

* $\mathcal{E}(\lambda)$: $\lambda > 0$, densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$
 $\mathbb{E} : 1/\lambda, V : 1/\lambda^2$

* Gamma(a, λ) ; $a > 0 ; \lambda > 0$, densité $x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$

$$\text{où } \Gamma(a) = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-u} du \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*, \Gamma(k) = (k-1)!)$$

prop: $X_1 \sim \text{Gamma}(a_1, \lambda)$
 $X_2 \sim \text{Gamma}(a_2, \lambda)$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}(a_1 + a_2, \lambda) \\ \text{si } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1, \dots, X_n; X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \\ X_1 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \\ (X_i \perp\!\!\!\perp X_j \forall i \neq j) \end{array}$

* Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$; $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$

* Loi du chi-deux $\chi^2(k)$; $k \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté, densité $\frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$
 $\mathbb{E} : k, V : 2k$

Prop: La loi χ^2 est la loi de la somme des carrés de k lois normales centrées réduites indépendantes (**)

Ex. 1.

$X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \sim \text{Unif}([0, 1])$

$$U_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

Loi de $Z_1 = -\ln(X_1)$? de $Z_n = -\ln U_n$?

1) Fonction de répartition: $F_{Z_1}(t) = \mathbb{P}(Z_1 \leq t)$
 $= \mathbb{P}(-\ln(X_1) \leq t)$
 $= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-t})$
 $= 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-t})$
 $= 1 - e^{-t}$

$f_{Z_1}(t) = F'_{Z_1}(t) = e^{-t} \leftarrow$ densité de la loi Exponentielle, $\lambda = 1$

$$Z_1 \sim \mathcal{E}(1)$$

2) $Z_n = -\ln(U_n) = -\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$
 $= -\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right)$
 or $\ln(X_i) \sim \mathcal{E}(1)$ et les X_i i.i.d.
 Donc $Z_n \sim \text{Gamma}(n, 1)$

$\uparrow$ La somme de n v.a. $\sim \exp(\lambda)$ indep suit une loi $\text{Gamma}(n, \lambda)$ (*)

Exo2:

$X_1, \dots, X_n$ échantillon i.i.d. densité $f(x) = 2x \exp(-x^2) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

1) Loi de X_1^2 ?

Méthode fonction muette:

Soit h une fonction continue bornée.

$$\mathbb{E}[h(X_1^2)] = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) f_{X_1}(x) dx = \int_0^{\infty} h(x^2) 2x e^{-x^2} dx \stackrel{\substack{d\mu = 2x dx \\ \mu = x^2}}{=} \int_0^{\infty} h(\mu) e^{-\mu} d\mu$$

X_1^2 a pour densité $f_{X_1^2}(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Donc $X_1^2 \sim \mathcal{E}(1)$

2) Loi de V_n

Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Donc $V_n = \frac{1}{n} S_n$ où $S_n \sim \text{Gamma}(n, 1)$ (*)

$\hookrightarrow (X_i \text{ i.i.d} \Rightarrow X_i^2 \text{ aussi puisque } x \mapsto x^2 \text{ mesurable})$

Soit h fct mesurable bornée

$$\mathbb{E}[h(V_n)] = \mathbb{E}\left[h\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} h\left(\frac{s}{n}\right) \frac{1}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-s} ds \stackrel{\substack{V = s/n \\ \Leftrightarrow s = nv \Rightarrow ds = ndv}}{=} \int_0^{+\infty} h(v) \frac{1}{\Gamma(n)} (nv)^{n-1} e^{-nv} ndv$$

$$= \int_0^{+\infty} h(v) \frac{n^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} e^{-nv} dv$$

On reconnaît la densité d'une loi $\text{Gamma}(n, n)$

Donc $V_n \sim \text{Gamma}(n, n)$

3) Étudier la convergence en probas de V_n et $1/V_n$

$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est la moyenne empirique de n v.a. i.i.d.

Comme ces v.a. sont intégrables ($\mathbb{E}(X_i^2) = 1 < +\infty$), la loi forte des grands nombres assure que:

$$V_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X_1^2) = 1$$

La cv p.s. implique la cv $\mathbb{P}(\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|V_n - 1| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$

Considérons $g: x \mapsto 1/x$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le lemme de l'application continue (continuous Mapping Theorem)

$$\text{Alors: } g(V_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(1) \Leftrightarrow \frac{1}{V_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$$

Exo 3:

n -échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ n. v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; m supposé connu, $\sigma^2 > 0$ inconnu

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

1) Pourquoi V_n^2 est un estimateur?

V_n^2 est un estimateur de σ^2 si:

- $V_n = \phi(X_1, \dots, X_n)$ où ϕ est mesurable
- ne dépend pas de σ^2
- utilise seulement des quantités connues

2) Loi de V_n^2 + biais + risque quadratique

On sait que $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Posons $Z_i = \frac{X_i - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma Z_i)^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \Leftrightarrow \frac{n}{\sigma^2} V_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

or, la somme des carrés de n v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ suit une loi $\chi^2(n)$ (**)

$$\frac{n}{\sigma^2} V_n^2 \sim \chi^2(n)$$

• Sans-biais:

$$\text{Calculons l'espérance de } V_n^2 \quad \mathbb{E}(V_n^2) = \mathbb{E}\left(\frac{\sigma^2}{n} Y\right) = \frac{\sigma^2}{n} \mathbb{E}(Y) = \sigma^2 \quad \left(\text{où } Y = \frac{n}{\sigma^2} V_n^2 \sim \chi^2(n)\right)$$

Le biais de l'estimateur est défini par $B(V_n^2, \sigma^2) = \mathbb{E}[V_n^2] - \sigma^2 = 0$

Donc l'estimateur est sans biais

• Risque quadratique:

$$\begin{aligned}\text{Il est défini par } R(V_n^2, \sigma^2) &= \text{Var}(V_n^2) + B(V_n^2, \sigma^2) \\ &= \text{Var}(V_n^2) \\ &= \text{Var}\left(\frac{\sigma^2}{n} Y\right) = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 \text{Var}(Y)\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{n}$$

3) Mq V_n^2 est un estimateur consistant

Méthode 1 [canonique]

$$R(V_n^2, \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{cours : } V_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$$

Méthode 2: (LGN forte)

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i ; \quad \omega_i = (X_i - n)^2$$

Les ω_i sont iid intégrables donc $V_n^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(V_1) = \mathbb{E}[(X_1 - n)^2] = \sigma^2$

$$\text{Donc } V_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$$

Donc V_n^2 est un estimateur consistant.

Exo 4:

$(X_n; n \geq 0)$ iid $\sim \text{Unif}([0,1])$ $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$

$$1) \text{ Mq } M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|1 - M_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ ?})$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 - M_n \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(M_n \leq 1 - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq 1 - \varepsilon\}\right) \\ &\stackrel{X_i \text{ i.i.d.}}{=} [\mathbb{P}(X_1 \leq 1 - \varepsilon)]^n = (1 - \varepsilon)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\end{aligned}$$

Exo 1:

 $(X_1, \dots, X_n)$ n -échantillons $\sim \mathcal{U}^{\otimes n}[0, \theta]; \theta > 0$ [Rappel: si $U \sim \mathcal{U}[a, b]$ alors $\mathbb{E}[U] = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{E}[U^2] = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$ et $\text{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$](Méthode:) $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{U}^{\otimes n}[0, \theta]$ i.i.d.
↑ on veut estimer1) Exprimer $\theta = f(\mathbb{E}[X_1^n])$ 2) Remplacer le moment théorique $(\mathbb{E}[X^n])$ par moment empirique $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^n)$ ↳ satisfaction LFGV $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X^n])$ 1) Déterminer l'estimateur des moments du param θ

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\mathbb{E}[X_1]$$

$$\text{M.M.} \hookrightarrow \hat{\theta}_M = 2\bar{X}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2) Estimateur du maximum de vraisemblance de θ

Méthode:

1. Chercher θ de façon à maximiser $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x_2) \dots \mathbb{P}(X_n=x_n)$$

$$\hookrightarrow \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

La densité d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$: $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq \theta\}}$ La fonction de vraisemblance: $\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{x_i \in [0, \theta]\}}$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{x_i \in [0, \theta]\}}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{0 \leq \max(x_1, \dots, x_n) \leq \theta\}}$$

On remarque que $\mathcal{L}(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n)$. De plus, $\theta \mapsto \frac{1}{\theta^n} \searrow$.Donc $\hat{\theta}_{MV} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}(\theta) = \max(x_1, \dots, x_n)$

3) Comparer les risques des deux estimateurs

$$\bullet \hat{\theta}_M = 2\bar{X}_n$$

Biais: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_M] = 2\mathbb{E}[\bar{X}_n] = 2\mathbb{E}[X_1] = \theta$

$$B(\hat{\theta}_M, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_M] - \theta = 0$$

Risque quadratique: $R(\hat{\theta}_M, \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}_M) + B(\hat{\theta}_M, \theta)$

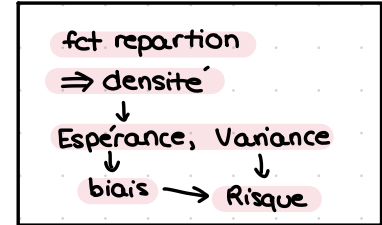
$$= \text{Var}(\hat{\theta}_M)$$

$$= 4\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{4}{n} \text{Var}(X_1) = \frac{\theta^2}{3n}$$

• $\hat{\theta}_{MV}$

Fonction repartition: $F(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$

$$\hat{\theta}_{MV} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{x \in [0, \theta]}$$



$\hookrightarrow$ Densité de proba: $f_{\hat{\theta}_{MV}}(x) = \frac{F'(x)}{\hat{\theta}_{MV}} = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{x \in [0, \theta]}$

$\hookrightarrow$ Espérance: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n\theta}{n+1}$

$\hookrightarrow$ Biais: $B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \theta = \frac{-\theta}{n+1}$

Variance: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n\theta^2}{n+2}$

donc $\text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] - (\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}])^2$

$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

Risque quadratique: $R(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

$\leftarrow$ bien qu'il soit biaisé, le risque converge plus rapidement que $\hat{\theta}_M$

Exo2:

X v.a. $\sim$ Géo(p); $p \in]0, 1[$ i.e. $\forall x \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1}$
 $(X_1, \dots, X_n)$ n -échantillon $\stackrel{\text{d}}{=} X$. $\mathbb{E}[X] = 1/p$.

1) Estimateur des moments du param p

$$\mathbb{E}[X] = 1/p \Leftrightarrow p = 1/\mathbb{E}[X]$$

donc $\hat{p}_M = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$

2) Estimateur du maximum de vraisemblance de p

On cherche à maximiser $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$

$$L(p) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{x_i-1} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}$$

Pour maximiser $L(p)$, on maximise $\ell(p) = \ln(L(p))$

$$\ell(p) = n \ln(p) + \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\right) \ln(1-p)$$

On dérive $\ell(p)$: $\ell'(p) = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{1-p}$

En posant $\ell'(p) = 0$

$$\frac{n}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{1-p} \Leftrightarrow n(1-p) = p \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \right)$$

$$\Leftrightarrow n = p \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} \Leftrightarrow \hat{p}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

On vérifie que $\hat{p}_{MV}$ est un maximum global:

$$\ell''(p) = -\frac{n}{p^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{(1-p)^2}$$

$$\bullet -\frac{n}{p^2} < 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$$

• Le support d'une loi géométrique est $\mathbb{N}^*$. Donc $\forall i, X_i \geq 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \geq \sum_{i=1}^n 1 = n \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i - n \geq 0$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{(1-p)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{(1-p)^2} \leq 0.$$

On en déduit que $\ell''(p) < 0$ et donc ℓ concave

- $\hat{p}_{MV}$ est un max global

3) Mq consistant

$$\hat{p}_M = \hat{p}_{MV}$$

$$\text{Par LGN, } \bar{X}_n = \frac{1}{p} > 0$$

lemme de l'application continue

On applique LAC à $x \mapsto 1/x$ en $1/p$.

On obtient

$$\hat{p}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{LAC}} \frac{1}{1/p} = p$$

Exo3:

$(X_1, \dots, X_n)$ n-échantillon $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1) Estimateur du maximum de vraisemblance de (μ, σ^2)

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right)$$

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

• dérivée selon μ

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(X_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i - \mu$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$= \bar{X}_n =: \hat{\mu}$$

• dérivée selon σ^2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} &= \frac{-n}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \left(\frac{-1}{2(\sigma^2)^2} \right) \\ &= \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2}\end{aligned}$$

On cherche à annuler $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2}$ en $\hat{\mu}$, c.à.d. $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} \Big|_{\hat{\mu} = \bar{x}_n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (x_i - \hat{\mu})^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 = \hat{\sigma}^2$$

Les équations n'admettent qu'une unique solution $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (\bar{x}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2)$

On veut vérifier que $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ est le max global. On calcule le Hessien $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$

[..]

$$H(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} \Big|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \Big|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)} \\ \text{"} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} \Big|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{-n}{(2\hat{\sigma}^2)^2} \end{pmatrix}$$

CCL: La matrice Hessienne est définie positive en $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$. Le pt est un max local. Par unicité, il est global.

Exol: _____

Soit un n - échantillon $X_1, \dots, X_n$ de densité $f(x) = \exp(\theta - x) \mathbb{1}_{[\theta, \infty[}(x)$.1) Vérifier que f définit une densité, $\mathbb{P}(X_1 \leq x)$, $\mathbb{E}[X_1]$, $\text{Var}(X_1)$ • f densité: $f \geq 0$; $\exp \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} \exp(\theta - x) dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{+\infty} \exp(-x) dx$$

$$= e^{\theta} [-e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} = e^{\theta}(0 + e^{-\theta})$$

$$= 1$$

• $\mathbb{P}(X_1 \leq x)$:si $x < \theta$, $\mathbb{P}(X_1 \leq x) = 0$ car le support de f est $[\theta, +\infty[$

$$\text{si } \theta \leq x:$$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{\theta}^x \exp(\theta - t) dt = e^{\theta} \int_{\theta}^x e^{-t} dt = e^{\theta} (-e^{-x} + e^{-\theta})$$

$$= 1 - \exp(\theta - x)$$

$$\text{Donc, } \mathbb{P}(X_1 \leq x) = (1 - \exp(\theta - x)) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x)$$

$$\bullet \text{ } \underline{\mathbb{E}[X_1]}: \int_{\theta}^{+\infty} x e^{(\theta - x)} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} e^{\theta} \left([-x e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} e^{-x} dx \right)$$

$$= e^{\theta} \left(0 + \theta e^{-\theta} + [-e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} \right)$$

$$= e^{\theta} (0 + \theta e^{-\theta} + e^{-\theta}) = \theta + 1$$

• $\text{Var}(X_1)$:* calculons l'espérance de X_1^2

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \exp(\theta - x) dx = e^{\theta} \left([-x^2 e^{-x}]_{\theta}^{+\infty} + 2 \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-x} dx \right)$$

$$= e^{\theta} (\theta^2 e^{-\theta}) + 2(\theta + 1)$$

$$= \theta^2 + 2\theta + 2$$

$$\text{donc } \text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}^2[X_1] = 1$$

2) Donner l'estimateur des moments de θ ($\hat{\theta}$) + biais + varianceModèle de rédaction:On a vu dans la question précédente que $\mathbb{E}[X_1] = \theta + 1$ La méthode des moments consiste à exprimer le paramètre d'intérêt θ en fonction du moment théorique $\mathbb{E}[X_1]$

$$\theta = \mathbb{E}[X_1] - 1$$

On remplace le moment théorique par son homologue empirique $\bar{X}_n$ pour obtenir l'estimateur des moments $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \bar{X}_n - 1$$

* biens + risque:

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta = \mathbb{E}[X_1] - 1 - \theta = \theta + 1 - 1 - \theta = 0$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\bar{X}_n - 1) = \text{Var}(\bar{X}_n)$$

$$= \frac{n}{n^2} \text{Var}(X_1) = 1/n$$

$$\text{donc } \mathcal{R}(\hat{\theta}, \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \mathcal{B}^2(\hat{\theta}, \theta) = 1/n$$

3) a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ($\hat{\theta}_{MV}$)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^n \exp(\theta - x_i) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x_i)$$

$\rightarrow$ si l'un des $x_i \notin [\theta, +\infty[$, le produit = 0, donc il faut que tous les $x_i \in [\theta, +\infty[$, soit $\min x_i \in [\theta, +\infty[$

$$= \exp\left(n\theta - \sum_{i=1}^n x_i\right) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}\left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i\right)$$

* si $\theta > \min x_i$, $L(\theta) = 0$, sinon > 0

* si $\theta < \min x_i$, $\theta \mapsto L(\theta)$ est strictement croissante

Ainsi, $\min x_i = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta) = \hat{\theta}_{MV}$ (généralement, max si la fonction $L(\theta)$ est décroissante)

b) Fct de répartition de $\hat{\theta}_{MV}$ + densité ($g(z)$)

• Pour $z \geq \theta$:

$$\begin{aligned} P(\hat{\theta}_{MV} \leq z) &= 1 - P(\hat{\theta}_{MV} > z) \\ &= 1 - P(x_1 > z, \dots, x_n > z) \quad (x_i \text{ i.i.d.}) \\ &= 1 - P^n(x_1 > z) \\ &= 1 - \exp^n(\theta - z) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z) = 1 - \exp(n(\theta - z)) \end{aligned}$$

• si $z < \theta$, $P(\hat{\theta}_{MV} \leq z) = 1 - P(\hat{\theta}_{MV} > z) = 1$

= 0 dans ce cas

$$\text{Donc } F_{\hat{\theta}_{MV}}(z) = \left(1 - \exp(n(\theta - z))\right) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)$$

densité: $f_{\hat{\theta}_{MV}}(z) = \frac{\partial F_{\hat{\theta}_{MV}}(z)}{\partial z} = n \exp(n(\theta - z)) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)$

c) Espérance + risque $\hat{\theta}_{MV}$

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_{MV}] &= \int_{\mathbb{R}} z n \exp(n(\theta - z)) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z) dz = \int_{\theta}^{+\infty} z n \exp(n(\theta - z)) dz \\ &= n \exp(n\theta) \int_{\theta}^{+\infty} z \exp(-nz) dz \\ &= n \exp(n\theta) \left(\left[-\frac{z}{n} \exp(-nz) \right]_{\theta}^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_{\theta}^{+\infty} \exp(-nz) dz \right) \\ &= n \exp(n\theta) \left(\frac{\theta}{n} \exp(-n\theta) + \frac{1}{n^2} \exp(-n\theta) \right) = \theta + 1/n \end{aligned}$$

• biais:

$$B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = E[\hat{\theta}_{MV}] - \theta = 1/n$$

• risque:

$$\begin{aligned} R(\hat{\theta}_{MV}, \theta) &= E[(\hat{\theta}_{MV} - \theta)^2] \\ &= E[\hat{\theta}_{MV}^2] - 2\theta E[\hat{\theta}_{MV}] + \theta^2 \end{aligned}$$

$$E[\hat{\theta}_{MV}^2] = n \exp(n\theta) \int_{\theta}^{+\infty} z^2 \exp(-nz) dz = n \exp(n\theta) \left(\frac{\theta^2}{n} \exp(-n\theta) + \frac{2\theta}{n^2} \exp(-n\theta) + \frac{2}{n^3} \exp(-n\theta) \right)$$

$$\text{donc } R(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} - 2\theta(\theta + 1/n) + \theta^2 = \frac{2}{n^2}$$

(tend vers 0 plus rapidement que $1/n$)
 $\uparrow$ variance = $\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} = B^2(\hat{\theta}_{MV}, \theta)$

d) Proposer un estimateur sans biais pour θ ($\hat{\theta}_{MVC}$)

Puisque $E[\hat{\theta}_{MV}] = \theta + \frac{1}{n}$, on pose $\hat{\theta}_{MVC} = \hat{\theta}_{MV} - \frac{1}{n} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{1}{n}$ (on retire le biais)

$$E[\hat{\theta}_{MVC}] = E[\hat{\theta}_{MV}] - \frac{1}{n} = \theta$$

Donc $\hat{\theta}_{MVC}$ est bien sans biais

De plus, $\text{Var}(\hat{\theta}_{MVC}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \text{R}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \frac{2}{n^2}$ (invariant par translation)

$$\hat{\theta}_{MVC} \text{ est consistant } \left(R(\hat{\theta}_{MVC}, \theta) = \frac{1}{n^2} \right)$$

4) Comparer les 3 estimateurs

Pour $n \gg 2$, $R(\hat{\theta}_{MVC}, \theta) < R(\hat{\theta}_{MV}, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n}$$

Exo 2. [pas fait en TD]

$X_1, \dots, X_n$ densité $f(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right)$, $\theta > 0$

1) Calculer $E[X_1]$ ($E[X_1^2] = 2\theta^2$)

La densité est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|-x|}{\theta}\right) = f(x)$$

donc X_1 suit une loi symétrique autour de 0, donc $E[X_1] = 0$

2) $\hat{\theta}$ estimateur de type moment

Le moment d'ordre 1 ne permet pas d'estimer θ

θ en fonction des moments théoriques:

$$\theta = \sqrt{\frac{E[X_1^2]}{2}}$$

on remplace les moments théoriques par les moments empiriques:

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}}$$

3) consistance de $\hat{\theta}$

$(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. admettant un moment d'ordre 1

donc par LGN:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} E[X_1^2]$$

La fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$ est continue

donc par le LAC:
 $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{\frac{E[X_1^2]}{2}} = \sqrt{\frac{2\theta^2}{2}} = \theta$

4) EMV ($\hat{\theta}_{MV}$)

• vraisemblance

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|X_i|}{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{(2\theta)^n} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |X_i|\right) \end{aligned}$$

• log-vraisemblance:

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = -n \ln(2\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

• trouver le max ($\ell'(\theta) = 0$)

$$\ell'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |X_i| = 0$$

$$\Leftrightarrow -n\theta + \sum_{i=1}^n |X_i| = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n}$$

• vérification que c'est un max global

$$\ell''(\theta) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\text{pour } \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| = \hat{\theta}_{MV}$$

$$\ell''(\theta) = \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}^2} - \frac{2n}{\hat{\theta}_{MV}^3} = \frac{-n}{\hat{\theta}_{MV}^3} < 0 \quad \text{donc } \ell(\theta) \text{ est concave}$$

donc c'est bien un maximum global

$$\text{EMV: } \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

5) biais et risque de $\hat{\theta}_{MV}$

• biais: $B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \theta$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|\right] - \theta$$
$$= \mathbb{E}[|x_1|] - \theta$$

↳ calcul de $\mathbb{E}[|x_1|]$

$$\mathbb{E}[|x_1|] = \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right) dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} x e^{-x/\theta} dx = \frac{1}{\theta} \left(\left[-\theta x e^{-x/\theta} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \theta e^{-x/\theta} dx \right)$$
$$= \left[-\theta e^{-x/\theta} \right]_0^{+\infty}$$
$$= \theta$$

donc $B(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = 0$

• risque

$$R(\hat{\theta}_{MV}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) + B^2(\hat{\theta}_{MV}, \theta)$$
$$= \text{Var}(\hat{\theta}_{MV})$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) = \frac{1}{n} \text{Var}(|x_1|) \quad \text{X}_i \text{ iid}$$
$$= \frac{\theta^2}{n}$$

↳ calcul de $\text{Var}(X_1)$

$$\text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2$$
$$= 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

⚡ admis dans l'énoncé

6) consistance de $\hat{\theta}_{MV}$

$$\text{Le risque} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \hat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} \theta$$

Exo1:

 $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \theta); \theta > 0$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \theta, \quad \mathbb{E}[X_1^4] = 3\theta^2$$

1) log vraisemblance + EMV = $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-x^2/2\theta^2}$$

VS: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = (2\pi\theta)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$

log-VS: $\ell(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n X_i^2$

dérivée $\ell'(\theta)$: $-\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{n}{2\theta^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \theta) \right)$

on résoud (par rapport à θ)

$$\ell'(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

On pose $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

Vérification qu'il s'agit d'un max global:

$$\ell''(\theta) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\ell''(T) = \frac{n}{2T^2} - \frac{1}{T^3} n \cdot T = \frac{n}{2T^2} - \frac{n}{T^2} = \frac{-n}{2T^2} < 0$$

donc c'est bien l'EMV de θ .2) Hq T est un estimateur consistant de θ + biais(note: on a $\mathbb{E}[X_i^2] = \theta$ (admis), donc par MM, $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est un estimateur consistant par construction)

LGN: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1^2] = \theta$

Donc θ est consistant

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] = \theta$$

Donc θ est sans biais.3) Information de Fisher + T estimateur efficace de θ

$$1 - \text{Var}(T) \xrightarrow[\ell'(\theta)]{} \text{Var}(S(\theta)) \rightarrow I_n(\theta) \rightarrow \text{BCR}(\theta)$$

[Rappels de cours: $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L_n(\theta) = S_n(\theta)$]

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_{\theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log L_n(\theta) \right)^2 \right] = \text{Var}_{\theta} \left[\frac{\partial \log L_n(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

$$I_n(\theta) = n I(\theta)]$$

$$\begin{aligned}
I_n(\theta) &= \text{Var}(S(\theta)) = \text{Var}(\ell'(\theta)) \\
&= \text{Var}\left(\frac{n}{2\theta^2} (T - \theta)\right) \\
&= \left(\frac{n}{2\theta^2}\right)^2 \text{Var}(T) \\
&= \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i^2)\right) \\
&= \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[X_i^4] - \mathbb{E}[X_i^2]^2)\right) \\
&= \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 3\theta^2 - \theta^2\right) = \frac{n^2}{4\theta^4} \cdot \frac{2\theta^2}{n} = \frac{n}{2\theta^2}
\end{aligned}$$

Cours:

Soit $g(\theta)$ le paramètre d'intérêt où $g: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$

PROP: Sous les hypothèses d'un modèle régulier, si pour tout θ , $I(\theta) > 0$
alors pour tout estimateur $T = T(X_1, \dots, X_n)$ sans biais, $\mathbb{E}_\theta T^2 < +\infty$
On a $\forall \theta \in \Theta$, $\text{Var}_\theta(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$

DEF: si T réalise l'égalité, alors T est dit efficace

La borne de Cramer-Rao pour tout estimateur sans biais de θ est:

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{2\theta^2}{n}$$

or $\text{Test sans biais et } \text{Var}(T) = \text{BCR}(\theta)$

Donc T est un estimateur efficace de θ

Exo 2:

$\theta > 0$ ($X_1, \dots, X_n$) échantillon de densité $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) EMV $\hat{\theta}$ de θ

Supposons $\forall i, X_i \in]0, 1[$

$$\begin{aligned}
\text{VS: } L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} X_i^{\frac{1}{\theta}-1} \\
&= \theta^{-n} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{\theta}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{log-VS: } \ell(\theta) &= -n \ln(\theta) + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \\
&= -n \ln(\theta) + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \sum_{i=1}^n \ln(X_i)
\end{aligned}$$

$$\ell'(\theta) = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = -\frac{1}{\theta^2} \left(n\theta + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right)$$

Point critique: on résoud $\ell'(\theta) = 0$

$$n\theta + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \geq 0$$

$$\text{On pose } \hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \geq 0$$

Vérification max global:

$$\begin{aligned}
\ell''(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right) \\
&= \frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \\
&= \frac{1}{\theta^3} \left(n\theta + 2 \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right) \\
\ell''(\hat{\theta}) &= \frac{1}{\hat{\theta}^3} \left(n\hat{\theta}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right) = \underbrace{\frac{1}{\hat{\theta}^3}}_{>0} \underbrace{\left(n\hat{\theta}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right)}_{\leq 0} \leq 0
\end{aligned}$$

Donc $\hat{\theta}$ est bien l'EMV de θ

2) estimateur biaisé ?

$$(\text{ind. loi de } Y_i = -\frac{1}{\theta} \log(X_i), Z = \sum_{i=1}^n Y_i)$$

Loi des Y_i :

fonction de répartition des Y_i :

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(x) &= \mathbb{P}(Y_i \leq x) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\theta} \ln(X_i) \leq y\right) = \mathbb{P}(\ln(X_i) \geq -\theta y) \\ &= \mathbb{P}(X_i \geq e^{-\theta y}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_i \leq e^{-\theta y}) \end{aligned}$$

or, pour $x \in]0, 1[$,

$$F_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} t^{-1/\theta-1} dt = \frac{1}{\theta} \left[\frac{t^{1/\theta}}{1/\theta} \right]_0^x = x^{1/\theta}$$

Ainsi, puisque $e^{-\theta y} \in]0, 1[$,

$$F_{Y_i}(x) = 1 - e^{-y}$$

ce qui donne $f_{Y_i}(y) = F'_{Y_i}(y) = e^{-y}$. Donc $Y_i \sim \mathcal{E}(1)$.

Loi de Z :

Les X_i sont indépendants donc les Y_i le sont aussi.

$$\text{Donc } Z = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \Gamma(n, 1)$$

$$\text{De plus } z = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = \frac{n}{\theta} \hat{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\theta}{n} \cdot Z$$

$$\text{Biais: } \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{\theta}{n} \mathbb{E}[Z] = \theta$$

Donc $\hat{\theta}$ est sans biais

3) Variance de $\hat{\theta}$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \text{Var}(Z) = \frac{\theta^2}{n}$$

$$4) \text{Mq } \ell'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} (\hat{\theta} - \theta)$$

$$\begin{aligned} \ell'(\theta) &= -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \\ &= \frac{n}{\theta^2} \left(-\theta - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right) = \frac{n}{\theta^2} (\hat{\theta} - \theta) \end{aligned}$$

5) En déduire que l'estimateur atteint la borne de Cramer-Rao.

$$\begin{aligned} \text{In}(\theta) &= \text{Var}(\ell'(\theta)) = \left(\frac{n}{\theta^2}\right)^2 \cdot \text{Var}(\theta) \\ &= \frac{n^2}{\theta^4} \cdot \frac{\theta^2}{n} = \frac{n}{\theta^2} \end{aligned}$$

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{1}{\text{In}(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = \text{Var}(\hat{\theta})$$

$\hat{\theta}$ est donc efficace.

Exo 3:

$$f_{\theta}(x) = \theta^2 x e^{-x/\theta} \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ sinon } \theta > 0$$

1) Ma $\mathbb{E}[X_1] = 2\theta$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 6\theta^2$ (fonction génératrice des moments: $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{tx_1}) = \frac{1}{(1-\theta t)^2}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{tx_1}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{\theta}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tx} \theta^2 x e^{-x/\theta} dx \\ &= \theta^2 \int_0^{+\infty} x \exp\left(-x\left(\frac{1}{\theta} - t\right)\right) dx\end{aligned}$$

On suppose $t < 1/\theta$ sinon ça diverge

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \theta^{-2} \left[\frac{1}{\theta^{-1} - t} x \exp(-x(\theta^{-1} - t)) \right]_0^{+\infty} + \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1} - t} \int_0^{+\infty} \exp(-x(\theta^{-1} - t)) dx \\ &= \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1} - t} \int_0^{+\infty} \exp(-x(\theta^{-1} - t)) dx \\ &= \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1} - t} \left[\frac{-1}{\theta^{-1} - t} \exp(-x(\theta^{-1} - t)) \right]_0^{+\infty} \\ &= \end{aligned}$$

Exo 1:

Echantillon de loi de Laplace, $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\mathbb{E}[|X_i|] = \theta$, $\mathbb{E}[X_i^2] = 2\theta^2$ 1) Mq $\tilde{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$ est asymptotiquement normalPosons $Y_i = |X_i|$. Les Y_i sont iidCalcul des moments de Y_i :

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[|X_i|] = \theta$$

$$\text{Var}(Y_i) = \mathbb{E}[Y_i^2] - (\mathbb{E}[Y_i])^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \theta^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

On a $\tilde{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ qui est la moyenne empirique des Y_i , d'espérance θ et variance $\theta^2 < +\infty$ Par le TCL appliqué à la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$, on a $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$

DEF: $(\tilde{\theta}_n)$ est un estimateur asymptotiquement normal ssi

- vitesse de convergence en $\sqrt{n}$
- convergence en loi
- loi limite est la loi normale

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$$

2) a) $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$

On admet: $\mathbb{E}[X_i^4] = 4! \theta^4 = 24 \theta^4$ Mq $\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ as. normal.On pose $Z_i = X_i^2$. Les Z_i sont iid

$$\bullet \mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}[X_i^2] = 2\theta^2$$

$$\bullet \text{Var}(Z_i) = \mathbb{E}[X_i^4] - (\mathbb{E}[X_i^2])^2 = 24\theta^4 - 4\theta^4 = 20\theta^4$$

 $\hat{m}_2$ est la moyenne empirique des Z_i d'espérance $2\theta^2$ et de variance $20\theta^4 < +\infty$

$$\text{TCL: } \sqrt{n}(\hat{m}_2 - 2\theta^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W \sim \mathcal{N}(0, 20\theta^4)$$

 $\Rightarrow \hat{m}_2$ est asymptotiquement normalb) Application de la δ -méthode: déduire que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{5}{4}\theta^2)$

On cherche ψ tq $\psi(\hat{m}_2) = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}$

On doit vérifier:

- ψ est définie et dérivable
- $\psi'(\mathbb{E}[\hat{m}_2]) \neq 0$
- $\psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\theta^2}} = \frac{1}{4|\theta|} = \frac{1}{4\theta} > 0$

On peut appliquer la méthode delta:

$$\sqrt{n}(\psi(\hat{m}_2) - \psi(2\theta^2)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \psi'(2\theta^2)^2 \times 20\theta^4)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{5\theta^2}{4})$$

LEMME: [méthode δ]Soit Z_n une suite de v.a. réelles tq $\sqrt{n}(Z_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ Soit g une fonction dérivable en μ , $g'(\mu) \neq 0$ Sous ces hypothèses, on a $\sqrt{n}(g(Z_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \tilde{Z} \sim \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2 \sigma^2)$

$$g(x) = g(\mu) + g'(\mu)(x - \mu) + (x - \mu)R(x - \mu) \text{ où } R(y) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0$$

 $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal.

Exo 2:

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon $\sim \mathcal{G}(q)$ sur $\mathbb{N}$, $q \in]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_q(X=k) = (1-q)q^k$$

$$\text{On admet que } \mathbb{E}[X] = \frac{q}{1-q} \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$(\text{fonction génératrice des moments: } G(t) = \frac{1-q}{1-qt})$$

1) estimateur des moments $\hat{q}$ de q

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{q}{1-q}$$

$$\Rightarrow \mu(1-q) = q \Leftrightarrow \mu = q(1+\mu) \Leftrightarrow q = h(\mu), \quad h = x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{1+x}$$

$$\text{Ainsi, } \hat{q}_n = h(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X}_n}{1 + \bar{X}_n}$$

2) consistance ?

Les variables X_i sont i.i.d. intégrables ($\mathbb{E}[X_i] = \mu < +\infty$)

$$\text{LGN} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{LAC: } h(\bar{X}_n) = \hat{q}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} h(\mu) = q$$

Donc $\hat{q}_n$ est consistant.

3) méthode δ , variance de la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{q} - q)$

a) TCL sur $\bar{X}_n$

$$\text{b) méthode } \delta \text{ avec } h: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{1+x}$$

a) Les variables $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d. d'espérance $\mu = \frac{q}{1-q}$ et de variance $\frac{1}{(1-q)^2} < +\infty$

On applique le TCL :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(1-q)^2}\right)$$

b) Vérifions les hypothèses de la méthode δ pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$- h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

$$\Rightarrow h'(\mu) \neq 0$$

On peut appliquer la méthode

$$(h(\bar{X}_n) - h(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, (h'(\mu))^2 \frac{1}{(1-\mu)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}(\hat{q}_n - q) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, q(1-q)^2\right) \quad \left((h'(\mu))^2 \frac{1}{(1-\mu)^2} = (1-q)^4 \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = q(1-q)^2 \right)$$

La variance de la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{q}_n - q)$ est $q(1-q)^2$

4) Information de Fisher du modèle + comparer les résultats

Soit $L(q)$ la vraisemblance de X_i .

$$L(q) = (1-q)q^{X_i}$$

$$\ell_i(q) = \ln(1-q) + X_i \ln(q)$$

$$\ell'_i(q) = \frac{-1}{1-q} + \frac{X_i}{q} = \frac{X_i}{q} - \frac{1}{1-q}$$

Soit $I_i(q)$ l'information de Fisher d'une seule des (X_i) .

$$I_i(q) = \mathbb{V}(\ell'_i(q)) = \mathbb{V}\left(\frac{X_i}{q} - \frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{q^2} \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{q(1-q)^2}$$

$$I_n(q) = \sum_{i=1}^n I_i(q) = n I_i(q) = \frac{n}{q(1-q)^2}$$

• La borne de Cramer-Rao est de $BCR = \frac{1}{I_n(q)} = \frac{q(1-q)^2}{n}$

Or, d'après la question précédente, la loi asymptotique de $\hat{q}_n$ est $\mathcal{N}\left(q, \frac{q(1-q)^2}{n}\right)$.

La variance de cette loi atteint la borne de Cramer-Rao ; $\hat{q}_n$ est asymptotiquement efficace

Exo 1:

Rappel: l'inverse généralisée

$$\forall \mu \in [0, 1], F^{-1}(\mu) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq \mu\}$$

conventions: $\inf \mathbb{R} = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

$$1) \text{ Mq } \forall \mu \in [0, 1], F(x) \geq \mu \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(\mu)$$

$$\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq \mu\} = A(\mu)$$

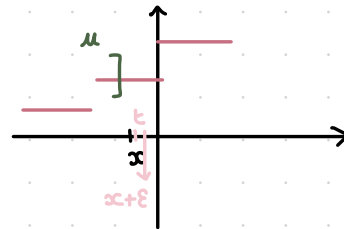
(⇒) On suppose que $F(x) \geq \mu$ alors $x \in A(\mu)$

$$\text{et } \inf A(\mu) \leq x$$

$$= F^{-1}(\mu)$$

(⇐) On suppose que $F^{-1}(\mu) \leq x$ On prend $\varepsilon > 0$ tq $F^{-1}(\mu) < x + \varepsilon$

$$\exists t \text{ tq } F^{-1}(\mu) \leq t < x + \varepsilon$$

En particulier, on a que $\mu \leq F(t)$ ($t \in A(\mu)$)Comme F est croissante (car c'est une f.d.R), $F(t) \leq F(x + \varepsilon)$

$$\text{et } \mu \leq F(t) \leq F(x + \varepsilon)$$

$$\text{et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) = F(x) \geq \mu$$

$$2) U \sim \text{Unif}([0, 1]), \text{ mq } X = F^{-1}(U) \text{ a pour f.r.f.}$$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \quad \downarrow \text{ par q.1}$$

$$= F(x) \text{ car } U \sim \text{Unif}([0, 1])$$

3) Comment générer une réalisation d'une variable X selon $\mathcal{E}(\lambda)$ à partir d'une réalisation de U

$$\text{Si } X \sim \mathcal{E}(\lambda), F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu = F(x) \text{ pour } \mu \neq 1$$

$$\Rightarrow \mu = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - \mu$$

$$\Rightarrow -\lambda x = \ln(1 - \mu)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \mu)$$

$$\text{mais } \mathbb{P}(\mu = 1) = 0$$

$$\text{On a trouvé } F^{-1}(\mu) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \mu) \text{ pour } \mu \neq 1$$

En appliquant Q2, on a que $F^{-1}(U) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et on peut générer une observation d'une variable aléatoire exponentielle.

Exo 2:

$$X_1, \dots, X_n \sim U[0, \theta], \theta > 0, \text{ f.r.f.}$$

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i, \hat{\theta}_3 = 2\hat{m} \text{ où } \hat{m} = \hat{F}_n^{-1}(1/2) \text{ médiane empirique}$$

 $\hat{F}_n^{-1}$: inverse généralisée de la f.r. empirique des X_i .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

1) Mq $\theta = 2F^{-1}(1/2)$ et donc que $\hat{\theta}_3$ estimateur empirique de θ

On sait que $F(m) = 1/2$ et $F(m) = \frac{m}{\theta}$ pour $m \in [0, \theta]$

$$\text{donc } \frac{m}{\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \theta = 2m$$

donc $\theta = 2F^{-1}(1/2)$ et $\hat{\theta}_3$ est un estimateur empirique de θ

2) Déterminer les lois limites de chaque estimateur

(pour $\hat{\theta}_3$, on admet que $\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)^2}\right)$)

$\hat{\theta}_1$: les $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de moyenne finie et de variance finie donc on peut appliquer le TCL:

$$\sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right) \quad \begin{matrix} \text{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12} \\ \mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{2} \end{matrix}$$

$$\text{et } \sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$$

il faut utiliser la bonne normalisation

(TCL concerne les moyennes)

$\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$: $\rightarrow$ on ne peut pas appliquer le TCL

$$\text{On rappelle que } P(\hat{\theta}_2 \leq t) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq t\right) = F(t)^n$$

$$P\left(\sqrt{n}(\theta - \hat{\theta}_2) \geq t\right) = P\left(\hat{\theta}_2 \geq \theta - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - F\left(\theta - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}\theta}\right)^n$$

pas de convergence avec $\sqrt{n}$, mais en remplaçant $\sqrt{n}\theta$ par n on a:

$$P\left(n(\theta - \hat{\theta}_2) \geq t\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - e^{-t/\theta}$$

et donc asymptotiquement $\hat{\theta}_2$ suit une loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$\hat{\theta}_3 = 2\hat{m}$

On admet que pour un quantile empirique α , on a

$$\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)^2}\right)$$

On a que $f(q_\alpha) = \frac{1}{\theta}$ (car loi uniforme donc sa densité vaut $\frac{1}{\theta}$ si $q_\alpha \in [0, \theta]$)

$$\text{donc } \sqrt{n}\left(\hat{m} - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\theta^2\right)$$

$$\text{et } \sqrt{n}(2\hat{m} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right)$$

3) Comparer la performance asymptotique des 3 estimateurs

$\hat{\theta}_2$ a la meilleure convergence ($\frac{1}{n}$), donc on le préfère aux autres

et $\hat{\theta}_1$ a une variance asymptotique plus faible que $\hat{\theta}_2$, donc on le préfère

Exo 3:

$$x \neq y, \text{ mq } \text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n} (F(\min(x, y)) - F(x)F(y))$$

$$\text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = -\mathbb{E}[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] + \mathbb{E}[\hat{F}_n(x)] \mathbb{E}[\hat{F}_n(y)]$$

$$\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_1 \leq x}] \text{ car i.i.d.}$$

$$= F(x)$$

$$\mathbb{E}[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x; X_j \leq y\}}]$$

$$\text{On regarde } \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x; X_j \leq y\}}]$$

$$\rightarrow \text{si } i=j, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \min(x,y)\}}] = F(\min(x,y))$$

$\rightarrow$ si $i \neq j$ on a par indépendance

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq y\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}] \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_j \leq y\}}] = F(x)F(y)$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[\hat{F}_n(x) \hat{F}_n(y)] = \frac{1}{n^2} (n F(\min(x,y)) + n(n-1) F(x)F(y))$$

$$= \frac{1}{n} F(\min(x,y)) + \frac{n-1}{n} F(x)F(y)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) &= \frac{1}{n} F(\min(x,y)) + \frac{n-1}{n} F(x)F(y) - F(x)F(y) \\ &= \frac{1}{n} F(\min(x,y)) - \frac{1}{n} F(x)F(y) \end{aligned}$$