^*(\mu) = 0 \quad \forall \mu \leq 0$

Donc le pb dual est: $\max_{\mu \leq 0} f^*(\mu) = \max_{\mu \leq 0} (0) = 0 \Rightarrow$ le maximum est atteint pour toute valeur $\mu \leq 0$

b) **RAPPEL: [Thm de Slater]**
 Soit $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p: U \rightarrow \mathbb{R}$ un problème d'optimisation convexe.
 On suppose que $\exists \tilde{x} \in D = \{x \in U : g_i(x) = 0, h_i(x) \leq 0\} \text{ tq } \tilde{x} \text{ satisfait les contraintes}$
 $h_i(\tilde{x}) < 0, \forall 1 \leq i \leq p, 0 \in \tilde{g}(u)$, où $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$
 $\uparrow$ contraintes strictement satisfaites
 Alors, si f a un minimum $\tilde{c}$ (global) sous contraintes,
 $\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^p \text{ tq } f(\tilde{x}) = \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ (le min primal est égal au max dual)

+ [chad GPT:

$p^* :=$ valeur optimale du problème primal

$d^* :=$ valeur optimale du problème dual

Saut de dualité: $S = p^* - d^*$

si $S = 0$: forte dualité]

$$S = 1 - 0 = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ le pb ne vérifie pas la dualité de Lagrange forte

$\Rightarrow$ les hypothèses du thm de Slater ne sont pas satisfaites ($\nexists (x, y) \text{ tq } h(x, y) < 0$)

Ex 3.2: (thms + scratch)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y$$

i) Écrire f comme une fonction quadratique. f convexe

[cours:
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i + c$
 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$
 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
 $f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$
CORR f est convexe ssi $A \succeq 0$
 f est concave ssi $A \preceq 0$
 Si A définie positive, f est strictement convexe.]

On pose.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \uparrow \text{termes linéaires}$$

$\uparrow$ termes quadratiques (x2 si pas un terme croisé)

A est positive, donc f est convexe.

Si on considère $(0, 0)$ et $(0, 1)$ (m x mais $\forall \neq$)

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y) \text{ si } f \text{ strictement convexe. } t = 1/2$$

$$f(0, 0) + \frac{1}{2} (f(0, 1) - f(0, 0)) = 1/2$$

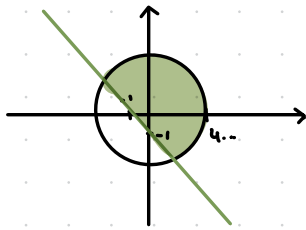
$$= f(0, 1/2)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}(0, 0) + \frac{1}{2}[(0, 1) - (0, 0)]\right)$$

Donc f n'est pas strictement convexe.

$$2) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 13 \text{ et } x + y \geq -1\}$$

a) Dessin



b) M_q c'est une partie convexe

$\hookrightarrow$ Intersection d'un disque et d'un demi-plan, qui sont tous les deux convexes. C'est donc bien une partie convexe.

c) $h_1: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 13$

$h_2: (x, y) \mapsto -x - y - 1$

3) M_q contraintes qualifiées en tout point

$\nabla h_1(x, y) = (2x \ 2y)$

$\nabla h_2(x, y) = (-1 \ -1)$

$\rightarrow$ si seule h_1 est active,

$\nabla h_1 \neq (0, 0)$ donc $\{\nabla h_1\}$ famille libre

$\rightarrow$ si seule h_2 active, $\nabla h_2 \neq (0, 0)$

$\rightarrow$ si h_1 et h_2 actives: (intersection $\hookrightarrow$ voir dessin)

$(x, y) = (2, -3)$ ou $(x, y) = (-3, 2)$

$\hookrightarrow$ la qualification est vérifiée

4) conditions nécessaires et suffisantes $\vec{x} \in D$ soit min global

Les conditions KKT sont nécessaires puisque les contraintes sont qualifiées et suffisantes parce que la fonction est convexe.

$$\text{KKT} = \begin{cases} 2x = 2\mu_1 - \mu_2 & (1) \\ 1 = 2y\mu_1 - \mu_2 & (2) \\ \mu_1(x^2 + y^2 - 13) = 0 & (3) \\ \mu_2(-1 - x - y) = 0 & (4) \end{cases}$$

5) Déterminer les mins globaux

Résolution de KKT:

$\rightarrow$ si $h_1 < 0, h_2 < 0$

(2) $\Rightarrow 0 = 1$, pas de solution KKT

$\rightarrow$ si $h_1 = 0, h_2 = 0$

(3) et (4) $\Rightarrow (x, y) = (2, -3)$ ou $(-3, 2)$. Si $x, y = 2, -3$,

(1) $\Rightarrow 4 = 4\mu_1 - \mu_2$

(2) $\Rightarrow 1 = -6\mu_1 - \mu_2$

si $x, y = -3, 2$

$$\begin{cases} -6 = -6\mu_1 - \mu_2 \\ 1 = 4\mu_1 - \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = 7/10 > 0 \text{ contradiction}$$

$\rightarrow$ si $h_1 = 0, h_2 < 0$ ($\mu_2 = 0$)

(1) $\Rightarrow 2(1 - \mu_1)x = 0$

si $x = 0$: pas de solution car $\mu_1 \neq 0$

donc $x = 0$. donc (2) $\Rightarrow y = \frac{1}{2\mu_1} \leq 0$ donc (3) $\Rightarrow y = -\sqrt{13}$
donc h_1 est active $\hookrightarrow$ contradiction

$$\rightarrow \text{si } h_2 = 0, h_1 < 0 \quad (\mu_1 = 0)$$

$$(2) \Rightarrow \mu_2 = -1$$

$$\text{donc (1)} \Rightarrow x = 1/2$$

$$\text{donc (4)} \Rightarrow y = -3/2$$

$$\text{pt : } (1/2, -3/2)$$

On a un pt critique sous contraintes: $(1/2, -3/2)$

$$\text{et } f(1/2, -3/2) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -5/4.$$

Ex 3.4.

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \geq 0$$

$$b \in \mathbb{R}^n, G \in M_{p,n}(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}^p$$

$$\text{min de } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle \quad \text{sous } Gx = c$$

1) justifier que Lagrange s'applique ssi G surjective

Les contraintes sont données par les fonctions $g_i: x \mapsto (Gx)_i - c_i$

Les g_i sont C^1 car linéaires et $\nabla g_i = L_i^t$, ou $L_i :=$ la i -ème ligne de G

donc $\{ \nabla g_i \}_i$ est libre ssi $\{ L_i \}_i$ libre ssi G est génératrice (lignes de G forment une famille libre)
ssi G est surjective

2) f unique minimum

Soit λ_1 la plus petite vp de A .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x)\| \geq \lambda_1 \|x\|^2 - \|b\| \|x\|$$

$$\text{donc } \|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{donc } f \text{ admet un min global}$$

A définie positive, donc f est strictement convexe, donc ce minimum est unique.

montrer qu'on a un min dans

le cas convexe:

$$\text{mq } \|f\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc f admet un min

+ il est unique.

(i.e. global)

$$3) \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

$\tilde{x}$ en fct de $\lambda = ?$

Multiplieurs de Lagrange: si $\min \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tq}$

$$\nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x})$$

$$\text{c.à.d. } A\tilde{x} + b = G^t \lambda \quad \text{où } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = A^{-1}(G^t \lambda - b)$$

$$4) \text{ Mq } GA^{-1}G^t \lambda = c + GA^{-1}b$$

$$\text{si } c = G\tilde{x}$$

$$= GA^{-1}G^t \lambda - GA^{-1}b$$

(contrainte) $\mathcal{L} f$ admet un min donc un tel λ existe

$$5) \text{ Mq } GA^{-1}G^t \text{ inversible + } \tilde{x}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^p$$

$$\langle GA^{-1}G^t(y), y \rangle = \langle A^{-1}G^t(y), G^t(y) \rangle > 0 \quad \text{car } A^{-1} \text{ définie positive}$$

Donc $GA^{-1}G^t$ def pos et en particulier inversible.

$$\text{On a donc } \lambda = (GA^{-1}G^t)^{-1}(c + GA^{-1}b)$$

$$\text{donc } \tilde{x} = A^{-1}G^t \lambda - A^{-1}b$$

$$= A^{-1}G^t(GA^{-1}G^t)^{-1}c + A^{-1}G^t(GA^{-1}G^t)^{-1}GA^{-1}b - A^{-1}b$$

$$6) f \rightarrow +\infty \text{ pas de max.}$$