

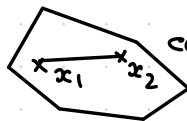
Exo 1:

1) Soient x_1, x_2 deux solutions réalisables. Écrire les inégalités qu'elles vérifient

* L'ensemble des solutions réalisables $P = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b; x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$



non convexe



convexe

$x_1, x_2 \in P$, mq tous les points du segment $[x_1, x_2]$ appartiennent à P , autrement dit que P est convexe.

• $x_i \in P$ alors $Ax_i \leq b$ et $x_i \geq 0$ pour $i \in \{1, 2\}$

2) Soit $\alpha \in [0, 1]$. Mq $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ vérifie $Ax \leq b$

Comme x_1, x_2 sont des solutions réalisables, $Ax_1 \leq b$ et $Ax_2 \leq b$

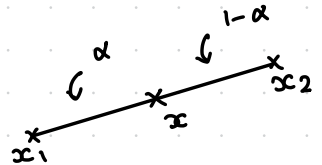
$$Ax_1 \leq b \Rightarrow \alpha Ax_1 \leq \alpha b$$

 $\alpha \geq 0$

$$Ax_2 \leq b \Rightarrow (1 - \alpha)x_2 \leq (1 - \alpha)b$$

 $1 - \alpha \geq 0$

$$\Rightarrow \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 \leq \alpha b + (1 - \alpha)b = b$$

donc $Ax \leq b$ 

3) Montrer que $x \geq 0$

$$x = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} x_1 + \underbrace{(1 - \alpha)}_{\geq 0} x_2$$

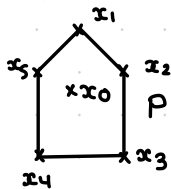
donc $x \geq 0$

CCL: On peut conclure que P est un polyèdre convexe

Exo 2:

On suppose $(x_i)_{i \leq p}$ les sommets de P et x_0 une solution réalisable, i.e. $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in P$

1) Supposons que x_0 n'est pas un sommet. Réécrire x_0 en fonction des sommets de P



On peut écrire x_0 comme CL des sommets

$$\text{i.e. } \exists (\lambda_i)_{i=1}^p \text{ tq } x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \forall i, \lambda_i \geq 0$$

et puisque x_0 n'est pas sommet, $\forall i, \lambda_i < 1$

2) $f(x_m) = \max \{f(x_1), \dots, f(x_p)\}$, mq $f(x_m) \geq f(x_0)$

Par linéarité de f , on a $f(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$

Ainsi, puisque $\forall i \in \{1, p\} f(x_m) \geq f(x_i)$ alors

$$\sum \lambda_i f(x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_m) \leq f(x_m)$$

donc $f(x_0) \leq f(x_m)$ ($\sum \lambda_i = 1$)

3) En déduire que la fonction objectif atteint son maximum sur au moins un sommet de P
 Par définition de x_m , l'un des sommets renvoie le maximum de f i.e. l'un des sommets est optimal.
 Ainsi si x_0 renvoie le max, l'un des sommets le renvoie aussi.

4) Supposons que le max de f sur P soit atteint pour plusieurs sommets $x_1, \dots, x_q$.
 Montrer que toute combinaison convexe de ces sommets est également optimale.

Supposons que $f(x_m) = \max_{x \in P} f(x) = f(x_j) ; x_j \leq q$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ des scalaires de $[0, 1]$ tq $\sum_{i=1}^q \alpha_i = 1$

Poseons $\tilde{x} = \sum_{i=1}^q x_i \alpha_i$

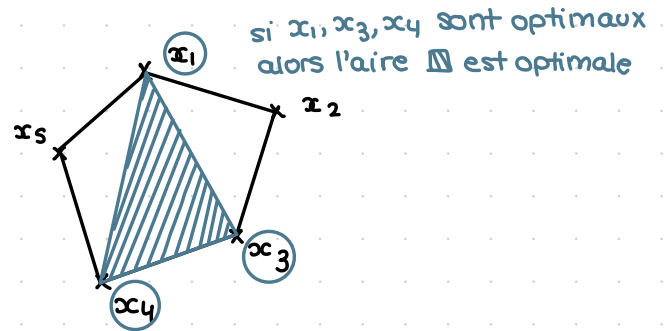
On a $f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^q f(x_i) \alpha_i$, par linéarité de f

Or $f(x_i) = f(x_m)$ pour $i \in [1, q]$

D'où $f(\tilde{x}) = f(x_m) \sum_{i=1}^q \alpha_i$

En fin, $f(\tilde{x}) = f(x_m) \underbrace{\sum_{i=1}^q \alpha_i}_{=1}$

Donc $\tilde{x}$ est une solution optimale



(bijection sommets + colonnes de la matrice des contraintes)

Exo 3:

$Ax = \sum_{j=1}^n x_j A^j ; A^1, \dots, A^n$ les colonnes de A

P polyèdre

Partie A:

Supposons $\exists v_1, \dots, v_k$ et $A^{v_1}, \dots, A^{v_k}$ soient linéairement indépendantes
 $b = \sum_{i=1}^k x_{v_i} A^{v_i} ; x_{v_i} \geq 0$ (les autres composantes de x étant nulles)

1) Donner les coordonnées de x dans ce cas

$x_i = \begin{cases} x_{v_j} & \text{si } i = v_j \text{ pour } j \in [1, k] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Rq: $[x \geq 0 \text{ et } Ax = \sum_{i=1}^n x_i A^i = \sum_{i=1}^k x_{v_i} A^{v_i} = b]$

2) On suppose que x n'est pas un sommet

Écrire x comme CL de deux points distincts y et z de P

x n'est pas un sommet de P mais appartient à P

donc $\exists y, z$ deux points de P distincts + $\exists \alpha \in]0, 1[, x = \alpha y + (1 - \alpha)z$

3) b en fonction de A^j et y puis z

On remplace x par son équation $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$

d'où $b = Ax = \alpha Ay + (1 - \alpha)Az$

linéarité

or $y, z \in P$ donc $Ay \leq b, Az \leq b$

Puisque $\alpha, 1 - \alpha \in]0, 1[$ on a nécessairement $Ay = Az = b$

On a $\forall i \neq v_j, y_i = 0$ et $z_i = 0$

On a donc

$$Ay = \sum_{i=1}^k y_{v_i} A^{v_i} = b = \sum_{i=1}^k z_{v_i} A^{v_i}$$

4) Que peut-on en déduire sur y, z et x ?

Les $(A^{v_i})_i$ sont indépendants

donc $\forall i, y_{v_i} = z_{v_i}$

Autrement dit $y = z \leftarrow$ contradiction

c.à.d. x est un sommet de P

Partie B:

x sommet de P .

On suppose que les K premières composantes de x sont strictement positives et que les autres sont nulles.

c.à.d. $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_K > 0, x_{K+1} = \dots = x_n = 0$

On veut mq

1) Supposons $A^1, \dots, A^K$ sont linéairement dépendantes.

Mq $\exists d \in \mathbb{R}^n$ non-nul tq $Ad = 0, d_j = 0 \forall j \in \{K+1, \dots, n\}$

Supposons x un sommet de P et $\forall i \leq K, x_i > 0$

$i > K, x_i = 0$

Si $A^1, \dots, A^K$ sont dépendantes, $\exists$ une CL nulle

i.e. $\exists (\lambda) \neq 0_K$ tq $\sum_{i=1}^K \lambda_i A^i = 0$

On définit alors $d = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, 0, \dots, 0) \neq 0_K$

et on vérifie $Ad = \sum_{i=1}^K \lambda_i A^i + \sum_{i=K+1}^n 0_i A^i$

$$= 0$$

2) Mq $\exists \varepsilon > 0$ tq $x^+ = x + \varepsilon d$ et $x^- = x - \varepsilon d \in P$

Posons $x^+ = x + \varepsilon d$ et $x^- = x - \varepsilon d$ avec $\varepsilon > 0$, mq $Ax^+ \leq b$ et $x^+ \geq 0$

$$Ax^+ = Ax + \underbrace{\varepsilon Ad}_{=0} = Ax \leq b$$

$$x^+ \geq 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_K, 0, \dots, 0) + (\varepsilon \lambda_1, \varepsilon \lambda_2, \dots, \varepsilon \lambda_K, 0, \dots, 0) \geq 0$$

pas de problème

$$\Leftrightarrow \forall i \leq K, x_i + \varepsilon \lambda_i \geq 0 \text{ avec } x_i > 0, \lambda_i \geq 0$$

1^{ère} cas: $\lambda_i = 0 \leadsto$ c'est bon

2^{ème} cas: $\lambda_i > 0, x_i + \varepsilon \lambda_i > 0 \leadsto ok$

donc $x^+ \in P$

de $\bar{m}$, $Ax^- \leq b$

$$x^- \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \leq K, x_i - \varepsilon \lambda_i \geq 0$$

1^{ère} cas: $\lambda_i = 0 \leadsto ok$

2^{ème} cas: $\lambda_i > 0 \leadsto$ on définit $\varepsilon \leq \frac{x_i}{\lambda_i}$

En posant $\varepsilon = \min_{\substack{i \text{ avec} \\ \lambda_i > 0}} \left(\frac{x_i}{\lambda_i} \right)$, on a bien x^+ et $x^- \in P$.

3) En déduire que x peut s'écrire comme cc non-triviale de x^+ et x^- et mq $A^1, \dots, A^K$ linéairement indep

a) programme linéaire correspondant:

contraintes:

but: maximiser $1700x_1 + 3200x_2$

Ici le sommet optimal a pour coordonnées $(13.71, 9.86)$

2) a)

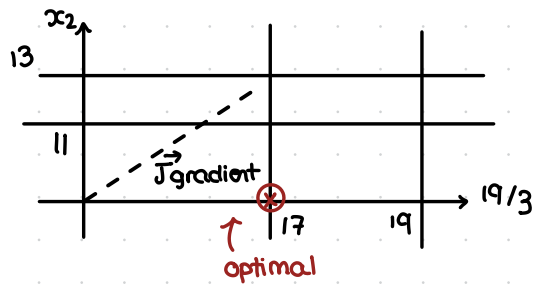
$$(8) + 2(9) \Rightarrow 3x_1 + 3x_2 \leq 70 + (6) \leadsto \text{plus restrictif que (4)}$$

Finalement, on a les contraintes

$$\begin{cases} \forall i, x_i \geq 0 \\ x_1 \leq 17 \\ x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 36 \end{cases}$$

On cherche à maximiser $1700x_1 + 3200x_2$

On trouve l'optimal à $(17, 19/3)$



Exercice 2:

prod brut	orge	arachides	sésame	%. requis
% protéines	12%	52%	42%	22%
% de graisse	2%	2%	10%	3.6%
coût / tonne	25	41	39	

1) modélisation (les x_i sont les fractions de tonne de prod brut_j)

contraintes:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ \forall i, x_i \geq 0 & (2) \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 & (3) \\ 20x_1 + 20x_2 + 100x_3 \geq 36 & (4) \end{cases}$$

simplification:

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 6x_1 + 26x_2 + 21x_3 \geq 11 \\ (4) &\Leftrightarrow 5x_1 + 5x_2 + 25x_3 \geq 9 \end{aligned}$$

but: minimiser $25x_1 + 41x_2 + 39x_3$

2) réduction de la taille du problème

(1) $\Leftrightarrow x_3 = 1 - x_2 - x_1$

donc

(1) + (3) $\Rightarrow -30x_1 + 10x_2 \geq -20$

(1) + (4) $\Rightarrow -80x_1 - 80x_2 \geq -64$

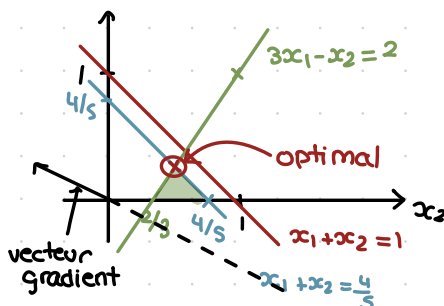
$\Leftrightarrow 5x_1 + 5x_2 \leq 4$

D'où le problème réduit :

$$\begin{cases} x_j \geq 0 \quad \forall j \\ 30x_1 - 10x_2 \leq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 4 \end{cases}$$

but: minimiser $f(x_1, x_2) = 39 - 14x_1 + 2x_2$

3) résoudre graphiquement



on revient à notre problème initial, l'optimal est atteint pour

$(x_1, x_2, x_3) = (0.7, 0.1, 0.2)$

Exercice 3:

A_1 : 35 o/h

A_2 : 45 o/h

A_3 : 20 o/h

machine: 200 h/mois

bénéfices: A_1 : 60€/o

A_2 : 40€/o

A_3 : 80€/o

max: 4900 /mois A_1

5400 / mois A_2

2000 / mois A_3

vérification: 3 techniciens, 170 h /mois

A_1 : 4 min A_3 : 2 min

A_2 : 3 min

1) prog linéaire

but: maximiser $60x_1 + 40x_2 + 80x_3$

contraintes:

$$\forall i, x_i \geq 0$$

$$x_1 \leq 4900$$

$$x_2 \leq 5400$$

$$x_3 \leq 2000$$

$$\frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{45} + \frac{x_3}{20} \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30600$$

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

x 5

x 7

x 9

x 4

1260

→ redondantes

2) contrainte redondante + interprétation géométrique

$$(5) \Leftrightarrow 36x_1 + 28x_2 + 63x_3 \leq 252000$$

$$(6) \times 9 \Leftrightarrow 36x_1 + 27x_2 + 18x_3 \leq 275400$$

(5) + (1) est plus restrictif que (6), i.e. (6) est redondant avec les contraintes (5) et (1).

Feuille 1, Exo 4

contraintes: $\begin{cases} x_1 \leq 17 \\ x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$

but: minimiser $1700x_1 + 3200x_2$

(rappel: l'optimal a été trouvé graphiquement et vaut $(x_1, x_2) = (17, 19/3)$)

Résolution à l'aide du simplexe

Sous forme de tableau, le problème s'écrit avec les variables d'écart ainsi:

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 17 \\ x_2 + x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 36 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$ but: minimiser $1700x_1 + 3200x_2$

On peut l'écrire sous forme de tableau

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
C_B	C_x	1700	3200	0	0	0	0
0	x_3	1	0	1	0	0	17
0	x_4	0	1	0	1	0	11
0	x_5	1	3	0	0	1	36
C_B	Δ	1700	0	0	-3200	0	-35200
0	x_3	1	0	1	0	0	17
3200	x_2	0	1	0	1	0	11
0	x_5	1	0	0	-3	1	3
C_B	Δ	0	0	0	1900	-1700	-40300
0	x_3	0	0	1	3	-1	14
3200	x_2	0	1	0	1	0	11
1700	x_1	1	0	0	-3	1	3
C_B	Δ	0	0	-1900/3	0	-3200/3	-147500/3
1900	x_4	0	0	1/3	1	-1/3	14/3
3200	x_2	0	1	-1/3	0	1/3	19/3
1700	x_1	1	0	1	0	0	17

$L_0 \leftarrow L_0 - 3200L_2$
 $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$
 $L_2 \leftarrow L_2$
 $L_3 \leftarrow L_3$
 $L_0 \leftarrow L_0 - 1700L_3$
 $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
 $L_2 \leftarrow L_2$
 $L_3 \leftarrow L_3$
 $L_0 \leftarrow L_0 - L_1 \cdot \frac{1900}{3}$
 $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$
 $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

L'optimal est atteint pour $(x_1, x_2) = (17, 19/3)$ pour un gain de: $\frac{147500}{3} \approx 4900$

Feuille 2, exo 1:

$\max z = 50x_1 + 60x_2$
 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

On introduit les variables d'écart:

$\max z = 50x_1 + 60x_2$
 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$

→ On dresse le tableau pour appliquer méthode du simplexe:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Δ	50	30	0	0	0	0	L_0
x_3	1	2	1	0	0	0	L_1
x_4	1	1	0	1	0	5	L_2
x_5	9	4	0	0	1	36	L
Δ	20	0	-30	0	0	-240	
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	0	4	
x_4	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	1	
x_5	7	0	-2	0	1	20	
Δ	0	0	-10	-40	0	-280	
x_2	0	1	1	-1	0	3	
x_1	1	0	-1	2	0	2	
x_5	0	0	5	-14	1	6	

L'optimal est atteint pour $(x_1, x_2) = (2, 3)$ et un max de 280.

Exo2: _____

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_5$$

$$s.c.: 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 \leq 1$$

prog linéaire:
$$\begin{cases} \max Z = -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1) écrire sous forme standard

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2) Pq $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow$ pas de sol de base réalisable

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on aurait $x_4 = -2$

$$x_5 = -6$$

$$x_6 = 3$$

Ce qui contredit les contraintes de positivité sur x_4 et x_5

3) Ajouter les variables x_7 et x_8 au système

Le programme devient:

$$\begin{cases} \max Z = -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \min y = x_7 + x_8 \\ \text{contraintes:} \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_8 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min y = x_7 + x_8 \Leftrightarrow \max -x_7 - x_8$$

$$\Leftrightarrow \max 3x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 - 8$$

4) écrire le programme linéaire pour la première phase

5) Compléter le tableau pour la première phase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_B
Δ_{II}	-6	5	6	0	0	0	0	0	
Δ_I	3	0	2	-1	-1	0	0	0	8
x_7	1	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_8	2	-1	1	0	-1	0	0	1	6
x_6	-1	1	2	0	0	1	0	0	3
Δ_{II}	0	11	12	-6	0	0	6	0	12
Δ_I	0	-3	-1	2	-1	0	-3	0	2
x_1	1	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_8	0	-3	-1	2	-1	0	-2	1	2
x_6	0	2	3	-1	0	1	1	0	9
Δ_{II}	0	2	9	0	-3	0	0	3	18
Δ_I	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	0	-1/2	3
x_4	0	-3/2	-1/2	1	-1/2	0	-1	1/2	1
x_6	0	1/2	5/2	0	-1/2	1	0	1/2	6

6) Donner la solution de base réalisable

On a pour solution de base réalisable $(x_1, x_4, x_5) = (3, 1, 6)$.

On débute le simplexe phase II sur le tableau sans la ligne Δ_I et les colonnes x_7 et x_8

7)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
Δ_{II}	0	2	9	0	-3	0	18
x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	3
x_4	0	-3/2	-1/2	1	-1/2	0	1
x_6	0	1/2	5/2	0	1/2	1	6
Δ_{II}	0	1/5	0	0	-4/5	-18/5	-18/5
x_1	1	-3/5	0	0	-2/5	9/5	9/5
x_4	0	-7/5	0	1	-3/5	11/5	11/5
x_3	0	1/5	1	0	-1/5	2/5	12/5
Δ_{II}	0	0	-1	0	-1	-4	-6
x_1	1	0	3	0	-1	1	9
x_4	0	0	7	1	-2	3	19
x_2	0	1	5	0	-1	2	12

6

11/5

$$\Delta_{II} - \frac{18}{5}L_3$$

$$L_1 = L_1 - \frac{1}{5}L_3$$

$$L_2 + \frac{1}{5}L_3$$

$$L_3 = \frac{2}{5}L_3$$

$$\Delta_{II} - L_3$$

$$L_1 + 3L_3$$

$$L_2 + 7L_3$$

$$5L_3$$

8) donner la solution optimale.

Nous avons le maximum valant 6 atteint pour $(x_1, x_2, x_3) = (9, 12, 0)$

Exo 2: _____

Résoudre avec la méthode du simplexe en deux phases.

$$\begin{cases} \max z = -8x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 = 12 \\ \quad \quad x_3 + x_4 = 8 \\ \quad \quad x_1 + x_3 = 6 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

→ puisque $(0, 0, 0, 0)$ n'est pas une solution de base réalisable, on ajoute des variables artificielles et nous effectuons un simplexe en deux phases.

Notre problème "artificialisé"

$$\begin{cases} \max z = -8x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ \max -x_5 - x_6 - x_7 \\ \text{contraintes:} \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ \quad \quad x_3 + x_4 + x_6 = 8 \\ \quad \quad x_1 + x_3 + x_7 = 6 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \max -x_5 - x_6 - x_7 \Leftrightarrow \max 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 26$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Δ_I	-8	-6	-3	-5	0	0	0	0
Δ_{II}	2	1	2	1	0	0	0	26
x_5	1	1	0	0	1	0	0	12
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_7	1	0	1	0	0	0	1	6
Δ_{II}	0	-6	5	-5	0	0	8	48
Δ_I	0	1	0	1	0	0	-2	14
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Δ_I	0	0	-1	-5	6	0	2	84
Δ_{II}	0	0	1	1	-1	0	-1	8
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_7	1	0	1	0	0	0	1	6
Δ_{II}	0	0	4	0	6	5	2	126
Δ_I	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6

On a une solution réalisable $(x_1, x_2, x_4) = (6, 6, 8)$

→ on continue avec la phase 2 du simplexe

On a une solution réalisable $(x_1, x_2, x_4) = (6, 6, 8)$.
On continue avec la phase 2 du simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Δ_1	0	0	4	0	124
x_2	0	1	-1	0	6
x_4	0	0	1	1	8 $\rightarrow 8/1$
x_1	1	0	1	0	6 $\rightarrow 6/1$
Δ_1	-4	0	0	0	100
x_2	1	1	0	0	12
x_4	-1	0	0	1	2
x_3	1	0	1	0	6

On obtient pour solution optimale $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 12, 6, 2)$