



# Cours 1

06/09/2025

## Introduction

### 1) PROBLÈMES - EXEMPLES

#### APIS MELLIFICA

**Problème d'optimisation:** Quel est le temps de butinage optimal par fleur pour maximaliser la qt. total de nectar butiné dans une journée ?

On suppose que les fleurs sont toutes identiques et réparties de façon uniforme. On note :

$\tau$  : temps de trajet entre une fleur et la suivante

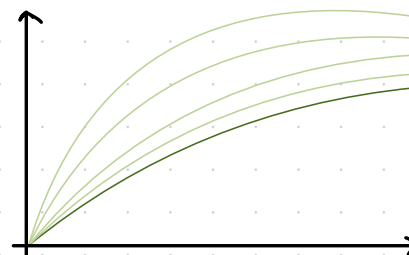
$N(t)$  : Qt de nectar que l'abeille est parvenue à aspirer au bout d'un temps  $t$ , donnée par :

$\beta$  : Qt de nectar contenue dans une fleur

$\alpha$  : cte mesurant la difficulté à aspirer le nectar

$n$  : nombre total de fleurs visitées par jour

$T$  : temps total de butinage



La quantité totale de nectar ramassé dans une journée est donnée par la fonction :

$$f(t) = N(t) \cdot \frac{T}{t + \tau} = T \frac{\beta t}{(t + \alpha)(t + \tau)}$$

Pour quelle valeur de  $t$  la fonction  $f$  est-elle maximale ?

$$f'(t) = T \frac{\beta(t + \tau)(t + \alpha) - \beta t(2t + \tau + \alpha)}{(t + \tau)^2(t + \alpha)^2} = T \frac{\beta(\alpha\tau - t^2)}{(t + \tau)^2(t + \alpha)^2}$$

$t$  prend des valeurs positives, donc  $f'(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\alpha\tau}$

| $t$    | 0 | $\sqrt{\alpha\tau}$ | $+\infty$ |
|--------|---|---------------------|-----------|
| $f(t)$ | 0 | $f_{\max}$          | 0         |

#### NEURONES

Un neurone est un objet prenant en entrée un vecteur à  $n$  coordonnées et produisant un nombre

$$\bar{x} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Les coefs  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  ne dépendent que du neurone et  $a_0$  est appelé le biais.

Cette opération est la **partie affine**.

→ Le résultat produit par la partie affine est utilisé comme argument d'une **fonction d'activation**  $\psi$

[Fonction de HEAVESIDE / FONCTION CRÉNEAU]

$$\psi(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \geq 0 \\ 0 & \text{si } \bar{x} < 0 \end{cases}$$

**fonction sigmoïde:**

$$\psi(x) = \frac{1}{1 + e^{-10x}}$$

#### RESEAU DE NEURONES:

$x(0)$ : vecteur d'entrée de la 1<sup>ère</sup> couche

$x(k) = \psi \circ F_k(x(k-1))$  où  $F_k$  est la fonction affine donnée par les coef. des neurones de la couche  $k$ .

On entraîne le réseau en lui donnant des vecteurs d'entrées  $x(0)_1, \dots, x(0)_\ell$  où  $\ell$  est le nombre d'expériences.

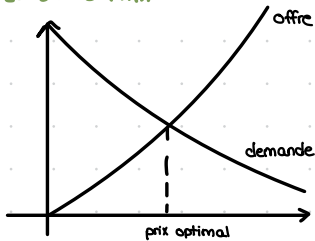
Les résultats sont des vecteurs  $x(m)_1, \dots, x(m)_\ell$  qu'on veut comparer avec les 'bonnes' réponses attendues  $y_1, \dots, y_\ell$

On doit donc minimiser la fonction:

on veut que les  $y_i$  soient 'les plus proches possibles' des  $y_i$ .

$$\sum_{i=1}^{\ell} \|y_i - x(m)_i\|^2 \quad \text{tq } \forall 1 \leq i \leq \ell.$$
$$x(1)_i = \psi \circ F_1(x(0)_i)$$
$$x(m)_i = \psi \circ F_m(x(m-1)_i)$$

## LE JUSTE PRIX



On note:

- $S(p)$ : fonction modélisant l'offre
- $D(p)$ : fonction modélisant la demande
- $\tilde{p}$ : prix d'équilibre vérifiant  $S(\tilde{p}) = D(\tilde{p})$

On considère un marché global constitué de  $n$  commodités (bien ou service)

•  $x \in \mathbb{R}^n$ : le panier dont les coordonnées correspondent à la quantité de chaque bien qu'il possède.

Si une coordonnée correspond à un service, alors elle est négative.

•  $p$ : vecteur des prix des coordonnées  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$

Le prix total d'un élément  $x \in \mathbb{R}^n$ :  $\sum_{i=1}^n p_i x_i = \langle p, x \rangle$

•  $y_1, \dots, y_m$ : Unités de production  $\in \mathbb{R}^n$  tq:

- 1) Si  $y \in Y_j$  et  $t \in [0,1]$  alors  $ty \in Y$  [changements d'échelles décroissants des plans de production]
- 2) Si  $y, y' \in Y_j$ ,  $y + y' \in Y_j$  [en consommant la somme des ressources on peut produire la somme des biens]

3)  $Y = \sum_{j=1}^m Y_j = \{y_1 + \dots + y_m; y_j \in Y_j \forall 1 \leq j \leq m\}$ : plan de production global du marché

$Y$  ne contient aucun élément dont toutes les composantes sont strictement positives (on pourrait alors produire sans rien consommer)

4)  $\forall n(-Y) = \{0\}$  [l'économie n'est pas réversible]

•  $u_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}_+$ : fonction d'utilité, tq  $u_i(x') > u_i(x)$  si  $x_i$  préfère  $x'$  à  $x$ . [tout le monde a un minimum d'exigence]

- 1)  $X_i$  convexe, fermé et  $\exists x_0$  tq  $x \geq x_0 \forall x \in X_i$
- 2)  $\forall x \in X_i, \exists x' \in X_i$  tq  $u_i(x') > u_i(x)$ .
- 3)  $u$  est convexe

$\alpha_{x,y} \in [0,1]$ : dividendes de l'unité de production  $y$  que touche le consommateur  $x$ ;  $\sum_x \alpha_{x,y} = 1$

• Chaque consommateur commence avec  $\tilde{z}_i \in X_i$  tq  $\exists x_i \in X_i$  tq  $\tilde{z}_i > x_i$

## THM [ARROW - DEBREU]

$\exists \tilde{p} \in \mathbb{R}^n$  tq:

•  $\forall 1 \leq j \leq m$ ,  $y \in Y_j \mapsto \langle \tilde{p}, y \rangle$  admet un maximum en un point  $\tilde{y}_j$

•  $\forall i, u_i$  a un maximum en un point  $\tilde{x}_i$  sous la contrainte

$$\langle \tilde{p}, x_i \rangle \leq \langle \tilde{p}, \tilde{z}_i \rangle + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \langle \tilde{p}, \tilde{y}_j \rangle$$

↑ valeur du panier    ↑ valeur de départ    ↑ ce qu'il gagne

•  $\sum \tilde{x}_i - \sum \tilde{y}_j - \sum \tilde{z}_i \leq 0$  [équilibre de l'offre et la demande]

•  $\sum_i \langle \tilde{p}, \tilde{x}_i \rangle - \sum_j \langle \tilde{p}, \tilde{y}_j \rangle - \sum_i \langle \tilde{p}, \tilde{z}_i \rangle = 0$  [Loi de Walras, pas d'argent rentrant de l'extérieur du système]

## Chapitre 2 - Recherche des extrema

### RAPPELS

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  •  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

- $f \in C^0 \Leftrightarrow f_i \in C^0 \forall i$
- $f$  dérivable  $\Leftrightarrow f_i$  dérivable  $\forall i$  et  $f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_n(x) \end{pmatrix}$
- $f$  intégrable  $\Leftrightarrow f_i$  intégrables:  $\int f(x) dx = \begin{pmatrix} \int f_1(x) dx \\ \vdots \\ \int f_n(x) dx \end{pmatrix}$

On utilisera toujours la norme euclidienne

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

\* dans  $\mathbb{R}^n$ , toutes les normes sont équivalentes

**DEF:** La boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$   $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x-y\| < r\}$

(  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  doit avoir un sens  
h on ne peut pas être au bord  
Il faut se mettre ds un point au on a de l'espace à droite et à gauche  
→ trouver une boule ouverte )

**DEF:** Une partie  $U \subset \mathbb{R}^n$  est ouverte si  $\forall x \in U, \exists r > 0$  tq  $B(x, r) \subset U$

**DEF:** Un fermé est le complémentaire d'un ouvert

**DEF:**  $B_f(x, r) = \{y; \|x-y\| \leq r\}$

**DEF:**  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f$  est continue en  $x$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tq  $\forall y$  tq  $\|x-y\| \leq \delta$ , on a :  $\|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$

**PROP:**  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue

- 1)  $f+g$  continue
- 2) Si  $m=1$ ,  $fg$  continue
- 3) Si  $m=1$  et  $f$  ne s'annule pas,  $f/g$  continue
- 4)  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, g: V \rightarrow \mathbb{R}^d, \rho(U) \subset V$ ,  $g \circ f$  continue
- 5)  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  continue  
(polynômes / ds linéaires...)

**DEF:**  $K \subset \mathbb{R}^n$  est compacte si  $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  suite d'éléments de  $K$ ,  
 $\exists$  sous-suite  $(x_{\psi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un élément de  $K$

**PROP:**  $K \subset \mathbb{R}^n$  est compacte si elle est fermée et bornée

### THM [BORNES ATTEINTES]

Soit  $K$  compact et  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  continue

$\exists x_1, x_2 \in K$  tq  $\forall x \in K, f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

**THM:** Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tq  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$

Alors,  $f$  a un minimum global

**PROP:** Si  $f(x_1, x_2)$  a un maximum en  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$

$x \mapsto f(x, \tilde{x}_2)$  a un maximum en  $\tilde{x}_1 \leadsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0$

**THM:** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale en les coordonnées.  
Alors  $f$  est continue.

En particulier, toute application linéaire de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue.



12/11/25

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$$

### Thm (bornes atteintes)

Si  $K$  compact et  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $\exists x_+, x_- \in K$  tq  $\forall x \in K, f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$

THM: Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ . Alors  $f$  admet un minimum global.

DEF:  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  a un

- minimum global en  $\tilde{x} \in U$  si :  $\forall x \in U, f(\tilde{x}) \leq f(x)$

- maximum global en  $\tilde{x} \in U$  si :  $\forall x \in U, f(x) \leq f(\tilde{x})$

→ extremum global

- minimum local en  $\tilde{x} \in U$  si  $\exists r > 0$  tq  $\forall x \in \cup B(\tilde{x}, r), f(\tilde{x}) \leq f(x)$

- maximum local en  $\tilde{x} \in U$  si  $\exists r > 0$  tq  $\forall x \in U \cap B(\tilde{x}, r), f(x) \leq f(\tilde{x})$

→ extremum local

**DEF:** Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction et  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un point de  $U$ . La dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i$ -ème coordonnée au point  $x$  est la dérivée de la fonction:

$$f_{x,i} : t_1 \mapsto f(x_1, \text{---}, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \text{---}, x_n)$$

au point  $x_i$ . On a noté  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f'_{x,i} f(x_i)$

- Si  $U$  est ouvert et  $x \in U$

$\exists r > 0$  tq  $B(x, r) \subset U$ . En particulier,  $\forall t \in ]x_i - r, x_i + r[$ ,  $(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in B(x, r) \subset U$

Donc  $f_{x,i}$  est définie sur  $]x_i - r, x_i + r[$

- Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto f(x + te_i)$

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

$f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $i$  ssi  $g$  est dérivable en  $0$ .  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'(0)$ ,  $t \mapsto f(x+tv)$   
 $\uparrow$   
dérivée directionnelle

THM:  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  qui a des dérivées partielles par rapport à toutes les coordonnées.

alors  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$  ( $\tilde{x} \leadsto$  un point auquel  $f$  admet un extremum local)

DEM: Supposons que  $f$  a un minimum local en  $\tilde{x}$

Soit  $r > 0$  tq  $\forall x \in U \cap B(\tilde{x}, r), f(\tilde{x}) \leq f(x)$

Soit  $r' > 0$  tq  $B(\vec{x}, r') \subset U$ . En posant  $\delta = \min(r, r')$ :  $B(\vec{x}, \delta) \subset U$  et  $\forall x \in B(\vec{x}, \delta)$ ,  $f(\vec{x}) \leq f(x)$

Donc  $f_{x,i} : ]x_i - \delta, x_i + \delta[ \longrightarrow \mathbb{R}$  vérifie  $\forall t, f_{x,i}(\tilde{x}_i) \leq f_{x,i}(t)$

Donc  $f'_{\vec{x}, i}(\vec{x}_i) = 0$  i.e.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{si } t > 0, \quad \frac{f_{\vec{x}_i, i}(\vec{x}_i + t) - f_{\vec{x}_i, i}(\vec{x}_i)}{t} > 0 &\xrightarrow{t \rightarrow 0} f_{\vec{x}_i, i}(\vec{x}_i) > 0 \\ \text{si } t < 0 &\rightarrow f_{\vec{x}_i, i}(\vec{x}_i) \leq 0 \end{aligned}$$

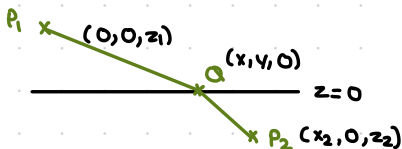
EX

$$\tau(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z_1^2}}{s_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+z_2^2}}{s_2}$$

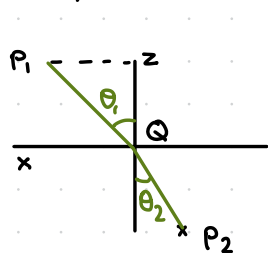
Admettons que  $T$  a un minimum global.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{8_1 \times 2\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} + \frac{2(x - x_2)}{8_2 \times 2\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z_2^2}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\dots}$$



$$\frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\delta \sqrt{x^2 + z_1^2}} + \frac{(x - x_2)}{\delta_2 \sqrt{(x - x_2)^2 + z_2^2}} = 0$$



$$-\sin \theta_1 = \frac{\overset{\text{gauche}}{-x}}{P_1 Q}, \quad \sin \theta_2 = \frac{x_2 - x}{P_2 Q}$$

$$\text{où } P_1 Q = \sqrt{x^2 + z_1^2} \quad (\text{norme, distance entre les deux points})$$

$$P_2 Q = \sqrt{(x - x_2)^2 + z_2^2}$$

$$\leadsto \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\delta_1} - \frac{\sin(\theta_2)}{\delta_2} = 0 \Rightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\delta_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{\delta_2}$$

$$n_i = \frac{c}{\delta_i} \leadsto n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

Calculer des dérivées partielles:

$$\bullet \frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\bullet f, g: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} g$$

En particulier, toute fonction polynomiale a des dérivées partielles

•  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne s'annule pas,

$$\frac{\partial(1/f)}{\partial x_i} = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$[(g \circ f)' = f' \cdot x(g' \circ f)]$$

Δ! problème pour la composée

$$\text{Ex: } f: x \in \mathbb{R} \rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}^2$$

$$g: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$$

$$g \circ f: x \mapsto \begin{cases} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = 1/2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow g \circ f \text{ pas dérivable en } 0$$

EX:  $P(K, L) = 1,01 \cdot K^{1/4} \cdot L^{3/4}$  (fonction de production de Cobb-Douglas)

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 0,1 \times 1/4 \times K^{-3/4} \times L^{3/4} = 0,2525 \left(\frac{L}{K}\right)^{3/4} > 0 \leadsto \text{productivité marginale du capital}$$

$$\frac{P}{K} = 1,01 \times \left(\frac{L}{K}\right)^{3/4}$$

$$e_K = \frac{\frac{\partial P}{\partial K}}{P/K} = 1/4 \text{ élasticité de production}$$

Ex:  $f: x \mapsto x^3$

$f'(0) = 0$  mais  $f$  n'a pas d'extremum local

$$\text{DEF: Le gradient de } f \text{ en } x \text{ est } \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Un point critique de  $f$  est un point  $\tilde{x} \in U$  tq  $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

**PROP:** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{x} \in I$  tq  $f'(\tilde{x}) = 0$

- Si  $f''(\tilde{x}) > 0$ , alors  $f$  a un minimum local strict en  $\tilde{x}$
- Si  $f''(\tilde{x}) < 0$ , alors  $f$  a un maximum local strict en  $\tilde{x}$ . [Taylor Young]

**DEM:** On fait un DL de  $f$  en  $\tilde{x}$ :  $f(\tilde{x}+h) = h f'(\tilde{x}) + \frac{h^2}{2} f''(\tilde{x}) + o(h^2)$

$$f(\tilde{x}+h) - f(\tilde{x}) = \frac{h^2}{2} f''(\tilde{x}) + o(h^2) \quad (\alpha(h) = h^2 \varepsilon(h), \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0)$$

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}+h) - f(\tilde{x}) &= h^2 f''(\tilde{x}) + h^2 \varepsilon(h) \\ &= h^2 \left( \frac{f''(\tilde{x})}{2} + \varepsilon(h) \right) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f''(\tilde{x})}{2} > 0 \end{aligned}$$

$$\exists \delta > 0, \forall h \in ]-\delta, \delta[, \frac{f''(\tilde{x})}{2} + \varepsilon(h) > \frac{f''(\tilde{x})}{4} > 0$$

$$\text{Alors, } \forall h \in ]-\delta, \delta[, f(\tilde{x}+h) = h^2 \left( \frac{f''(\tilde{x})}{2} + \varepsilon(h) \right) \geq h^2 \cdot \frac{f''(\tilde{x})}{4} > 0$$

## DEVELOPPEMENT LIMITE À L'ORDRE 1:

**DEF:** Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$

On définit la différentielle de  $f$  en  $x$ :  $D_x f: (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$   
 $D_x f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Toute application linéaire peut se représenter, une fois des bases fixées dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, par une matrice. Si on note  $f_i$  les fonctions coordonnées de  $f$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , alors la matrice de  $D_x f$  dans les bases canoniques est:

$$J_f(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \rightarrow \text{matrice jacobienne de } f \text{ au point } x.$$

Si  $m=1$ , cette matrice est une colonne, qui n'est d'autre que le gradient  $\nabla f(x)$

Autrement dit, pour une fonction à valeurs scalaires, on a:  $D_x f(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$

$\rightarrow f(x+h) = f(x) + D_x f(h) + o(h)$ , où  $o(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ ;  $\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

**Pb:** L'existence des dérivées partielles ne suffit pas!

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x, x) = \frac{1}{2} \not\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \rightarrow g \text{ n'est pas continue en } (0, 0)$$

**DEF:**  $f$  est de classe  $C^1$  si elle admet des dérivées partielles p.r à toutes les coordonnées et si ces dernières sont continues.

**THM:** Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^1$  et  $x \in U$ .

Alors,  $\forall h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x+h \in U$ ,  $f(x+h) = f(x) + D_x f(h) + o(h)$

**DEM:**  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $h = (h_1, \dots, h_n)$   $f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) + f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_1+h_1, \dots, h_i+x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1+h_1, \dots, x_{i-1}+h_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^{h_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+h_1, \dots, x_{i-1}+h_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt$$

$$D_x f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^{h_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dt$$

$$\text{Donc } f(x+h) - f(x) - D_x f(h) = \sum_{i=1}^n \int_0^{h_i} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+h_1, \dots, x_i+t, x_i, \dots) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] dt$$

Soit  $\varepsilon > 0$

Par continuité,  $\exists r_i > 0$  tq  $\forall y \in B(x, r_i) \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| < \varepsilon$

Soit  $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$ . Si  $h \in B(x, r)$ ,  $\|x + h_{1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m}\| = \|h_{1, \dots, h_{i-1}, 0, \dots, 0}\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_{i-1}^2} \leq \sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2} = \|h\| < r \leq r_i$

$$\text{et } \|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\| \leq \sum_{i=1}^n \int_0^1 \| \dots \| dt \leq \sum_{i=1}^n \int_0^{h_i} \varepsilon dt = \varepsilon \left( \sum_{i=1}^n h_i \right)$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^n h_i \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} = \sqrt{n} \|h\|$$

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$  tq  $\forall h \in B(x, r), \|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon$$

$$\text{i.e. } \frac{1}{\|h\|} (f(x+h) - f(x) - D_x f(h)) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

$$\text{i.e. } f(x+h) - f(x) - D_x f(h) = o(h)$$

### Cours 3 26/09/2025

Thm:  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  C<sup>1</sup>  
ouvert

$$\forall x \in U, f(x+h) = f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|)$$

$$D_x f: (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^m$$

PROP: Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction

Supposons qu'il existe une application linéaire  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tq  $\forall h$  tq  $x+h \in U$ :

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h)$$

Alors,  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à toutes les coordonnées au point  $x$ , et si  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  désigne

la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on a:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = L(e_i)$

$$\text{DÉM: } \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} L(te_i) + \frac{1}{t} o(\|te_i\|)$$

$$= L(e_i) + \frac{1}{t} \|te_i\| \mathcal{E}(\|te_i\|)$$

$$= L(e_i) + \frac{\|te_i\|}{t} \mathcal{E}(\|te_i\|)$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} L(e_i)$$

EXEMPLE:  $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$

$$f(M+H) = (M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2$$

$$= f(M) + \underbrace{MH + HM}_{\text{linéaire en } h} + H^2 \quad \|H^2\| \leq \|H\| \times \|H\| = o(H)$$

PROP: Soient  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$  où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Supposons  $f(U) \subset V$

Supposons  $f$  et  $g$  de classe C<sup>1</sup>. Donc  $g \circ f$  est de classe C<sup>1</sup> et

$$D_x (g \circ f) = (D_{f(x)} g) \circ D_x f$$

En notant  $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$  les fonctions coordonnées de  $f$  et  $(g_k)_{1 \leq k \leq p}$  les fonctions coordonnées de  $g$ , on a  $\forall x \in U$ ,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial x_j} (f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

DEM:  $g \circ f(x+h) = g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{D_x f(h)}_{h'}) + o(h)$

$$= g(f(x)) + D_{f(x)} g(h') + o(h')$$

$$= (g \circ f)(x) + (D_{f(x)} g)(D_x f(h)) + \underbrace{D_{f(x)} g(o(h))}_A + \underbrace{o(D_x f(h)) + o(h)}_B$$

$$A = D_{f(x)} g(\|h\| \varepsilon(\|h\|))$$

$$= \|h\| D_{f(x)} g(\varepsilon(\|h\|))$$

linéaire donc

continue (ds  $\mathbb{R}^n$ )

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

donc  $A = o(h)$

$$B = \|D_x f(h) + o(h)\| \varepsilon'(\|D_x f(h) + o(h)\|)$$

$$= \|D_x f(h)\| \varepsilon'(\|D_x f(h)\|) + \|o(h)\| \varepsilon'(\|o(h)\|)$$

$$\leq \|D_x f(h)\| \varepsilon'(\|D_x f(h)\|) + \|o(h)\| \varepsilon'(\|o(h)\|)$$

$$\leq \|h\| \|D_x f\| \varepsilon'(\|h\|) \leftarrow \text{norme subordonnée}$$

$$\leq \|h\| (\|D_x f\| + \varepsilon'(\|h\|)) \varepsilon'(\|h\|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc } B = o(h)$$

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$$

$$\forall x, \|Lx\| \leq \|L\| \|x\|$$

$L$  linéaire,  $\exists c > 0$  tq  $\forall x, \|Lx\| \leq c \|x\| \leftarrow$

PROP:  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^1$  bijective sur son image et de Reciproque  $f^{-1}$  continue

Alors,  $f^{-1}$  est  $C^1$  et  $D_{f(x)} f^{-1} = (D_x f)^{-1}$  l'appl. linéaire inversible

DEM:  $D_x(f^{-1} \circ f) = (D_{f(x)} f^{-1})(D_x f)$

$$D_x \text{id} = \text{id}$$

## DEVELOPPEMENTS LIMITÉS À L'ORDRE 2

DEF:  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$

La différentielle seconde de  $f$  au point  $x$  est  $(h, K) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \sum_{i,j=1}^n h_i K_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$  application bilinéaire

DEF:  $f$  est de classe  $C^K$  si elle admet des dérivées partielles qui sont de classe  $C^{K-1}$

Thm:  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^2$ ,

$$\text{alors } f(x+h) = f(x) + D_x f(h) + \frac{1}{2} D_x^2 f(h, h) + o(\|h\|^2)$$

$$\sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, \nabla f(x) = 0$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} D_x^2 f(h, h) + o(\|h\|^2)$$

DEM:  $x \in U, \exists r > 0$  tq  $B(x, r) \subset U$ . Si  $\|h\| < r, x+h \in B(x, r) \subset U$

On fixe un tel  $h$ , et on pose  $\phi: t \in [0, 1] \mapsto f(x+th)$ .  $C^2$

$$\text{On a } \phi(1) - \phi(0) = \phi'(0) + \int_0^1 \phi''(s) ds$$

$$\phi = f \circ g, g: t \mapsto x+th$$

$$\phi'(t) = (D_{g(t)} f)(g'(t))$$

$$\phi'(0) = D_x f(h) \quad [g'(t) = h]$$

$$D_{g(t)} f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))$$

$$\phi''(t) = \sum_{i=1}^n h_i D_{g(t)} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (g'(t))$$

$$= \sum_{i=1}^n h_i D_{g(t)} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(g(t)) \quad (\text{def})$$

$$= \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x+th)$$

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) - D_x f(h) - \frac{1}{2} D_x^2 f(h, h) &= \phi(1) - \phi(0) - \phi'(0) - \frac{1}{2} \phi''(0) \quad \left(\frac{1}{2} = \int_0^1 (1-s) ds\right) \\
&= \int_0^1 (1-s) \phi''(s) ds - \int_0^1 (1-s) \phi''(0) ds \\
&= \int_0^1 (1-s) (\phi''(s) - \phi''(0)) ds \\
&= \int_0^1 (1-s) \underbrace{(D_{x+sh}^2 f(h, h) - D_x^2 f(h, h))}_{\alpha} ds
\end{aligned}$$

$$\|\alpha\| = \sum_{i,j=1}^n |h_i| |h_j| \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x+sh) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right\|$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ , soit  $\delta > 0$  tq  $\forall i, j \quad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right\| < \varepsilon$ . Dès que  $\|y - x\| < \delta$

Donc si  $\|h\| < \delta$ , on a  $\|\alpha\| \leq \varepsilon \sum_{i,j=1}^n |h_i| |h_j|$

$$= \varepsilon \left( \sum_{i=1}^n |h_i| \right) \left( \sum_{j=1}^n |h_j| \right) \leq \varepsilon (\sqrt{n} \|h\|) (\sqrt{n} \|h\|) = n \varepsilon \|h\|^2$$

Ainsi,  $\alpha = o(\|h\|^2)$

$$\text{et } \int_0^1 (1-s) \alpha ds = o(\|h\|^2)$$

**DEF:** Si  $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire, la forme quadratique associée est  $h \mapsto B(h, h)$

**DEF:** Une forme quadratique  $Q$  est

• définie positive s'il existe  $\lambda > 0$  tq  $Q(x) \geq \lambda \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$

• définie négative s'il existe  $\mu > 0$  tq  $Q(x) \leq -\mu \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$

**THM:** Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et soit  $\tilde{x}$  un point critique def.

Si la forme quadratique  $Q_{\tilde{x}}: h \mapsto D_{\tilde{x}}^2 f(h, h)$

- est définie positive, alors  $f$  admet un minimum local strict en  $x$ .

- est définie négative, alors  $f$  admet un maximum local strict en  $x$

$$\begin{aligned}
\text{LEM: } f(\tilde{x}+h) - f(\tilde{x}) &= \frac{1}{2} D_{\tilde{x}}^2 f(h, h) + o(\|h\|^2) \geq \frac{\lambda}{2} \|h\|^2 + \|h\|^2 + \varepsilon(\|h\|) \\
&\geq \|h\|^2 \left( \frac{\lambda}{2} + \varepsilon(\|h\|) \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\lambda}{2} + \varepsilon(\|h\|) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2} > 0$$

$$\text{donc } \exists \delta > 0 \text{ tq } \frac{\lambda}{2} + \varepsilon(\|h\|) \geq \frac{\lambda}{4} \text{ dès que } \|h\|^2 \times \frac{\lambda}{4} > 0$$

**PROP:** Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et  $x$  un point critique def. Si  $f$  admet un minimum local en  $x$ , alors la forme quadratique  $Q_x$  est positive. Si  $f$  admet un maximum local en  $x$ , alors  $Q_x$  est négative.

**NOTES:** Une forme quadratique est définie à partir d'une forme bilinéaire  $B$ , qui peut se représenter à l'aide d'une matrice  $M(B)$  dont les coefs sont  $M(B)_{ij} = B(e_i, e_j)$  (où  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ )

$$\text{Etant donné } x \text{ et } x': B(x, x') = B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x'_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i x'_j B(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n M(B)_{ij} x_i x'_j$$

$$\leadsto B(x, x') = \langle M(B)x', x \rangle$$

$$\text{Donc } Q(x) = \langle M(B)x, x \rangle$$

En admettant qu'il existe  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$  bon de  $\mathbb{R}^n$  dont tous les vecteurs sont propres pour  $M(\beta)$ ,

c.à.d.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tq  $\forall 1 \leq i \leq n, M(\beta)v_i = \lambda_i v_i$

Alors  $\forall x = \sum_i x_i v_i : Q(x) = \langle M(\beta)x, x \rangle$

$$= \left\langle M(\beta) \left( \sum_{i=1}^n x_i v_i \right), \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle M(\beta)v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i$$

\* En particulier, si toutes les valeurs propres de  $M(\beta)$  sont strictement négatives, alors  $Q$  est définie négative et si toutes ses v.p sont strictement positives, alors  $Q$  est définie positive.

$\rightarrow$  il suffit que la matrice  $M(\beta)$  soit symétrique (pourqu'il existe des vp)

DEF: Pour  $f \in C^2$ , la Hessienne de  $f$  en  $x$  est la matrice  $H_f(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$

Thm: [Schwarz] si  $f$  est  $C^2$ ,  $H_f(x)$  est symétrique

PROP: Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Pour  $x \in U$ ,  $D_x^2 f$  est :

- définie positive ssi toutes les v.p de  $H_f(x)$  sont strictement positives.
- définie négative ssi toutes les v.p de  $H_f(x)$  sont strictement négatives.

PROP:  $f: U \rightarrow \mathbb{R} C^2$ ,  $\tilde{x}$  pt critique tq  $H_f(\tilde{x})$  a une vp  $\lambda > 0$  et une vp  $\mu < 0$ .

Alors  $\tilde{x}$  est un point selle.

DEM: Soit  $v \in \mathbb{R}^n$  tq  $H_f(\tilde{x})v = \lambda v$

$$\begin{aligned} f(x+tv) - f(x) &= \frac{1}{2} D_x^2 f(tv, tv) + o(\|tv\|^2) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \|tv\|^2 + o(\|tv\|^2) \\ &= \|tv\|^2 \left( \frac{\lambda^2}{2} + \varepsilon(\|tv\|) \right) \end{aligned}$$

$$\sim \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall t \in ]0, \delta[, f(\tilde{x} + tv) - f(\tilde{x}) > 0$$

$\rightarrow$  pas de max local en  $\tilde{x}$

Soit  $w \in \mathbb{R}^n$  tq  $H_f(\tilde{x})w = \mu w$

$$\begin{aligned} f(\tilde{x} + tw) - f(\tilde{x}) &= \|tw\|^2 \left( \frac{\mu^2}{2} + \varepsilon(\|tw\|) \right) \\ &< 0 \quad \forall t \in ]0, \delta[ \end{aligned}$$

$\rightarrow$  pas de min local

$$\left( \frac{1}{2} D_x^2 f(tv, tv) \right) = \langle H_f(\tilde{x})tv, tv \rangle$$

Le cas de deux variables:

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Tr}(H_f(x)) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$H_f(x) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{Det}(H_f(x)) = \lambda_1 \lambda_2$$

PROA Si  $\det(H_f(x)) < 0 \rightarrow$  point selle

si  $\det(H_f(x)) > 0$ , alors:

- si  $\text{Tr}(H_f(x)) > 0 \rightarrow$  min local strict

- si  $\text{Tr}(H_f(x)) < 0 \rightarrow$  max local strict

si  $\det(H_f(x)) = 0 \rightarrow$  cas dégénéré

EXEMPLES: (\* à faire!)

1)  $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

pt critique:  $(0,0) \leadsto$  min local strict

$\leadsto$  min global (f est tjs positive,  $f(0,0) = 0$  et  $f(x,y) > 0 \forall (x,y) \neq (0,0)$ )

2)  $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$$

pts critiques:  $(0,1)$  et  $(0,-1)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \quad H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$  cas dégénéré

$$\begin{aligned} f(h, 1+k) - f(0,1) &= h^4 + y^3 + 3y + 3y^2 + 1 - 3(h+1) - 2 - (-4) \quad (\text{cas polynomial}) \\ &= h^4 + k^3 + 3k^2 = h^4 + k^2(k+3) \\ &\quad \begin{matrix} > 0 \\ \text{pour } |k| < 3 \end{matrix} \end{aligned}$$

$\leadsto$  minimum local

$(0,1)$  pas un minimum global car  $f(0,y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$

3)  $f(x,y) = x^2 + y^3$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix} \quad \text{pt critique } (0,0)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \quad \leadsto H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fait, on observant que  $f(0,y) < 0 \forall y < 0$  tandis que  $f(x,0) > 0$  pour tout  $x$ , on voit que l'origine n'est ni un maximum local ni un minimum local

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$S = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$$

DEF: on dit que f a un extremum sous contrainte si la restriction de f à S a un extremum local.

$$* g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$



## Cours 4

$$S = \{x \in U ; g(x) = 0\}$$

$$\text{Soit } \tilde{x} \text{ tq } g(\tilde{x}) = 0$$

$$\text{Soit } y \in S \text{ proche de } \tilde{x}$$

$$g(y) = g(\tilde{x}) + D_{\tilde{x}}g(y - \tilde{x}) + o(y - \tilde{x})$$

$$0 = D_{\tilde{x}}g(y - \tilde{x})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{x}_i) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0$$

$$\text{Imaginons que } \frac{\partial g}{\partial x_n}(\tilde{x}) \neq 0$$

$$\text{Alors } y_n = \tilde{x}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_n}(\tilde{x}) \times (y_i - \tilde{x}_i)$$

PROP.  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  et  $\tilde{x} \in U$  tq  $g(\tilde{x}) = 0$  et  $\nabla g(\tilde{x}) \neq 0$

Alors, quitte à permuter des coordonnées

$$\exists V \subset \mathbb{R}^{n-1}, \omega \subset \mathbb{R} \text{ ouvert et } \psi: V \longrightarrow \omega \text{ } C^k \text{ tq } \forall x \in V \times \omega$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$$

DEM. On va supposer que  $\frac{\partial g}{\partial x_n}(\tilde{x}) \neq 0$  et même  $\frac{\partial g}{\partial x_n}(\tilde{x}) > 0$

$$\exists r > 0 \text{ tq } \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) > 0 \quad \forall x \in B(\tilde{x}, r)$$

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\text{si } x \in B(\tilde{x}, \frac{r}{2}), y \in ]\tilde{x}_n - \frac{r}{2}, \tilde{x}_n + \frac{r}{2}[ \text{ alors } (x, y) \in B(\tilde{x}, r)$$

$$\text{Donc, pour } x \in B(\tilde{x}, \frac{r}{2}) \text{ fixé : } y \in ]\tilde{x}_n - \frac{r}{2}, \tilde{x}_n + \frac{r}{2}[ \longrightarrow g(x, y) \text{ strictement } \nearrow, g(\tilde{x}, \tilde{x}_n) = 0$$

$$\text{donc } g(\tilde{x}, \tilde{x}_n - \frac{r}{4}) < 0, g(\tilde{x}, \tilde{x}_n + \frac{r}{4}) > 0$$

$$\text{Par } C^0 \text{ deg, } \exists r' > 0 \text{ tq } \forall x \in B(\tilde{x}, r'), g(x, \tilde{x}_n - \frac{r}{4}) < 0$$

$$g(x, \tilde{x}_n + \frac{r}{4}) > 0$$

$$\text{Par TVI, } \exists ! \psi(x) \in ]\tilde{x}_n - \frac{r}{4}, \tilde{x}_n + \frac{r}{4}[ \text{ tq } g(x, \psi(x)) = 0$$

$$V = B(\tilde{x}, r') \text{ et } \omega = ]\tilde{x}_n - \frac{r}{4}, \tilde{x}_n + \frac{r}{4}[$$

Par construction,  $\psi$  est continue en  $\tilde{x}$ . Soit  $x \in V$ . Posons  $\hat{x} = (x, \psi(x))$

$$g(\hat{x}) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial x_n}(\hat{x}) > 0$$

$$\text{Donc } \exists \hat{V}, \hat{\omega}, \hat{\psi}: \hat{V} \longrightarrow \hat{\omega} \text{ tq } x \in \hat{V} \times \hat{\omega}, g(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = \hat{\psi}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\text{Si maintenant } \tilde{x} \in V \cap \hat{V}: g(\tilde{x}, \hat{\psi}(\tilde{x})) = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x})$$

$$\hat{\psi} \text{ } C^0 \text{ en } X \text{ donc } \psi \text{ } C^0 \text{ en } X.$$

dérivée partielle de  $\psi$ :

$$x \in V_{x\omega} \begin{cases} a = (x, \psi(x)) \\ b = (x + te_i, \psi(x + te_i)) \end{cases}$$

$$h: s \longrightarrow g(a, s(b_t - a)) \subset \mathbb{R}$$

$$h(1) - h(0) = h'(s_0)$$

$$g'(bt) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$h'(s) = D_{a+s(b_t-a)}g(bt-a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(a+s(bt-a))(b_t-a)_i$$

$$= t \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(a+s(bt-a)) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a+s(bt-a)) \times (\psi(x+te_i) - \psi(x))$$

$$\frac{\psi(x+t e_i) - \psi(x)}{t} = - \left( \frac{\partial g}{\partial x_n} (a + s_0(b_t - a)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} (a + s_0(b_t - a)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} - \frac{\partial g}{\partial x_n} (x, \psi(x))^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} (x, \psi(x))$$

### EXEMPLE:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x, y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\text{mais } g(0, 0) \neq 0$$

Par définition,  $\psi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = \tilde{x}_n$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = - \left( \frac{\partial g}{\partial x_n}(\tilde{x}) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x})$$

### Plusieurs contraintes:

$$S = \{x \in U; g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$$

$$\tilde{x} \in S, \psi \in S \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$g(\psi) = g(\tilde{x}) + D\tilde{x}(g(\psi - \tilde{x})) + \dots$$

$$D\tilde{x}(g(\psi - \tilde{x})) = 0 \rightsquigarrow D\tilde{x}g(\psi) = D\tilde{x}g(\tilde{x})$$

### THM: [des fonctions implicites]

Soient  $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{x} \in U$  tq

$$i) \quad g_1(\tilde{x}) = g_2(\tilde{x}) = \dots = 0$$

$$ii) \quad \nabla g_1(\tilde{x}), \nabla g_2(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x}) \text{ est une famille libre}$$

Alors,  $\exists V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\omega \subset \mathbb{R}^m$  ouverts et  $\psi: V \rightarrow \omega \subset \mathbb{R}^m$  tq

$$(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}, \psi(\tilde{x}_{n-m+1}, \dots, \tilde{x}_m))$$

$$\forall x \in V \times \omega, g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0 \Leftrightarrow (x_{n-m+1}, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_{n-m})$$

DEM: On procède par récurrence ( $m=1$  déjà fait)

$$\nabla g_{m+1}(\tilde{x}) \neq 0 \rightsquigarrow V \subset \mathbb{R}^{n-1}, \omega \subset \mathbb{R}, \psi: V \rightarrow \omega$$

$$\hat{g}_i: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{g}_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = g_i(x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^1$$

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Soit  $\tilde{x} \in S = \{x \mid g(x) = 0\}$  tq  $f$  a un extremum local sous contraintes en  $\tilde{x}$

si  $\nabla g(\tilde{x}) \neq 0, \exists V, \omega, \psi: V \rightarrow \omega$

$$\tilde{f}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

$\tilde{f}$  a un extremum local en  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1} \rightsquigarrow \nabla \tilde{f}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = 0$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) \times \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, \psi(x)) \right)^{-1} \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, \psi(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x, \psi(x))$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) - \left( \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}) \right)^{-1} \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}) \times \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \rightsquigarrow \nabla f(\tilde{x}) = \lambda \nabla g(\tilde{x})$$

\* à faire !

THM: [Lagrange]

$$f, g_1, \dots, g_m: M \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\tilde{x} \in M$  tq  $f$  a un extremum local sous contraintes en  $\tilde{x}$  et  $\nabla g_n(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x})$  est libre

Alors  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tq  $\nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x})$

EXEMPLE:  $f(x, y) = y$

$$g(x, y) = y^3 - x^2$$

$$S = \{(x, y); g(x, y) = 0\}$$

$$\text{si } (x, y) \in S, \quad y^3 = x^2 \geq 0$$

$$\text{donc } y \geq 0$$

$$\text{donc } f(x, y) \geq 0$$

$$\text{Comme } (0, 0) \in S \text{ et } f(0, 0) = 0$$

$$\min_S f = 0$$

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ 2y^2 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0 \quad \text{donc } y^3 = x^2 = 0$$

EXEMPLE: 2 biens pour un consommateur

$$\text{fonction d'utilité: } f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$N = \text{niveau de vie idéal} \rightsquigarrow f(x_1, x_2) = N$$

On veut minimiser le budget  $p_1 x_1 + p_2 x_2$  sous contraintes  $f - N = 0$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(f(x_1, x_2) - N)$$

$$\begin{cases} p_1 - \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0 \\ p_2 - \lambda (1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha} = 0 \\ x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} N = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{cases} p_1 = \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \\ N = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \end{cases}$$

$$\frac{p_1}{N} = \frac{\lambda \alpha}{x_1} \quad \text{et} \quad \frac{p_2}{N} = \frac{\lambda (1-\alpha)}{x_2}$$

$$\lambda = \frac{p_1 x_1}{N \alpha} = \frac{p_2 x_2}{N (1-\alpha)} \quad \rightsquigarrow x_2 = \frac{p_1 (1-\alpha)}{p_2 \alpha} x_1$$

$$x_1^\alpha \left( \frac{p_1 (1-\alpha)}{p_2 \alpha} \right)^{1-\alpha} x_1^{1-\alpha} = N$$

$$x_1 = N \left( \frac{p_2^\alpha}{p_1 (1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}$$

EXEMPLE: un système physique à N états possibles.

L'état  $i$  a une énergie  $E_i$

Un état statistique est donné par  $(p_1, \dots, p_N) \in [0, 1]^N$  tq  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ ,  $\mathcal{E}(p) = \sum_{i=1}^N p_i E_i$

ENTROPIE

$$S: (x_1, \dots, x_N) \mapsto \sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i)$$

On veut maximiser  $S$  sur  $\{p \mid \mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0\}$  pour  $\mathcal{E}_0 > 0$  fixé

fermé de  $[0, 1]^N$  donc compact

$S \in C^0$  donc  $\exists$  un maximum

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_N) = S(p_1, \dots, p_N) - \lambda (\mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) - \mathcal{E}_0) \Rightarrow 1 + \ln(p_i) = \lambda E_i$$

$$\ln(p_i) = \lambda E_i - 1 \rightsquigarrow p_i = e^{-1} e^{\lambda E_i} = Z e^{\lambda E_i}$$

$$\lambda = \frac{1}{k_B T} \leftarrow \text{emprunteur du système}$$

$$\begin{aligned} S(\mathcal{E}_0) = S(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N) &= \sum_{i=1}^N Z e^{\lambda E_i} \ln(Z e^{\lambda E_i}) \\ &= \sum_{i=1}^N Z e^{\lambda E_i} (\ln(Z) + \lambda E_i) \\ &= \ln(Z) \mathcal{E}_0 + \sum \lambda E_i Z e^{\lambda E_i} \end{aligned}$$

DEF:  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , son graph est  $S_\varphi = \{(x, \varphi(x)), x \in U\}$

DEF: Une sous variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $p$  est  $S \subset \mathbb{R}^n$  tq

$\forall x \in S$ , quitte à permuter les coordonnées, il existe :

- $V \subset \mathbb{R}^{n-p} \quad \varphi: V \rightarrow \omega \subset \mathbb{R}^p$  tq
- $\omega \subset \mathbb{R}^p \quad S \cap (V \times \omega) = S_\varphi$

THM: Si  $q_1, \dots, q_m \in C^k$  tq  $\forall x \in S = \{q_1(x), \dots, q_m(x) = 0\}$ ,  $\nabla q_1(x), \dots, \nabla q_m(x)$  libres, alors  $S$  est une sous variété de classe  $C^k$  et de codimension  $m$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$f(\tilde{x}+h) = f(\tilde{x}) + \langle \nabla f(\tilde{x}), h \rangle + o(h)$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Tangente au point  $x$  est :  $\{(t, x + t f'(x)) ; t \in \mathbb{R}\}$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

Tangente au point  $x: \{(t_1, \dots, t_n, x + \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)) \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\}$

DEF:  $S$  ss variété et  $x \in S$

L'espace tangent à  $S$  en  $x$  est  $T_x S = \{(t_1, \dots, t_{n-p}, x + \sum t_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x); t_1, \dots, t_{n-p} \in \mathbb{R}\}$

## Cours 5

Thm (Schwarz):  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, C^2$   
 alors  $\forall x \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

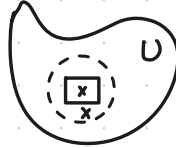
DEM: On pose  $F_{i,j}: (x, y) \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_j, y, x_{j+1}, \dots, x_n)$

Il suffit de montrer le thm pour  $F_{i,j}$

On peut supposer qu'il n'y a que 2 variables

$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m, C^2, x \in U$

$[a, b] \times [c, d] \subset U$  tq  $x \in ]a, b[ \times ]c, d[$



$$\int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s, t) dt \right) ds = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(s, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, c) ds$$

$$= f(b, d) - f(a, d) - (f(b, c) - f(a, c))$$

De même,  $\int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s, t) ds \right) dt = f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c)$

Comme  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  est  $C^0$ ,  $\int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s, t) ds dt = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s, t) dt ds$

Ainsi,  $\int_a^b \int_c^d \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s, t) \right) ds dt = 0$

$x(x, y)$ , si  $G(x, y) > 0, \exists r > 0$  tq  $\forall (x', y) \in B((x, y), r)$

$G(x', y) > 0$

si  $[a, b] \times [c, d] \subset B((x, y), r)$ , alors  $\int_a^b \int_c^d G(s, t) dt ds > 0$  contradiction

THM (Lagrange)  $f, g_1, \dots, g_m: U \rightarrow \mathbb{R}, C^1, \tilde{x} \in U$  tq  $f$  a un extremum local en  $\tilde{x}$  sous les contraintes  $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$   
 si  $\nabla g_i(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x})$  est une famille libre, alors  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tq  $\nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x})$

DEM: on a  $g_i(\tilde{x}) = \dots = g_m(\tilde{x}) = 0$  et  $\nabla g_1(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x})$  libre donc on peut appliquer le thm des fonctions implicites:

quitte à permuter les coordonnées,  $\exists V \subset \mathbb{R}^{n-m}, \omega \subset \mathbb{R}^m$  ouverts,  $\varphi: V \rightarrow \omega \subset \mathbb{R}^m$  tq  $x \in V \times \omega$  et  $g_i(x) = \dots = g_m(x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-m})$

On regarde  $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, \dots, x_{n-m}) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-m}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-m}))$

$\tilde{f}$  est  $C^1$  et a un extremum local en  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}) \in V$ .

Par conséquent,  $\nabla f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})$  s'annule

$\Phi(x_1, \dots, x_{n-m}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-m}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-m}))$  [ $\tilde{f} = f \circ \Phi$ ]

$0 = D_{x_1, \dots, x_{n-m}} \tilde{f}$

$= D\Phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}) f + D_{(x_1, \dots, x_{n-m})} \Phi$

$= D\Phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})_1 f + D\Phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})_2 f + D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}) \varphi$

$= D\tilde{x}_1 f + D\tilde{x}_2 f + D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}) \varphi$

$D_{x_1} f: (h_1, \dots, h_{n-m}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-m} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$   
 $D_{x_2} f: (h_{n-m+1}, \dots, h_m) \mapsto \sum_{i=n-m+1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Question: calculer  $D\varphi$ ?

$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}: U \rightarrow \mathbb{R}^m \quad h(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-m}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-m}))$   
 $h=0 \quad \quad \quad = g \circ \Phi$

$$0 = D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})^h = Dg(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})g + D\phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}, z)g \cdot D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})^\psi$$

$$= D\tilde{x}_1 g + D\tilde{x}_2 g \circ D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})^\psi$$

or,  $\nabla g_1(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x})$  libre + on suppose que les m dernières lignes sont libres

$$\text{Donc } D\tilde{x}_2 g = \left( \nabla g_1(\tilde{x}) \mid \dots \mid \nabla g_m(\tilde{x}) \right) \Big|_{m \text{ dernières lignes}}$$

Ainsi,  $D\tilde{x}_2 g$  est inversible, et  $D\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})^\psi = -(D\tilde{x}_2 g)^{-1} \cdot D\tilde{x}_1 g$

$$0 = D\tilde{f}$$

$$= D\tilde{x}_1 \tilde{f} - (D\tilde{x}_2 \tilde{f}) \cdot (D\tilde{x}_2 g)^{-1} \cdot (D\tilde{x}_1 g)$$

Soit  $h \in \mathbb{R}^{n-m}$

$$\Rightarrow 0 = \langle \nabla \tilde{f}, h \rangle - \langle \nabla \tilde{x}_2 f, (D\tilde{x}_2 g)^{-1} \rangle \cdot (D\tilde{x}_1 g)(h)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla \tilde{x}_1 f, h \rangle = \langle [(D\tilde{x}_2 g)^{-1} \circ (D\tilde{x}_1 g)]^t (\nabla \tilde{x}_2 f), h \rangle$$

$$\text{Vrai } \forall h, \text{ donc } \nabla \tilde{x}_1 f = [(D\tilde{x}_2 g)^{-1} \circ (D\tilde{x}_1 g)]^t (\nabla \tilde{x}_2 f)$$

$$V = \{ \xi \in \mathbb{R}^n, (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) = [ \dots ] (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \}$$

V e.v. de  $\dim \leq m$

$$\nabla f(\tilde{x}) \in V$$

Par le m calcul,  $\nabla g_i(\tilde{x}) \in V$ . Or  $(\nabla g_1(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x}))$  libre donc c'est une base de V

$$\text{Par conséquent } \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ tq } \nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x}).$$

**RAPPELS:**  $S = \{ g_i(x) = \dots = g_m(x) = 0 \}$  est une sous-variété de classe  $C^k$  et de codimension m

c.à.d.  $\forall x \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^{n-m}, \omega \in \mathbb{R}^m, \psi: V \rightarrow \omega \subset \mathbb{R}^m \text{ tq } (V \times \omega) \cap S = \{ (\omega, \psi(x)) ; x \in V \}$

$T_x S =$  (graphe de la différentielle de  $\psi$ )

$$\{ (h, D_x \psi(h)) ; h \in \mathbb{R}^{n-m} \}$$

$$S = \{ (x, f(x)) ; x \in I \} \text{ où } f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rightarrow T_x S = \{ (h, h \cdot f'(x)) ; h \in \mathbb{R} \}$$

**PROP:** Si  $g_1, \dots, g_m \in C^1$  et  $\tilde{x} \text{ tq } \nabla g_1(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x})$  libre

$$\text{Alors } T_{\tilde{x}} S = \left( \text{vect } \nabla g_i(\tilde{x}) \right)^\perp$$

$$\text{DÉM: } V = \{ \xi \in \mathbb{R}^n ; (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) = [(D\tilde{x}_2 g)^{-1} \circ (D\tilde{x}_1 g)]^t (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \}$$

Il suffit de montrer que  $T_x S = V^\perp$

Comme  $\dim(V) = m$  et  $\dim(T_x S) = n-m$ , il suffit de montrer  $T_x S \subset V^\perp$

Soit  $(h, D\tilde{x} \psi(h)) \in T_x S, \xi \in V$ .

$$\begin{aligned} \langle h, D\tilde{x} \psi(h) \rangle \cdot \xi &= \langle (h_1, \dots, h_{n-m}), (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \rangle + \langle D\tilde{x} \psi(h_1, \dots, h_{n-m}), (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \rangle \\ &= \langle (h_1, \dots, h_{n-m}), D\tilde{x} \psi(\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \rangle + \langle D\tilde{x} \psi(h_1, \dots, h_{n-m}), (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

**COROLLAIRE:** Si f a un extremum local sur une sous-variété S en  $\tilde{x}$ , alors  $\nabla f(\tilde{x}) \perp T_{\tilde{x}} S$

$$\text{EX: } S = \{ x \in \mathbb{R}^n ; x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 0 \} \quad (\text{vérifier que le gradient ne s'annule})$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \quad (\text{pas sur les pts des contraintes})$$

$$\nabla g(x) = 2x \neq 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ donc en particulier } \nabla g(x) \neq 0 \text{ pour } x \in S \Rightarrow S \text{ est une sous-variété}$$

(les gradients des contraintes sont des vecteurs perpendiculaires au plan tangent)

- Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique.  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$   
 $f$  souvent le cas pour des contraintes d'égalité  
 $S$  est compact et  $f$  est  $C^0$  donc il y a un maximum global sous contraintes en un point  $\tilde{x}$ .

Lagrange:  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall f(\tilde{x}) = \lambda \nabla g(\tilde{x})$  (CL des gradients des contraintes)  
 $\nabla f(\tilde{x}) = 2\lambda \tilde{x}$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle A(x+h), x+h \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle \\ &= f(x) + 2\langle Ax, h \rangle + \langle Ah, h \rangle \\ &\leq \|Ah\| \|h\| = o(h) \end{aligned}$$

$$\leadsto \nabla f(x) = 2Ax$$

$$\leadsto \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } 2A\tilde{x} = 2\lambda \tilde{x}$$

$$A\tilde{x} = \lambda \tilde{x}$$

DEF:  $f, g_1, \dots, g_m: U \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $\tilde{x}$  est un point critique sous contrainte s'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tq:  
 $\nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x})$

THM:  $f, g_1, \dots, g_m: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Soit  $\tilde{x} \in S = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$  tq:

•  $\nabla g_i(\tilde{x})$  libre

•  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}; \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x}) = \nabla f(\tilde{x})$

Si la forme quadratique  $h \mapsto D_{\tilde{x}}^2 f(h, h) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{\tilde{x}}^2 g_i(h, h)$  est définie positive sur  $E = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(D_{\tilde{x}} g_i)$   
 alors  $f$  a un minimum local strict en  $\tilde{x}$  sous contraintes

$$\begin{aligned} \text{Ker}(D_{\tilde{x}} g_i) &= \nabla g_i(\tilde{x})^\perp \\ \cap \text{Ker} &= \cap \nabla g_i(\tilde{x})^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Vect}(\nabla g_i(\tilde{x}))^\perp \\ &= T_{\tilde{x}} S \end{aligned}$$



EXEMPLE:  $\langle Ax, x \rangle$ ,  $\tilde{x}$  pt critique sous contrainte

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } A\tilde{x} = \lambda \tilde{x}$$

$$\nabla f(x) = 2Ax$$

$$\nabla g(x) = 2x$$

$$\nabla f(x+h) = 2A(x+h) = 2Ax + 2Ah \leadsto H_f(x) = 2A$$

$$H_g(x) = 2\text{Id}$$

$$H_f(x) - \lambda H_g(x) = 2(A - \lambda \text{Id})$$

REM:  $(H_f(\tilde{x}) - \lambda H_g(\tilde{x}))\tilde{x} = 0$  donc pas défini  $>0$  ni  $<0$  sur  $\mathbb{R}^n$

$2(A - \lambda \text{Id})$  symétrique de vp  $\mu - \lambda, \mu \in \text{Sp}(A)$

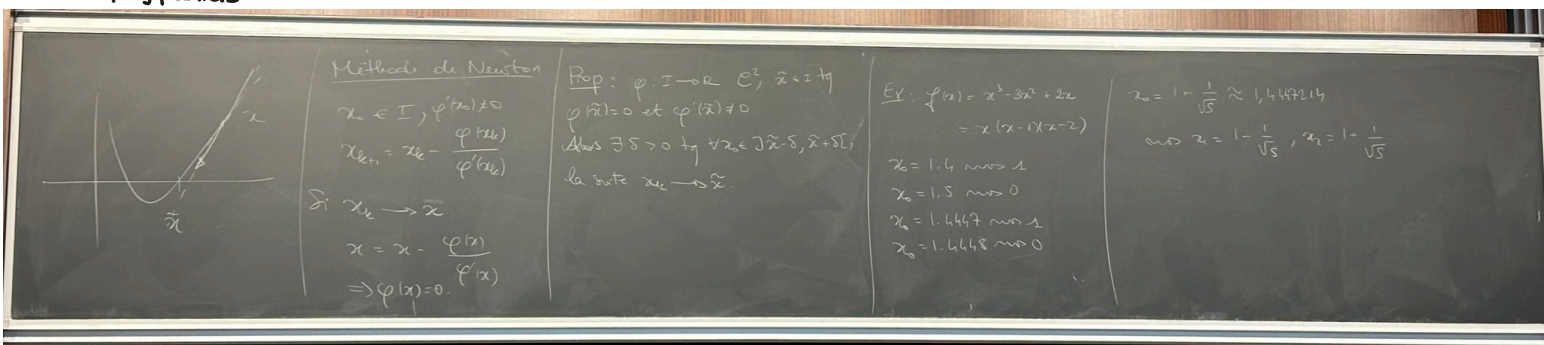
• si  $\lambda$  est la plus petite valeur propre et si  $\lambda$  est de multiplicité 1 ( $\leadsto$  définie  $>0$  ssi les v.p.  $>0$ )

alors  $2(A - \lambda \text{Id})|_{\tilde{x}^\perp}$  est symétrique de v.p.  $>0$

Donc  $H_f(\tilde{x}) - \lambda H_g(\tilde{x})$  def positive sur  $E = \tilde{x}^\perp$ .

Donc  $f$  a un minimum local strict sous contraintes

[fin prog partiel]





$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ } C^1$$

$$h_1, \dots, h_p: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D = \{x \in U; h_j(x) \leq 0, 1 \leq j \leq p\}$$

**DEF:** La contrainte  $h_j$  est active au point  $\tilde{x}$  si  $h_j(\tilde{x}) = 0$

**LEMME:**  $\tilde{x} \in U$  tq  $f$  a un extremum local en  $\tilde{x}$  sous contraintes.

Si  $h_j(\tilde{x}) < 0$ , alors  $f$  a un extremum local en  $\tilde{x}$  sous les contraintes :  $h_i(x) \leq 0, i \neq j$

**DEM:**  $D = \{x \in U; h_j(x) \leq 0, \dots, h_p(x) \leq 0\}$

$$D' = \{x \in U; h_i(x) \leq 0, j \neq i\}$$

$f$  a un extremum local sur  $D$  en  $\tilde{x}$  donc  $\exists r_1 > 0$  tq  $\forall y \in D \cap B(\tilde{x}, r_1), f(y) \geq f(\tilde{x})$  ( $\tilde{x}$  min local)

$h_j \in C^0, \exists r_2 > 0$  tq  $\forall y \in B(\tilde{x}, r_2), h_j(y) \leq \frac{h_j(\tilde{x})}{2} \leq 0$

Alors  $D' \cap B(\tilde{x}, r_2) \subset D$

On pose  $r = \min(r_1, r_2)$ , alors  $\forall y \in D' \cap B(\tilde{x}, r), y \in D \cap B(\tilde{x}, r_1)$  donc  $f(y) \geq f(\tilde{x})$

$\leadsto f$  a un minimum local sur  $D'$  en  $\tilde{x}$ .

**PROP:**  $f, h_1, \dots, h_p: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ } C^1$

$\tilde{x} \in U$  tq  $f$  a un minimum local sous contraintes en  $\tilde{x}$

$\exists \xi_0 \in \mathbb{R}^n$  tq  $\forall j$  tq  $h_j$  est active en  $\tilde{x}$ ,  $\langle \nabla h_j(\tilde{x}), \xi_0 \rangle < 0$ .

Alors,  $\exists \mu_1, \dots, \mu_p \leq 0$  tq  $\nabla f(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\tilde{x})$  et  $\mu_j = 0$  si  $h_j$  est inactive en  $\tilde{x}$ .

**LEMME:** [de Farkas]

$$u = \sum_{j=1}^p \mu_j v_j \quad \mu_j \leq 0$$

$$w \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \langle v_j, w \rangle \leq 0 \quad \forall j$$

$$\langle u, w \rangle = \sum \mu_j \langle v_j, w \rangle \geq 0$$

Soit  $u, v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$  tq  $x \in \mathbb{R}^n$

Si  $\langle v_j, x \rangle \leq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p$  alors  $\langle u, x \rangle \geq 0$

Alors  $\exists \mu_1, \dots, \mu_p \leq 0$  tq  $u = \sum_{j=1}^p \mu_j v_j$

**DEM:** [récurrence sur  $p$ ]

$p=1$  : Supposons que  $u \neq \mu v_1$  avec  $\mu \leq 0$

Si  $u = \mu v_1$  avec  $\mu > 0$ , alors  $\langle v_1, -v_1 \rangle < 0$  et  $\langle u, -v_1 \rangle = -\mu \langle v_1, -v_1 \rangle < 0$ , impossible

Donc  $u$  et  $v_1$  ne sont pas colinéaires.

Soit  $u'$  le projeté orthogonal de  $u$  sur  $v_1^\perp$

$$\langle v_1, u' \rangle = 0 \leq 0$$

$$\langle u, -u' \rangle = \langle u', -u' \rangle < 0. \text{ Contradiction.}$$

$p \rightarrow p+1$  : Soit  $P$  la projection  $\perp$  sur  $v_{p+1}^\perp$

$$\text{si } x \in v_{p+1}^\perp, \quad \langle P(v_j), x \rangle = \langle v_j, P(x) \rangle$$

$$= \langle v_j, P(x) \rangle$$

$$= \langle v_j, x \rangle$$

$$\text{De même, } \langle P(u), x \rangle = \langle u, x \rangle$$

$$\text{Donc si } \langle P(v_j), x \rangle \leq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p$$

$$\text{Alors } \langle v_j, x \rangle \leq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p$$

$$\text{De plus, } \langle v_{p+1}, x \rangle = 0 \leq 0. \text{ donc } \langle u, x \rangle \geq 0, \text{ et aussi } \langle P(u), x \rangle \geq 0$$

$$\text{Par H}_p, \exists \mu_1, \dots, \mu_p \text{ tq } P(u) = \sum_{j=1}^p \mu_j P(v_j)$$



$$\rho \left( \underbrace{\mu - \sum_{j=1}^p \mu_j n_j}_{\mu'} \right) = 0$$

donc  $\exists \mu_{p+1} \in \mathbb{R}$  tq  $\mu' = \mu_{p+1} n_{p+1}$

$$\mu = \sum_{j=1}^{p+1} \mu_j n_j, \mu_j \leq 0 \quad 1 \leq j \leq p$$

\* si  $\mu_{p+1} \leq 0$ , on a fini

\* si  $\mu_{p+1} > 0$ , soit  $x$  tq  $\langle n_j, x \rangle \leq 0 \quad 1 \leq j \leq p$

si  $\langle n_{p+1}, x \rangle \leq 0$ , alors  $\langle \mu, x \rangle \geq 0$  par hypothèse

si  $\langle n_{p+1}, x \rangle > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \mu, x \rangle &= \underbrace{\sum_{j=1}^p \mu_j \langle n_j, x \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\mu_{p+1} \langle n_{p+1}, x \rangle}_{> 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Par Hp,  $\exists \mu'_j, \dots, \mu'_p \in \mathbb{R}$  tq  $\mu = \sum_{j=1}^p \mu'_j n_j$  et on conclut en posant  $\mu_{p+1} = 0$

### DEM (de la prop):

\* on suppose toutes les contraintes sont actives en  $\tilde{x}$

\*  $\exists \xi_0$  tq  $\langle \nabla h_j(\tilde{x}), \xi_0 \rangle < 0, 1 \leq j \leq p$

\* Soit  $\xi_i \in \mathbb{R}^n$  tq  $\langle \nabla h_j(\tilde{x}), \xi_i \rangle \leq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p$

On regarde  $\xi(t) = \tilde{x} + t(\xi_i + \varepsilon \xi_0)$  avec  $\varepsilon > 0$  fixe.

\* on veut montrer que  $\xi(t)$  vérifie les contraintes pour  $t$  petit

$$\begin{aligned} h_j(\xi(t)) &= h_j(\tilde{x} + t(\xi_i + \varepsilon \xi_0)) \\ &= h_j(\tilde{x}) + \langle \nabla h_j(\tilde{x}), t\xi_i + \varepsilon t\xi_0 \rangle + o(t(\xi_i + \varepsilon \xi_0)) \\ &= 0 + t \langle \nabla h_j(\tilde{x}), \xi_i + \varepsilon \xi_0 \rangle + o(t) \\ &= t(\langle \nabla h_j(\tilde{x}), \xi_i + \varepsilon \xi_0 \rangle + o(1)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \exists \delta_j > 0 \text{ tq } \forall t \in \left[0, \frac{\delta_j}{\varepsilon}\right], h_j(\xi(t)) \leq 0$$

\*  $\delta = \min_{1 \leq j \leq p} \delta_j, \forall t \in [0, \delta], \forall 1 \leq j \leq p, h_j(\xi(t)) \leq 0.$

Autrement dit  $\xi(t) \in D$ .

\* Comme  $f$  a un min local sous contraintes en  $\tilde{x}$ ,  $\exists r > 0$  tq  $\forall y \in D \cap B(\tilde{x}, r), f(y) \geq f(\tilde{x})$

Comme  $t \rightarrow \xi(t)$  est  $C^0$ ,  $\exists \delta' > 0$  tq  $\forall t \in [0, \delta], \xi(t) \in B(\tilde{x}, r)$

$\forall t \in ]0, \min(\delta, \delta')[, \xi(t) \in D \cap B(\tilde{x}, r)$ , donc:

$$\frac{f(\xi(t)) - f(\tilde{x})}{t} \geq 0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \langle \nabla f(\tilde{x}), \xi_i + \varepsilon \xi_0 \rangle \geq 0 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \langle \nabla f(\tilde{x}), \xi_i \rangle \geq 0. \leadsto \text{Lemme de Farkas.}$$

\* L'hypothèse  $\langle \nabla h_j(\tilde{x}), \xi_0 \rangle < 0$  est la qualification des contraintes.

\*  $\mu_j h_j(\tilde{x}) = 0$  ( $\mu_j$  nulle quand la contrainte est inactive)

condition de complémentarité

### THM: [Karush-Khun-Tucker] KKT

$f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p: U \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$

Soit  $\tilde{x}$  tq  $f$  a un minimum local en  $\tilde{x}$  sous les contraintes  $\begin{cases} g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0 \\ h_1(x), \dots, h_p(x) \leq 0 \end{cases}$

Si  $-\nabla g_1(\tilde{x}), \dots, \nabla g_m(\tilde{x})$  est libre

$$-\exists \xi_0 \in \bigcap_{i=1}^m \nabla g_i(\tilde{x})^\perp \text{ tq } \langle \nabla h_k(\tilde{x}), \xi_0 \rangle < 0 \quad \forall 1 \leq k \leq p$$

$$\text{Alors } \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R} \text{ tq } \nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\tilde{x})$$

### EXEMPLE:

$C(x)$  = coût de production de  $x$  unités

$R(x, a)$  = revenu de vente de  $x$  unités avec un coût de publicité  $a$

On veut maximiser  $R$  sous contraintes  $R(x, a) - C(x) - a \geq p_0$  ou seuil de profit  
 $x \geq 0, a \geq 0$

Supposons qu'il existe un  $\max(\tilde{x}, \tilde{a})$  avec  $\tilde{x} > 0$

$$h_1(x, a) = p_0 - R(x, a) + C(x) + a$$

$$h_2(x, a) = -a$$

$$\nabla h_1(\tilde{x}, \tilde{a}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial R}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{a}) + C'(\tilde{x}) \\ -\frac{\partial R}{\partial a}(\tilde{x}, \tilde{a}) + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla h_2(\tilde{x}, \tilde{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \nabla h_2, (\xi_1, \xi_2) \rangle = -\xi_2 \leadsto \text{il faut que } \xi_2 > 0$$

$$\langle \nabla h_1, (\xi_1, \xi_2) \rangle = \xi_1 \left( -\frac{\partial R}{\partial x} + C'(x) \right) + \xi_2 \left( -\frac{\partial R}{\partial a} + 1 \right) \leadsto \frac{\xi_1}{\xi_2} \left( -\frac{\partial R}{\partial x} + C'(x) \right) < \frac{\partial R}{\partial a} - 1$$

Système KKT:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{a}) = \mu_1 \left( -\frac{\partial R}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{a}) + C'(\tilde{x}) \right) \\ \frac{\partial R}{\partial a}(\tilde{x}, \tilde{a}) = \mu_1 \left( -\frac{\partial R}{\partial a}(\tilde{x}, \tilde{a}) + 1 \right) - \mu_2 \leadsto \frac{(1+\mu_1)}{>0} \frac{\partial R}{\partial a} = \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 (p_0 - R(\tilde{x}, \tilde{a}) - C(\tilde{x}) - \tilde{a}) = 0 \\ \mu_2 \tilde{a} = 0 \\ (\mu_1, \mu_2 \geq 0; \text{maximum}) \end{cases}$$

$$\text{si } \frac{\partial R}{\partial a} > 0, \text{ alors } \mu_1 - \mu_2 > 0$$

si  $\mu_2 \neq 0, a = 0$  (pas de pub)

\* sinon, si  $\mu_1 = 0$ , on a  $\nabla R = 0$  (condition sans aucune contrainte)

$$\text{si } \mu_1 \neq 0, \text{ alors } p_0 = R(\tilde{x}, \tilde{a}) - C(\tilde{x}) - \tilde{a}$$

**DEF:** On dit que la qualification linéaire des contraintes est vérifiée en  $\tilde{x}$  si  $(\nabla h_j(\tilde{x}))_{j \text{ active}}$  est libre.

**PROP:** Si la qualification linéaire des contraintes est vérifiée, alors les contraintes sont qualifiées au sens du Thm KKT.

**LEM:** On cherche  $\xi_0$  tq  $\langle \nabla h_j(x), \xi_0 \rangle < 0 \quad 1 \leq j \leq p$

\* on va trouver  $\xi_0$  tq  $\langle \nabla h_j(x), \xi_0 \rangle = -1 \quad 1 \leq j \leq p$  sous la forme  $\xi_0 = \sum_{j=1}^p \alpha_j \nabla h_j(x)$

\* on veut que  $\sum_{j=1}^p \alpha_j \langle \nabla h_j(x), \nabla h_j(x) \rangle = -1$

$$M_{i,j} = \langle \nabla h_j(x), \nabla h_i(x) \rangle, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x))$$

est la matrice de Gram de  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x))$

Lemme: une matrice de Gram est inversible si la famille est libre  $\leadsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$

(gradients  $\leadsto$  pas libre  $\leadsto$  or les contraintes ne sont pas actives en même temps)

## Cours 8 14/11/2025

[optimisation linéaire]

Terminologie: "linéaire" = affine

$$f: x \mapsto \langle u, x \rangle + b \quad u \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$$

$$g_i: x \mapsto \langle u_i, x \rangle - c_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$h_j: x \mapsto \langle w_j, x \rangle - d_j \quad (1 \leq j \leq p)$$

$$g_i(x) = 0 \Leftrightarrow \langle u_i, x \rangle = c_i$$

$$f, g_i, h_j: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, C^\infty$$

$$\nabla f(x) = u, \nabla g_i = u_i, \nabla h_j = w_j$$

$$\begin{aligned} \text{KKT: } u &= \sum \lambda_i \nabla g_i + \sum \mu_j \nabla h_j \\ &= \underbrace{\sum \lambda_i u_i} + \underbrace{\sum \mu_j w_j} \end{aligned}$$

contraintes sous forme matricielle:

$$Gx = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \overbrace{\quad}^{m^t} \\ \vdots \\ \underbrace{\quad}^{n^t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$
$$Hx \leq d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \overbrace{\quad}^{m^t} \\ \vdots \\ \underbrace{\quad}^{n^t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_m^t \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} w_1^t \\ \vdots \\ w_p^t \end{pmatrix}$$

convention:  $y \leq z, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$u = G^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} + H^t \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_i \leq z_i \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (\text{pour un minimum})$$

$$u = G^t \lambda + H^t \mu$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p$$

$$\mu_j h_j(x) = 0 \quad \mu_j \langle w_j, x \rangle = \mu_j d_j$$

$$\mu_j (\langle w_j, x \rangle - d_j) = 0$$

Thm KKT: s'il y a un minimum local sous contraintes, et si les contraintes sont qualifiées:

$$u = G^t \lambda + H^t \mu$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{cases} u = G^t \lambda + H^t \mu \\ G\tilde{x} = c \\ H\tilde{x} \leq d \\ \mu_j \langle w_j, \tilde{x} \rangle = \mu_j d_j \end{cases}$$

THM: [KKT Linéaire]

$$f \text{ a un minimum local sous contraintes en } \tilde{x} \text{ ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p, \text{ tq } \begin{cases} u = G^t \lambda + H^t \mu \\ G\tilde{x} = c \\ H\tilde{x} \leq d \\ \mu_j \langle w_j, \tilde{x} \rangle = \mu_j d_j \end{cases}$$

De plus, le minimum est global.

DEM:

Soit  $\xi_i \in \mathbb{R}^n$  tq:

i)  $\langle v_i, \xi_i \rangle = 0 \quad 1 \leq i \leq m$

ii)  $\langle w_j, \xi_i \rangle \leq 0 \quad 0 \leq j \leq p$

\* on peut supposer que les contraintes d'inégalité sont actives en  $\tilde{x}$

$\Rightarrow \xi(t) = \tilde{x} + t \xi_0$

$$\begin{aligned} g_i(\xi(t)) &= \langle n_i, \tilde{x} + t \xi_i \rangle - c_i \\ &= \langle n_i, \tilde{x} \rangle - c_i + t \langle n_i, \xi_i \rangle \\ &= g_i(\tilde{x}) + t \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_j(\xi(t)) &= \langle w_j, \tilde{x} \rangle - d_j + t \langle w_j, \xi_i \rangle \\ &= h_j(\tilde{x}) + t \langle w_j, \xi_i \rangle \\ &= t \langle w_j, \xi_i \rangle \leq 0 \quad \text{si } t > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{f(\xi(t)) - f(\tilde{x})}_{\geq 0} &= \langle \mu, \tilde{x} \rangle + \langle \mu, t \xi_i \rangle + b - (\langle \mu, \tilde{x} \rangle + b) \\ &= t \langle \mu, \xi_i \rangle \end{aligned}$$

pour  $t \in [0, \delta]$

donc  $\langle \mu, \xi_i \rangle \geq 0$

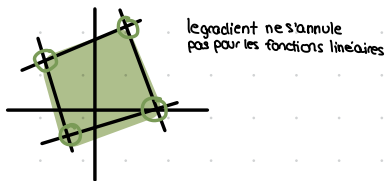
$E = \bigcap_{i=1}^m n_i^\perp$ , P la projection orthogonale sur E

Farkas:  $P(\mu) = \sum_{j=1}^p \mu_j P(w_j) \quad , \mu_j \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{donc } \mu &= \sum_{j=1}^p \mu_j w_j \in E^\perp = \text{vect}(n_i^\perp)_{1 \leq i \leq m} \\ &= \text{vect}(n_i)_{1 \leq i \leq m} \end{aligned}$$

si  $\tilde{x}$  vérifie les conditions KKT et  $\tilde{x}$  vérifie les contraintes,

$$\begin{aligned} f(x) - f(\tilde{x}) &= \langle \mu, x \rangle + b - (\langle \mu, \tilde{x} \rangle + b) = \langle \mu, x - \tilde{x} \rangle \\ &= \langle \sum \lambda_i n_i, x - \tilde{x} \rangle + \sum \mu_j \langle w_j, x - \tilde{x} \rangle \\ &= \sum \lambda_i (\underbrace{\langle n_i, x \rangle}_{c_i} - \underbrace{\langle n_i, \tilde{x} \rangle}_{c_i}) + \sum \mu_j (\langle w_j, x \rangle - \langle w_j, \tilde{x} \rangle) \\ &= 0 + \sum \mu_j \langle w_j, x \rangle - \underbrace{\sum \mu_j \langle w_j, \tilde{x} \rangle}_{\sum \mu_j d_j} \\ &= \sum \mu_j (\langle w_j, x \rangle - d_j) \\ &= \sum \mu_j h_j(x) \geq 0 \quad \text{donc } \tilde{x} \text{ est un minimum global.} \end{aligned}$$



DEF: un polytope est un ensemble de la forme  $P = \{x \in \mathbb{R}^n; h_j(x) \leq 0, 1 \leq j \leq p\}$  où  $h_j(x) = \langle w_j, x \rangle - d_j$

La j-ème face de P est  $F_j = \{x \in P; h_j(x) = 0\}$

$F_j$  est un polytope de  $\{x; h_j(x) = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$

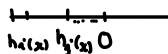
PROP:  $\partial P = \bigcup_{j=1}^p F_j$

DEM:  $F := \bigcup_{j=1}^p F_j$ ,  $\mu = \{x \in P; h_j(x) < 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p\}$

$P = F \cup \mu$

On va montrer que  $U = \overset{\circ}{P}$

\* U est ouvert :  $x \in \mu, \varepsilon = \frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq p} h_j(x)$



Par continuité de  $h_j, \exists \delta_i > 0 \quad \forall y \in B(x, \delta_j), h_j(y) \leq h_j(x) + \varepsilon < 0$

$\delta = \min_{1 \leq j \leq p} \delta_j, B(x, \delta) \subset U.$

Soit  $x \in F, \exists j_0$  tq  $h_{j_0}(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{si } r > 0, x + \frac{r}{2\|\omega_{j_0}\|} \omega_{j_0} \in B(x, r) \text{ et } h_{j_0}\left(x + \frac{r}{2\|\omega_{j_0}\|} \omega_{j_0}\right) &= \left\langle \omega_{j_0}, x + \frac{r}{2\|\omega_{j_0}\|} \omega_{j_0} \right\rangle - d_{j_0} \\ &= \underbrace{\left\langle \omega_{j_0}, x \right\rangle - d_{j_0}}_{h_{j_0}(x)=0} + \underbrace{\left\langle \omega_{j_0}, \frac{r}{2\|\omega_{j_0}\|} \omega_{j_0} \right\rangle}_{\substack{\text{on la rend} \\ \text{croissante en} \\ \text{se déplaçant sur la} \\ \text{direction du gradient}}} \\ &= \frac{r}{2} \|\omega_{j_0}\| > 0 \end{aligned}$$

### THM: [Solution - sommet]

Si un problème d'optimisation linéaire a une solution, alors il y a une solution atteinte sur un sommet.

DEM: par récurrence sur n

$n=1$ : f linéaire sur un segment / demi-droite / droite ( $x \mapsto ax+b$ )

$n \rightarrow n+1$  si f a un extremum en  $\tilde{x} \in P = F \cup P$

si f non constante,  $\nabla f \neq 0$  donc  $\tilde{x} \notin P$  donc  $\tilde{x} \in F$

on conclut par  $H_n$ .

DEF: Le Lagrangien d'un problème d'optimisation (minimisation) est

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(p)$$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^m \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= f(x) - \underbrace{\inf_{\lambda} \left( \sum \lambda_i g_i(x) \right)}_{\substack{= 0 \text{ si } g_i(x) = 0 \forall i \\ -\infty \text{ sinon}}} - \underbrace{\inf_{\mu} \left( \sum \mu_j h_j(x) \right)}_{\substack{= 0 \text{ si } h_j(x) \leq 0 \forall j \\ -\infty \text{ sinon}}} \end{aligned}$$

$$\sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ vérifie les contraintes} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\min_{\text{contrainte } x} f = \inf_{x, \lambda, \mu} \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$$

$$\text{et } \sup_{\lambda, \mu} \inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) ?$$

DEF:  $f^*(\lambda, \mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$  si ce nombre est  $> -\infty$

$\leadsto$  maximiser  $f^*(\lambda, \mu)$  sous contraintes  $\inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) > -\infty$

Le problème de maximisation de  $f^*$  est le problème dual

Le problème de minimisation de  $f$  est le pb primal.

### PROP: [Dualité de Lagrange faible]

$\forall x, \lambda, \mu$  satisfaisant les contraintes, alors  $f(x) \geq f^*(\lambda, \mu)$

si f a un minimum sous contrainte en  $\tilde{x}$  et  $f^*$  a un maximum sous contraintes en  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ , alors  $f(\tilde{x}) \geq f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

DEM:  $f(x) = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum \mu_j h_j(x)$

$$= \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) + 0 + \sum \mu_j h_j(x)$$

$$\geq \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \quad \underbrace{\sum \mu_j h_j(x)}_{\substack{\leq 0 \cdot \leq 0 \\ \geq 0}}$$

$$\geq f^*(\lambda, \mu)$$

si  $\tilde{x}$  min global de f,  $f(\tilde{x}) \geq f^*(\lambda, \mu) \forall (\lambda, \mu)$

$$\geq f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$$

si  $f(x^*) = f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ , alors  $\forall x$  qui vérifie les contraintes,  $f(x) \geq f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f(x^*)$

donc  $x^*$  min global.

cas linéaire:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= \langle u, x \rangle + b - \sum \lambda_i (\langle u_i, x \rangle - c_i) - \sum \mu_j (\langle w_j, x \rangle - d_j) \\ &= \langle u, x \rangle + b - \langle \lambda, Gx - c \rangle - \langle \mu, Hx - d \rangle \\ &= \langle u, x \rangle - \langle \lambda, Gx \rangle - \langle \mu, Hx \rangle + b - \langle \lambda, c \rangle - \langle \mu, d \rangle \\ &= \langle u - G^t \lambda - H^t \mu, x \rangle + b - \langle \lambda, c \rangle - \langle \mu, d \rangle\end{aligned}$$

$$\inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \begin{cases} b - \langle \lambda, c \rangle - \langle \mu, d \rangle & \text{si } u - G^t \lambda - H^t \mu = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pb dual: maximiser  $b - \langle \lambda, c \rangle - \langle \mu, d \rangle$  sous les contraintes  $u - G^t \lambda - H^t \mu = 0$   $\mu \leq 0$   
 $\leadsto$  le pb dual est encore linéaire !

PROP: [Bidualité linéaire]

le dual du dual d'un pb linéaire est le pb de départ.

## Cours 9 21/11/25

$$f(x) = \langle u, x \rangle + b$$

$$g_i(x) = \langle u_i, x \rangle - c_i$$

$$h_j(x) = \langle w_j, x \rangle - d_j$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \langle u, x \rangle + b - \langle \lambda, Gx - c \rangle - \langle \mu, Hx - d \rangle$$

$$f^*(\lambda, \mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \begin{cases} \langle \lambda, c \rangle + \langle \mu, d \rangle + b & \text{si } u = G^t \lambda + H^t \mu \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pb dual: maximiser  $f^*$  sous les contraintes  $u = G^t \lambda + H^t \mu$   
 $\mu \leq 0$

PROP: Le dual du dual d'un pb linéaire est le pb primal

DÉM: On va minimiser  $-f^*$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(\lambda, \mu, \alpha, \beta) &= -\langle \lambda, c \rangle - \langle \mu, d \rangle - b - \langle \alpha, u - G^t \lambda - H^t \mu \rangle - \langle \beta, \mu \rangle \\ &= \langle \lambda, c \rangle + \langle \alpha, G^t \lambda \rangle - \langle \mu, d \rangle + \langle \alpha, H^t \mu \rangle - \langle \beta, \mu \rangle - \underbrace{b - \langle \alpha, u \rangle}_{-f} \\ &= \langle \lambda, G\alpha - c \rangle + \langle \mu, H\alpha - d - \beta \rangle - b - \langle \alpha, u \rangle\end{aligned}$$

$$\inf_{\lambda, \mu} \bar{\mathcal{L}}(\lambda, \mu, \alpha, \beta) = \begin{cases} -\langle \alpha, u \rangle - b & \text{si } G\alpha - c = 0 \\ & H\alpha - d - \beta \leq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pb dual du dual: maximiser  $-\langle \alpha, u \rangle - b$  sous les contraintes:  $G\alpha = c$   
 $H\alpha \leq d + \beta$   
 $\beta \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{minimiser } f(\alpha) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} G\alpha = c \\ H\alpha \leq d + \beta \\ \beta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G\alpha = c \\ H\alpha \leq d \end{cases} \\ &H\alpha \leq d + \beta \leq d \end{aligned}$$

THM: [La dualité forte de Lagrange pour les problèmes linéaires]

Si un pb linéaire a une solution, alors  $\exists (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$  solution du dual tq  $f(\tilde{x}) = f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

DÉM: par KKT,  $\exists \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$

$$u = G^t \tilde{\lambda} + H^t \tilde{\mu}$$

$$\langle \tilde{\mu}, H\tilde{x} \rangle = \langle \tilde{\mu}, d \rangle$$

$$f(\tilde{x}) = \langle u, \tilde{x} \rangle + b$$

$$= \langle G^t \tilde{\lambda} + H^t \tilde{\mu}, \tilde{x} \rangle + b$$

$$= \langle G^t \tilde{\lambda}, \tilde{x} \rangle + \langle H^t \tilde{\mu}, \tilde{x} \rangle + b$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \tilde{x}, G\tilde{x} \rangle + \langle \tilde{y}, H\tilde{x} \rangle + b \\
 &= \langle \tilde{x}, c \rangle + \langle \tilde{y}, d \rangle + b \\
 &= f^*(\tilde{x}, \tilde{y})
 \end{aligned}$$

## Théorie des jeux

$$\begin{aligned}
 A &\leadsto \text{stratégies} = \{1, \dots, n\} \\
 B &\leadsto \text{stratégies} = \{1, \dots, m\}
 \end{aligned}$$

$M_{ij}$  = gain de A s'il joue  $i$  et B s'il joue  $j$

Somme nulle: gain de B s'il joue  $j$  et que A joue  $i$  est  $-M_{ij}$

$$\begin{aligned}
 \text{Stratégie (mixte) par A: } (x_1, \dots, x_n) + q \ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 \text{Stratégie (mixte) par B: } (y_1, \dots, y_m) + q \ y_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^m y_j = 1
 \end{aligned}$$

Espérance de gain de A par  $x$  et  $y$ :

$$G_A(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i y_j M_{ij} = \langle x, My \rangle$$

$$G_A(x) = \min_y \langle x, My \rangle, \text{ plus petit gain moyen}$$

On cherche  $\tilde{x}$  tq  $\langle \tilde{x}, My \rangle = \max_x \min_y \langle x, My \rangle$  (Stratégie maximin)

$$\text{Pour B, } \max_x \min_y \langle x, (-M)y \rangle = \max_x (-\max_y \langle x, My \rangle)$$

$$= -\min_x \max_y \langle x, My \rangle \quad (\text{stratégie minimax})$$

$$\text{Lemme: } B = \{y_1, \dots, y_m\} \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m y_i = 1.$$

$$\text{Alors } \min_{y \in B} \langle x, My \rangle = \min_{1 \leq i \leq m} ({}^t Mx)_i$$

$$\text{DEM: si } y = e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$$

$$\langle x, Me_i \rangle = \langle {}^t Mx, e_i \rangle = ({}^t Mx)_i$$

$$\text{Donc } \min_{y \in B} \langle x, My \rangle = \min_{1 \leq i \leq m} ({}^t Mx)_i \geq \min_{y \in \mathbb{R}} \langle x, My \rangle$$

$$\text{si } y \in B, y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$$

$$\langle x, My \rangle = \langle {}^t Mx, \sum_{i=1}^m y_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^m y_i \langle {}^t Mx, e_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m y_i ({}^t Mx)_i$$

$$\geq \sum_{i=1}^m y_i (\min_{1 \leq i \leq m} ({}^t Mx)_i)$$

$$= (\min_{1 \leq i \leq m} ({}^t Mx)_i) \sum_{i=1}^m y_i = (\min_{1 \leq i \leq m} ({}^t Mx)_i)$$

## THM: [von Neumann]

$$\exists \tilde{x}, \tilde{y} \text{ tq } \langle \tilde{x}, M\tilde{y} \rangle = \max_x \min_y \langle x, My \rangle = \min_y \max_x \langle x, My \rangle$$

DEM:

$$\text{* Problème primal: minimiser } \sum_{i=1}^n x_i \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x_i \geq 0 \\ {}^t Mx \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{cases} = 1$$

lien avec maximin:

$$\text{Soit } 0 < \epsilon < \max_x \min_y \langle x, My \rangle$$

$$\text{Alors } \exists x \text{ tq } f(x) = 1 \text{ et } \min_y \langle x, My \rangle \geq \epsilon$$

$$\Leftrightarrow {}^t Mx \geq \begin{pmatrix} \epsilon \\ \vdots \end{pmatrix} = \epsilon \mathbf{1}$$

$$x' = \frac{1}{\epsilon} \cdot x \quad x' \geq 0$$

$${}^t Mx' \geq \mathbf{1}$$

$$\text{et } f(x') = 1/\epsilon \quad \text{Donc } \min f \leq 1/\epsilon$$

$$\text{CCL: } \min_x f = \frac{1}{\max_y \min_{1 \leq j \leq m} \langle x, M_j y \rangle}$$

$$\neq \text{Pb dual } g(y) = \sum_{i=1}^n y_i$$

maximiser  $g$  sous les contraintes  $\begin{cases} y \geq 0 \\ M y \leq 1 \end{cases}$

$$\text{Soit } t \geq \min_y \max_x \langle x, M y \rangle$$

$$\exists y \text{ tq } g(y) = 1 \text{ et } t \geq \max_{1 \leq j \leq m} \langle x, M_j y \rangle = \max_{1 \leq j \leq m} (M_j y)_j$$

$$y' = \frac{1}{t} \cdot y \quad \begin{cases} y' \geq 0 \\ M y' \leq 1 \end{cases}$$

$$g(y') = \frac{1}{t}$$

$$\max g \geq 1/t$$

$$\text{CCL: } \max_y g = \frac{1}{\min_x \max_y \langle x, M y \rangle}$$

≠ dualité Calculons le dual du premier problème

$$f(x) = \sum x_i = \langle x, 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \mu, \mu') &= \langle x, 1 \rangle - \langle \mu, 1 - Mx \rangle - \langle \mu', -x \rangle \\ &= \langle x, 1 + M\mu + \mu' \rangle - \langle \mu, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\inf_x \mathcal{L}(x, \mu, \mu') = \begin{cases} -\langle \mu, 1 \rangle & \text{si } 1 + M\mu + \mu' = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pb dual: maximiser  $-\langle \mu, 1 \rangle$  sous les contraintes  $1 + M\mu + \mu' = 0$

$$\text{Posons } y = -\mu$$

maximiser  $\langle y, 1 \rangle = g(y)$  sous:  $1 - My + \mu' = 0$   $\mu'$  n'apparaît que dans les contraintes

$$y \geq 0 \Leftrightarrow 1 - My \geq 0$$

$$\mu' \leq 0 \quad My \leq 1$$

$$\text{Donc par dualité forte } \max \min = \frac{1}{\min_x f(x)} = \frac{1}{g(\tilde{y})} = \frac{1}{\max_y g} = \frac{1}{\max_y g} = \min \max$$

COROLLAIRE:  $\forall x, y$  stratégies de A et B,  $\langle x, M \tilde{y} \rangle \leq \langle \tilde{x}, M \tilde{y} \rangle \leq \langle \tilde{x}, M y \rangle$

DEM: Soit  $\varphi(x) = \min_y \langle x, M y \rangle$  a un minimum sur B en  $\tilde{x}$  et  $\varphi(\tilde{x}) = \min_y \langle \tilde{x}, M y \rangle$

$$\psi(y) = \max_x \langle x, M y \rangle \text{ a un maximum sur B en } \tilde{y} \text{ et } \psi(\tilde{y}) = \max_x \langle x, M \tilde{y} \rangle$$

$$\langle \tilde{x}, M y \rangle \geq \min_y \langle \tilde{x}, M y \rangle = \varphi(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{y}) = \max_x \langle x, M \tilde{y} \rangle \geq \langle \tilde{x}, M \tilde{y} \rangle$$

Equilibre de Nash.

Descente de gradient:

On part de  $x_0$

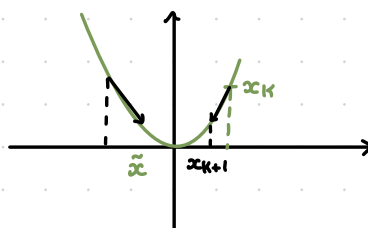
$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f_k(x_k)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  a un minimum local en  $\tilde{x}$ .

$$f(x) = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x}) f'(\tilde{x}) + \frac{(x - \tilde{x})^2}{2} f''(\tilde{x}) + o((x - \tilde{x})^2)$$

$$= f(\tilde{x}) + \frac{(x - \tilde{x})^2}{2} f''(\tilde{x}) + o((x - \tilde{x})^2)$$





$$f(x + tv) = f(x) - \langle tv, \nabla f(x) \rangle + o(\|tv\|)$$

convexité:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si  $f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)) \quad \forall t \in [0, 1]$

DEF: Une partie  $U \subset \mathbb{R}^n$  est convexe si  $\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], x + t(y-x) \in U$

PROP: Les boules sont convexes

DEM:  $B(a, r) \ni x, y, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|x + t(y-x) - a\| &= \|x - tx + ty - a\| \\ &= \|(1-t)x + ty - a\| \\ &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \\ &\leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

PROP: [Accroissements finis]

$U$  ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et  $\exists M > 0$  tq  $\|\nabla f(x)\| \leq M, \forall x \in U$

Alors,  $\forall x, y \in U, \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$

DEM:  $g: t \in [0, 1] \rightarrow f(x + t(y-x))$

$$g'(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle$$

$$|g'(t)| \leq \|\nabla f(\_)\| \|y-x\| \leq M\|y-x\|$$

$$|f(y) - f(x)| = |g(1) - g(0)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |g'(t)| \times |1-0| = M\|y-x\|$$

## Cours 10

**DEF:** une partie  $U \subset \mathbb{R}^n$  est convexe si  $\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], x + t(y-x) \in U$

- une fonction  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si  $\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x))$
- $f$  est strictement convexe si  $\forall t \in ]0, 1[, f(x + t(y-x)) < f(x) + t(f(y) - f(x))$

**PROP:** [Inégalité de Jensen]

$U \subset \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}$

alors  $f$  est convexessi  $\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in U, \forall t_1, \dots, t_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^n t_i = 1$  tq

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

**DEM:** ( $\Rightarrow$ ) par récurrence sur  $n$

**n=2:**  $t_1 + t_2 = 1$  donc  $t_1 = 1 - t_2$

$$\begin{aligned} f(t_1 x_1 + t_2 x_2) &= f((1-t_2)x_1 + t_2 x_2) \\ &= f(x_1 + t_2(x_2 - x_1)) \\ &\leq f(x_1) + t_2(f(x_2) - f(x_1)) \\ &= (1-t_2)f(x_1) + t_2 f(x_2) \\ &= t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \end{aligned}$$

Supposons que l'inégalité est vraie pour  $n$  points

Montrons pour  $x_1, \dots, x_{n+1}, t_1, \dots, t_{n+1}$

On pose  $t'_2 = t_{n+1}$ , et  $t'_1 = 1 - t'_2 = \sum_{i=1}^n t_i$

On pose  $x'_2 = x_{n+1}$  et  $x'_1 = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t'_1} x_i$

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(t'_1 x'_1 + t'_2 x'_2\right) \\ (\text{cas } n=2) &\leq t'_1 f(x'_1) + t'_2 f(x'_2) \\ &= t'_1 f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t'_1} x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t'_1} &= 1, \text{ on a par le cas } n \\ &\sim \leq t'_1 \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t'_1} f(x_i) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i) \end{aligned}$$

**DEF:**  $U$  convexe,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est concave si  $-f$  convexe.

**PROP:**  $U \subset \mathbb{R}^n$  convexe

- si  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  convexes, alors  $f+g$  convexe
- si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $\lambda > 0$ , alors  $\lambda f$  convexe. pour préserver les inégalités
- si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  convexe,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et croissante, alors  $g \circ f$  convexe
- si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  affine, alors  $g \circ f$  convexe.

**DEM:**

$$\begin{aligned} (f+g)(x + t(y-x)) &= f(x + t(y-x)) + g(x + t(y-x)) \\ &\leq f(x) + t(f(y) - f(x)) + g(x) + t(g(y) - g(x)) \\ &= (f+g)(x) + t((f+g)(y) - (f+g)(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet (g \circ f)(x + t(y-x)) &= g(f(x + t(y-x))) \\
 &\leq f(x) + t(f(y) - f(x)) \\
 \text{croissance des } g &\rightarrow \leq g(f(x)) + t(g(f(y)) - g(f(x))) \\
 g \text{ convexe} &\rightarrow \leq g(f(x)) + t(g(f(y)) - g(f(x))) \\
 &= (g \circ f)(x) + t(g \circ f(y) - g \circ f(x))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet g(x) &= Ax + b, A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \\
 (f \circ g)(x + t(y-x)) &= f(A(x + t(y-x)) + b) \\
 &= f(Ax + t(Ay - Ax) + b) \\
 &= f(Ax + b + t((Ay + b) - (Ax + b))) \\
 &= f(g(x) + t(g(y) - g(x))) \\
 &\leq f \circ g(x) + t(f \circ g(y) - f \circ g(x))
 \end{aligned}$$

EX:  $f: x \mapsto x^2$ ,  $g: x \mapsto e^{-x}$   
 convexes,  $g \circ f = e^{-x^2}$  pas convexe



REM: les fonctions affines sont convexes et concaves

PROP:  $C \subset \mathbb{R}^n$  convexe

$f: C \rightarrow \mathbb{R}^n$  convexe. Alors,  $f$  est continue sur l'intérieur de  $C$

DEM:

\* restriction à un hypercube

$$Q = \prod_{i=1}^n [x_i - \frac{r}{\sqrt{2n}}; x_i + \frac{r}{\sqrt{2n}}]$$

$$\begin{aligned}
 y = (y_1, \dots, y_n) \in Q &\Leftrightarrow \forall i \leq n, x_i - \frac{r}{\sqrt{2n}} \leq y_i \leq x_i + \frac{r}{\sqrt{2n}} \\
 y \in Q, \|y - x\|^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \frac{r^2}{2n} = r^2/2
 \end{aligned}$$

donc  $\|y - x\| \leq r$

i.e.  $y \in B(x, r)$

Ainsi,  $Q \subset B(x, r)$

\* Points extrémaux

On appelle sommet de  $Q$  les  $y \in Q$  tq  $\forall i, y_i = x_i \pm \frac{r}{\sqrt{2n}}$

On va montrer que  $\forall y \in Q, \exists t_1, \dots, t_{2^n} \geq 0$  tq  $\sum t_i = 1$   $y = \sum t_i z_i$  où les  $z_i$  sont les sommets.

On procède par récurrence sur  $n$

$n=1$ :  $Q = [a, b]$  ✓

si vrai pour  $n$ :  $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in Q$ ,  $y_1 = [x_1 - \frac{r}{\sqrt{2n}}; x_1 + \frac{r}{\sqrt{2n}}]$   
 $y_1 = t_1(x_1 - \frac{r}{\sqrt{2n}}) + (1-t_1)(x_1 + \frac{r}{\sqrt{2n}})$ ,  $y^1 = (x_1 \pm \frac{r}{\sqrt{2n}}, y_2, \dots, y_n)$ ,  $y = t_1 y^- + (1-t_1) y^+$   
 $(y_2, \dots, y_{n+1}) \in Q' = \prod_{i=1}^{n+1} [x_i - \frac{r}{\sqrt{2n}}, x_i + \frac{r}{\sqrt{2n}}]$

donc  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$  tq  $\sum \lambda_i = 1$  et  $y' = (y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$ ,  $b_j$  sommets de  $Q'$

$$y = ty^- + (1-t)y^+ \\ = t \sum \lambda_j b_j^- + (1-t) \sum \lambda_j b_j^+$$

$$\sum t \lambda_j + \sum (1-t) \lambda_j = t + (1-t) = 1$$

\*  $f$  est localement bornée

Soit  $M = \max_{\text{sommets de } Q} f$ .  $\forall y \in Q, f(y) = f(\sum t_i z_i) \leq \sum t_i f(z_i) \leq M \sum t_i = M$

On pose  $r' = r/\sqrt{2n}$ ,  $B(x, r') \subset Q$  donc  $f$  est bornée sur  $B(x, r')$

\*  $f$  est continue en  $x$

Soit  $y \in B(x, r'/2)$

On pose  $z = y + \frac{r'}{2\|y-x\|} (y-x)$

$$\|z-x\| = \|y-x + \frac{r'}{2\|y-x\|} (y-x)\| \leq \|y-x\| + \frac{r'}{2\|y-x\|} \|y-x\| < \frac{r'}{2} + \frac{r'}{2} < r'$$

donc  $z \in B(x, r')$

$$\alpha = r'/2\|x-y\| \rightsquigarrow z = y + \alpha(y-x)$$

$$z + \alpha x = y(1+\alpha) \Rightarrow y = \frac{1}{1+\alpha} z + \frac{\alpha}{1+\alpha} x ; \alpha > 0$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} = 1$$

Par convexité,  $f(y) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(z) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x)$

$$f(y) - f(x) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(z) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x) - f(x) = \frac{1}{1+\alpha} (f(z) - f(x)) \\ \leq \frac{2M}{1+\alpha}$$

$$f(y) - f(x) \leq 2M \times \frac{2\|x-y\|}{r' + 2\|x-y\|}$$

$$\leq \frac{2M}{r'} \times 2\|x-y\| \leq \frac{4M}{r'} \|x-y\|$$

En échangeant  $x$  et  $y$  dans la définition de  $z$ ,  $f(x) - f(y) \leq \frac{4M}{r'} \|x-y\|$

Ainsi,  $\forall y \in B(x, r'), |f(y) - f(x)| \leq \frac{4M}{r'} \|y-x\|$

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in B(x, \min(\frac{\varepsilon r'}{4M}, \frac{r'}{2}))$ , alors  $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$

Autrement dit,  $f$  est C<sup>0</sup> en  $x$ .

PROP:  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert convexe,

$f: U \rightarrow \mathbb{R} \cap \mathbb{C}'$ .

Alors,  $f$  est convexe ssi

$$\forall x, y \in U \quad f(y) - f(x) \leq \langle \nabla f(x), y-x \rangle$$



$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \geq f'(x)$$

$$\rightsquigarrow f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \\ = D_x f(y-x)$$

DEM:  $f(x) + t(f(y) - f(x)) \geq f(x + t(y-x))$

$$f(y) - f(x) \geq \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} ; t > 0 (*)$$

On pose  $g: t \in [0, 1] \mapsto f(x + t(y-x))$

$U$  ouvert donc  $\exists r > 0$  tq  $B(x, r) \subset U$

si  $\|t\| \leq \delta = \frac{r}{2\|y-x\|}$ , alors  $\|x+t(y-x)-x\| \leq \frac{r}{2} < r$

donc  $x+t(y-x) \in B(x, r) \subset U$

Donc  $g$  est définie sur  $]-\delta, \delta[$ , car composée de fonctions  $C^1$

$g'(t) = \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x \rangle$

si  $t \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

Réciproquement, supposons  $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

$f(x) \geq f(x+t(y-x)) + \langle \nabla f(x+t(y-x)), x - x+t(y-x) \rangle$

$$= f(x+t(y-x)) - \langle \nabla f(x+t(y-x)), t(y-x) \rangle \quad (*)$$

$f(y) \geq f(x+t(y-x))$

$f(y) \geq f(x+t(y-x)) + \langle \nabla f(x+t(y-x)), y - (x+t(y-x)) \rangle$

$$= f(x+t(y-x)) + \langle \nabla f(x+t(y-x)), (1-t)y-x \rangle \quad (**)$$

$$(1-t)x + t y \Rightarrow (1-t)f(x) + tf(y) \geq f(x+t(y-x)) - (1-t)t \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x \rangle + t(1-t) \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x \rangle$$
$$= f(x+t(y-x))$$

**THM:**  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert convexe,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  convexe  $C^1$

si  $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ , alors  $f$  a un minimum global en  $\tilde{x}$

**DEM:** soit  $y \in U$ , alors  $f(y) - f(\tilde{x}) \geq \langle \nabla f(\tilde{x}), y - \tilde{x} \rangle = 0$

**PROP:** si  $f$  est strictement convexe, elle a au plus un minimum global

**DEM:** si  $f$  a un minimum global en  $\tilde{x}$ , et si  $y \neq \tilde{x}$ ,  $f(\tilde{x}) \leq f\left(\frac{\tilde{x}+y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\tilde{x}) + \frac{1}{2}f(y)$   
 $\Rightarrow \frac{1}{2}f(\tilde{x}) < \frac{1}{2}f(y)$  i.e.  $f(\tilde{x}) < f(y)$

**PROP:**  $U \subset \mathbb{R}^n$  convexe,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  convexe, si  $f$  a un minimum local en un point  $\tilde{x}$ , alors c'est un minimum global.  
(sans supposer  $C^1$ )

$$D = \{x \in U; g_1(x) = \text{---} = g_m(x) = 0, h_1(x), \text{---}, h_p(x) \leq 0\}$$
$$= U \cap \left( \bigcap_{i=1}^m \{g_i(x) = 0\} \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^p \{h_i(x) \leq 0\} \right)$$

**THM:** U ouvert convexe, ] pb d'optimisation convexe

$$f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p : U \rightarrow \mathbb{R} \quad C'$$

$f, h_1, \dots, h_p$  convexes et  $g_1, \dots, g_m$  affines,  $g(x) = \langle u_i, x \rangle - c_i$

Soit  $\tilde{x} \in D = \{x \in U; g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, \forall i, j\}$  tq  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$  tq

$$\nabla f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\tilde{x})$$

$$\mu_j h_j(\tilde{x}) = 0, \forall 1 \leq j \leq p$$

Alors,  $f$  a un minimum global sous contraintes en  $\tilde{x}$ .

(i.e. pas besoin de vérifier si les contraintes sont qualifiées. Si le système KKT a une solution  $\Rightarrow$  alors on a un minimum global)

**DEM:**  $x \in D$

$$f(x) - f(\tilde{x}) = \langle \nabla f(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle \nabla g_i(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle + \sum_{j=1}^p \mu_j \langle \nabla h_j(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle$$

$$= \sum \lambda_i \langle u_i, x - \tilde{x} \rangle + \sum \mu_j \langle \nabla h_j(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle$$

$$= \sum \lambda_i (\langle u_i, x \rangle - \langle u_i, \tilde{x} \rangle) + \sum \mu_j \langle \nabla h_j(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle$$

$$f(x) - f(\tilde{x}) \geq \sum_{j=1}^p \mu_j \langle \nabla h_j(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle$$

$$\text{On sait que } \langle \nabla h_j(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle \leq h_j(x) - h_j(\tilde{x}) \geq \sum_{j=1}^p \mu_j (h_j(x) - h_j(\tilde{x}))$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)}_{\geq 0} - \underbrace{\sum_{j=1}^p \mu_j h_j(\tilde{x})}_{= 0} \geq 0$$

(utile s'il n'y a pas de contraintes d'égalité)

**THM [Slater]**

Soit  $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p : U \rightarrow \mathbb{R}$  un problème d'optimisation convexe.

On suppose que  $\exists \tilde{x} \in D = \{x \in U; g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0\}$  tq :

$$h_j(\tilde{x}) < 0, \forall 1 \leq j \leq p, 0 \in g(U), \text{ où } g : U \rightarrow \mathbb{R}^m = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

Alors, si  $f$  a un minimum  $\tilde{x}$  (global) sous contraintes,

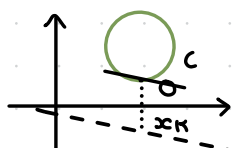
$$\exists \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}^p \text{ tq } f(\tilde{x}) = \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$$

**Lemme:** Soit  $C \in \mathbb{R}^n$  convexe tq  $0 \notin C$

Alors,  $\exists u \neq 0$  tq  $\langle u, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C$

$\uparrow$  peut être au bord

**DEMONSTRATION:**



Soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tq

$$i) x_k \rightarrow 0$$

$$ii) x_k \notin \bar{C} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

On pose  $F_k : x \in \bar{C} \mapsto \|x - x_k\|$

Comme  $F_k(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ ,  $F_k$  a un minimum global  $\tilde{x}_k$

Montrons maintenant que  $\langle x - \tilde{x}_k, \tilde{x}_k - x_k \rangle \geq 0, \forall x \in \tilde{E}$

Pour  $t \in [0, 1]$ ,  $x_t = \tilde{x}_k + t(x - \tilde{x}_k) \in \tilde{E}$

Donc  $\|x_t - x_k\| \geq \|\tilde{x}_k - x_k\|$

$$\sim \|x_t - x_k\|^2 + 2t \langle x - \tilde{x}_k, \tilde{x}_k - x_k \rangle + t^2 \|x - \tilde{x}_k\|^2 \geq \|\tilde{x}_k - x_k\|^2$$

$$\Rightarrow 2t \langle x - \tilde{x}_k, \tilde{x}_k - x_k \rangle \geq -t^2 \|x - \tilde{x}_k\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x - \tilde{x}_k, \tilde{x}_k - x_k \rangle \geq -\frac{t}{2} \|x - \tilde{x}_k\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

separer les 2 convexes

$$\mu_k = \tilde{x}_k - x_k$$

$$\leadsto \mu_k := \frac{\tilde{x}_k - x_k}{\|\tilde{x}_k - x_k\|}$$

$\|\mu_k\| = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ . donc par compacité de  $B(0, 1)$ ,  $\exists$  extraction tq  $\mu_{\varphi(k)} \rightarrow \mu$

et de plus,  $\|\mu\| = 1$ . donc  $\mu \neq 0$

reste à vérifier que ce  $\mu$  est fonctionnel.

$$\text{Soit } x \in \tilde{E} : \langle x, \mu_{\varphi(k)} \rangle = \langle x, \frac{\tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}}{\|\tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}\|} \rangle$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}\|} \langle x - \tilde{x}_{\varphi(k)}, \tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)} \rangle + \langle \tilde{x}_{\varphi(k)}, \tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)} \rangle$$

$$\begin{aligned} &\geq \langle \tilde{x}_{\varphi(k)}, \frac{\tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}}{\|\tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}\|} \rangle \geq \langle \tilde{x}_{\varphi(k)}, \mu_{\varphi(k)} \rangle \\ &= \langle \tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}, \mu_{\varphi(k)} \rangle + \langle \tilde{x}_{\varphi(k)}, \mu_{\varphi(k)} \rangle \\ &= \|\tilde{x}_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}\| + \langle x_{\varphi(k)}, \mu_{\varphi(k)} \rangle \\ &\geq \langle x_{\varphi(k)}, \mu_{\varphi(k)} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \langle x, \mu \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle x, \mu_{\varphi(k)} \rangle \geq 0$$

### DEMONSTRATION [ Slater ]

$$\tilde{f}: x \mapsto f(x) - f(\tilde{x})$$

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\tilde{C} = \{ (X, Y, Z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p; X \geq \tilde{f}(x), Y = g(x), Z \geq h(x) \text{ pour un } x \in U \}$$

$$i) \tilde{C} \text{ est convexe: } (X + t(X' - X), Y + t(Y' - Y), Z + t(Z' - Z))$$

$$* X + t(X' - X) = (1-t)X + tX' \geq (1-t)\tilde{f}(x) + t\tilde{f}(x') \geq \tilde{f}(x + t(x' - x)) \quad * Z \text{ comme } X$$

$$* Y + t(Y' - Y) = g(x) + t(g(x') - g(x)) = g(x + t(x' - x))$$

$$ii) 0 \notin \tilde{C}, 0 \in \tilde{C} \Rightarrow \exists x \in U \text{ tq } \tilde{f}(x) < 0, g(x) = 0$$

$$\Updownarrow h(x) \leq 0$$

$$f(x) < f(\tilde{x})$$

D'après le lemme,  $\exists \mu \neq 0$  tq  $\langle \mu, (X, Y, Z) \rangle \geq 0, \forall (X, Y, Z) \in \tilde{C}$ .

$$\mu \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_p \end{pmatrix}$$

$\forall x \in U:$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\tilde{f}(x) + 1/n, g(x), h(x)) \in \tilde{C}$$

$$\text{Donc } \langle \mu, (\tilde{f}(x) + 1/n, g(x), h(x)) \rangle \geq 0$$

$$\leadsto \langle \mu, (\tilde{f}(x), g(x), h(x)) \rangle \geq 0$$

$$\alpha \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^m \beta_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \delta_j h_j(x) \geq 0$$

$$\alpha \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^m \beta_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \delta_j h_j(x) \geq \alpha f(\tilde{x})$$

$$\leadsto \mathcal{L}(\alpha, \beta, \delta) \geq f(\tilde{x})$$

si il y a une valeur ds le dual plus grande que dans le pb primal, alors on a égalité

Supposons  $\alpha > 0, \delta_1, \dots, \delta_p > 0$

On pose  $\lambda_i = -\frac{\beta_i}{\alpha}, \mu_j = -\frac{\delta_j}{\alpha} \leq 0$

$$\underbrace{L(x, \lambda, \mu)}_{\inf = f^*(\lambda, \mu)} \geq f(x)$$

On a :  $f^*(\lambda, \mu) \geq f(x)$  donc  $f^*$  a un max global en  $\lambda, \mu$

$$f(x) - \underbrace{\sum \lambda_i g_i(x)}_{=0} + \sum \mu_j h_j(x) \geq f(x)$$

$$\Rightarrow - \underbrace{\sum \mu_j h_j(x)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ d'où } \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x) = 0$$

$$\text{Ainsi, } L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum \lambda_i g_i(x) - \sum \mu_j h_j(x) = f(x)$$

• Montrons que  $\alpha \geq 0$

si  $\alpha < 0, (\tilde{f}(x) + N, g(x), h(x)) ; N \in \mathbb{N}$

$$\text{on a } \underbrace{\alpha(\tilde{f}(x) + N)}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty} + \sum \beta_i g_i(x) + \sum \delta_j h_j(x) \geq 0 \text{ contradiction}$$

• De même,  $\delta_j \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p$

• Montrons que  $\alpha \neq 0$

Supposons  $\alpha = 0$ . Par hypothèse, on a  $\tilde{f}(x) + \eta g(x) = 0, h(x) < 0$

$$0 = \alpha f(x) \leq \alpha f(x) + \sum_{i=1}^m \beta_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \delta_j h_j(x) = \sum_{j=1}^p \delta_j h_j(x) \geq 0 < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^m \beta_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \delta_j h_j(x)$$

Donc si  $\alpha = 0, \delta_j = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq p$

Alors,  $\forall x \in U, \sum_{i=1}^m \beta_i g_i(x) \geq 0 = \langle \beta, g(x) \rangle$ , si  $\beta \neq 0$ :

$0 \in g(U)$ , donc  $\exists r > 0$  tq  $B(0, r) \subset g(U)$

Soit  $x$  tq  $g(x) = \frac{\beta}{\|\beta\|} \frac{r}{2} \in B(0, r)$ . Alors  $\langle \beta, g(x) \rangle = \frac{r}{2} \|\beta\| < 0$  contradiction

On a  $\beta = 0$  donc  $U = \emptyset$ , contradiction.

**PROP.** Pour un pb convexe, s'il existe  $\hat{x}$  tq  $h_j(\hat{x}) \leq 0, \forall 1 \leq j \leq p$  et  $g_i(\hat{x}) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$  alors les contraintes sont qualifiées en tout point.

**PROP.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  convexe,  $f: U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Alors  $f$  est convexe  $\Leftrightarrow H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in U$

De plus, si  $H_f(x)$  définie positive,  $f$  est strictement convexe

( $\Rightarrow$ )

( $\Leftarrow$ ) les valeurs propres doivent être positives

**DEM:**

( $\Leftarrow$ ) Soient  $x, y \in U$ , et  $t \in [0, 1]$

Posons  $g(t) = f(x + t(y-x))$ , bien définie car  $U$  convexe,  $\mathbb{R}^2$

$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(c)$  pour un certain  $c \in [0, 1]$

$g'(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle, g'' = H_f(x + t(y-x))(y-x), (y-x) \rangle \geq 0$

donc  $f(y) = g(1) \geq g(0) + g'(0) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$



## Optimisation quadratique

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i + c$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

Exemple : Pour  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_y: x \mapsto \|x - y\|^2$  (pb du moindre carré)

$$f_y(x) = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$A = I_n, b = -2y, c = \|y\|^2$$

PROP:  $\nabla f(x) = (A + A^t)x + b$ ,  $H_f(x) = A + A^t$

### DEMONSTRATION:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle A(x+h), x+h \rangle + \langle b, x+h \rangle + c \\ &= \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle + \langle b, x \rangle + \langle b, h \rangle + c \\ &= f(x) + \underbrace{\langle Ax + A^t x + b, h \rangle}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\langle Ah, h \rangle}_{\leq \|A\| \|h\|^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \underbrace{\langle A + A^t \rangle x + b}_{\text{linéaire}} \quad \underbrace{\langle Ah, h \rangle}_{O(\|h\|)}$$

$$\Rightarrow H_f(x) = A + A^t$$

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, A^t x \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^t)x, x \rangle \end{aligned}$$

On écrit  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$  avec  $A$  symétrique (+c ne change pas la valeur du minimum / le min)

$$\leadsto \nabla f(x) = Ax + b$$

$$H_f(x) = A$$

CORR  $f$  est convexe ssi  $A \succeq 0$

$f$  est concave ssi  $A \preceq 0$

Si  $A$  définie positive,  $f$  est strictement convexe.

CORR: Soit  $\tilde{x}$  tq  $A\tilde{x} + b = 0$

Si  $A \succ 0$ ,  $f$  a un minimum global en  $\tilde{x}$

Si  $A \preceq 0$ ,  $f$  \_\_\_\_\_ maximum \_\_\_\_\_

Sinon,  $f$  a un point selle en  $\tilde{x}$ .

PROP.  $A$  définie positive. (vp > 0, A inversible)

Alors  $f$  a un minimum global en  $\tilde{x} = -A^{-1}b$

$$\text{et } f(\tilde{x}) = c - \frac{1}{2} \langle b, A^{-1}b \rangle$$

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= \frac{1}{2} \langle A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle + \langle b, \tilde{x} \rangle + c = \frac{1}{2} \langle A(-A^{-1}b), -A^{-1}b \rangle + \langle b, -A^{-1}b \rangle + c \\ &= \frac{1}{2} \langle b, A^{-1}b \rangle - \langle b, A^{-1}b \rangle + c = c - \frac{1}{2} \langle b, A^{-1}b \rangle \end{aligned}$$